

Didaktik der Mathematik in der Primarstufe III

# Didaktik der Geometrie

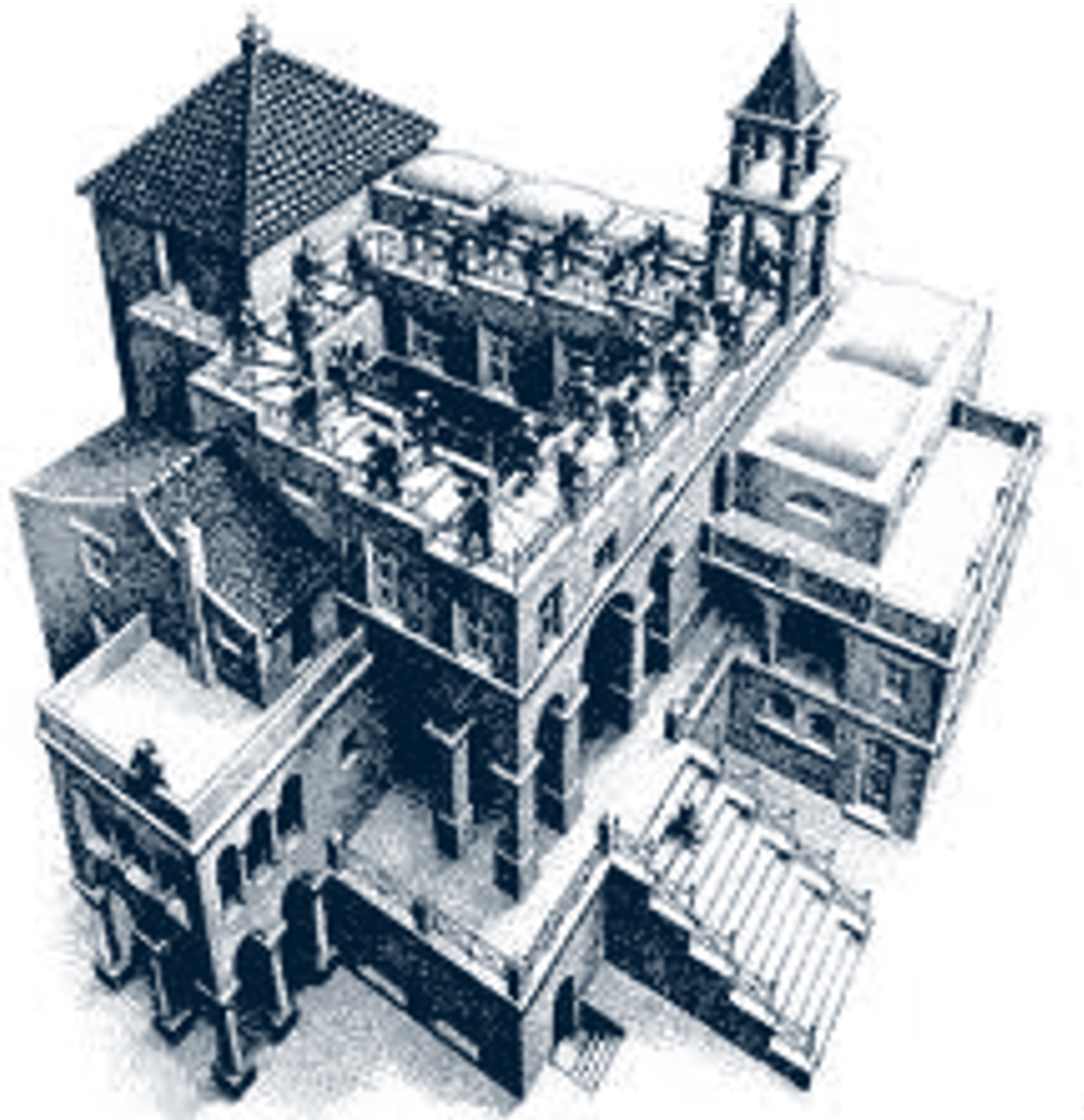
## 02 - Entwicklung räumlicher Fähigkeiten

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Melanie Platz

# Themenübersicht

| Datum    | Nr.           | Thema                                          | Grundidee                       |
|----------|---------------|------------------------------------------------|---------------------------------|
| 11.04.23 | 01            | Organisatorisches & Einführung                 |                                 |
| 18.04.23 | 02            | Entwicklung räumlicher Fähigkeiten             |                                 |
| 25.04.23 | 03            | Geometrische Begriffe und Wissenserwerb        |                                 |
| 05.05.23 | 04            | Zeichnen und Konstruieren                      | Formen und ihre<br>Konstruktion |
| 09.05.23 | 05            | Ebene Figuren I                                |                                 |
| 16.05.23 | 06            | Ebene Figuren II & Räumliche Objekte           |                                 |
| 23.05.23 | 07            | Symmetrie I (Kongruenzabbildungen)             | Operieren mit Formen            |
| 30.05.23 | 08 (entfällt) | --                                             |                                 |
| 06.06.23 | 09            | Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette) |                                 |
| 13.06.23 | 10            | Falten                                         |                                 |
| 20.06.23 | 11            | Längen, Flächen und Volumina I                 | Maße und Formeln                |
| 27.06.23 | 12            | Längen, Flächen und Volumina II                | Geom. Gesetzm. & Muster         |
| 04.07.23 | 13            | Pläne & Maßstäbe, Wiederholung & Fragen I      | Koordinaten                     |
| 11.07.23 | 14 (online)   | Wiederholung & Fragen II                       |                                 |
| 18.07.23 | 15            | Klausur                                        |                                 |



M. C. Escher (1898 – 1972), Treppauf und Treppab, 1960

# Entwicklung räumlicher Fähigkeiten

- Kompetenzen von Schulanfängern
- Räumliche Fähigkeiten
- Umsetzung im Unterricht: Kopfgeometrie

*Mit Inhalten von Dr. Anna-Marietha Vogler, Dr. Eva Hoffart u.a.*

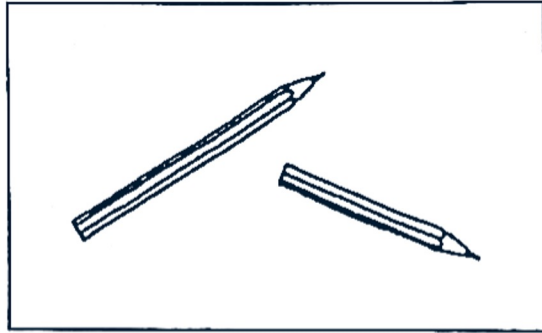
## Ich kann...

- ☐ die 6 Komponenten visueller Wahrnehmung benennen und beschreiben.
- ☐ die 4 Komponenten der Raumvorstellung benennen und beschreiben.
- ☐ erläutern, welche Komponenten der visuellen Wahrnehmung und der Raumvorstellung ein Kind benötigt, um eine bestimmte Aufgabe lösen zu können.
- ☐ an einem Beispiel erläutern, was Kopfgeometrie ist.
- ☐ die 4 Variationen von Kopfgeometrieaufgaben nennen und beschreiben sowie Aufgabenbezogen denkbare Hilfestellungen nennen.
- ☐ Potenziale des Einsatzes Kopfgeometrischer Aufgaben nennen.
- ☐ erläutern, worin sich Kopfgeometrie und Kopfrechnen unterscheiden.
- ☐ Aufgaben zur Förderung räumlicher Fähigkeiten lösen und angewendete Lösungsstrategien beschreiben und reflektieren.

# Kompetenzen von Schulanfängern

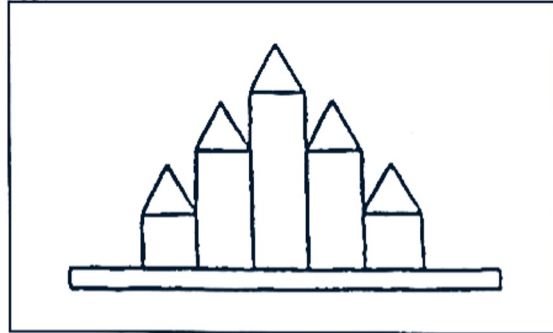
# Kompetenzen von Schulanfängern

1. Aufgabe – Bleistifte



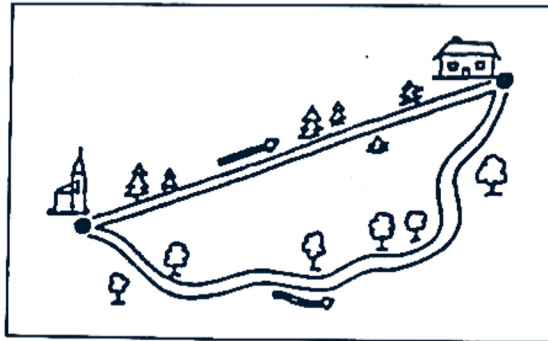
Welcher Bleistift ist kürzer?  
Male ihn aus.

2. Aufgabe – Quadrate



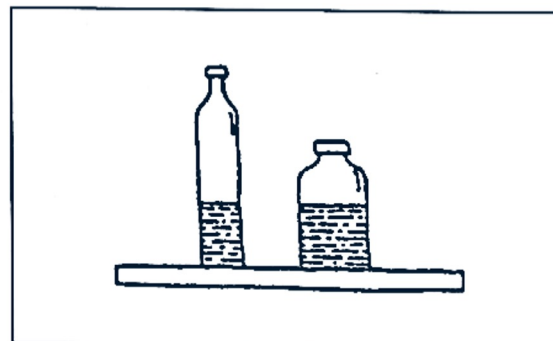
Male die Quadrate auf dem Bild aus.

3. Aufgabe – Wege



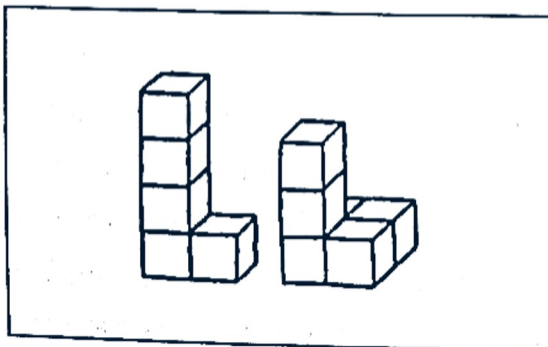
Male den kürzeren Weg aus.

4. Aufgabe – Flaschen



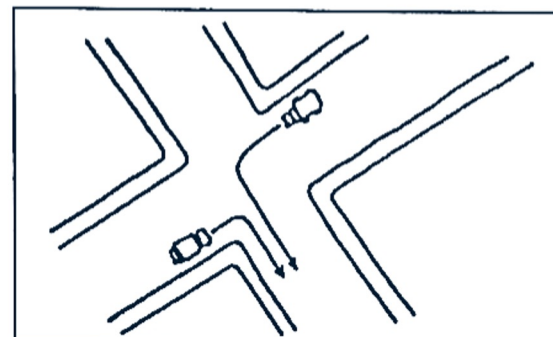
In welcher Flasche ist mehr Limonade?  
Male sie aus.

5. Aufgabe – Baue



Für welchen Bau brauchst du weniger  
Würfel? Male ihn aus.

6. Aufgabe – Autos



Welches Auto biegt nach rechts ab?  
Male es aus.

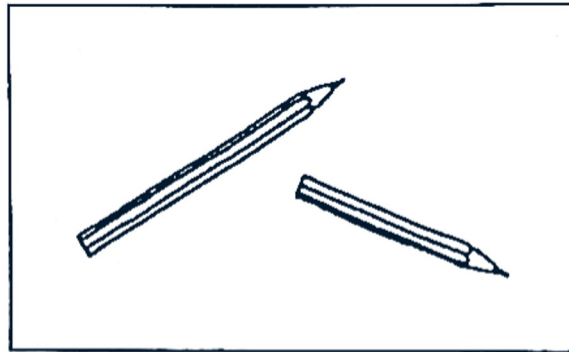
- Test zur Erfassung geometrischer Fähigkeiten von Schulanfängern (Kurina, Tichá & Hospesová, 1996)
- Durchführung kurz nach Schulanfang
- 1010 tschechische Kinder, 583 deutsche Kinder
- vorherige Einschätzung der Lösungsprozentsätze
- Ergebnisse:
  - relativ umfangreiche geometrische Erfahrungen
  - Unterschiede Kinder und Aufgaben
  - Schüler werden häufiger unter- als überschätzt

Franke & Reinhold (2016, S. 149)

# Kompetenzen von Schulanfängern

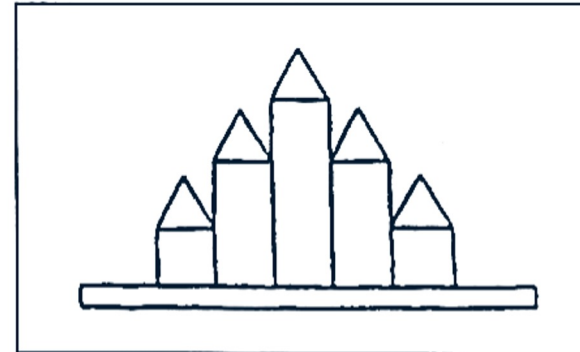
leicht,  
Erfahrungen

1. Aufgabe – Bleistifte



Welcher Bleistift ist kürzer?  
Male ihn aus.

2. Aufgabe – Quadrate

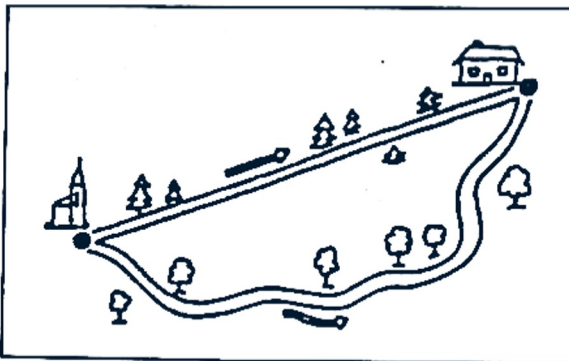


Male die Quadrate auf dem Bild aus.

unterschiedlich,  
Begriffsentwicklung

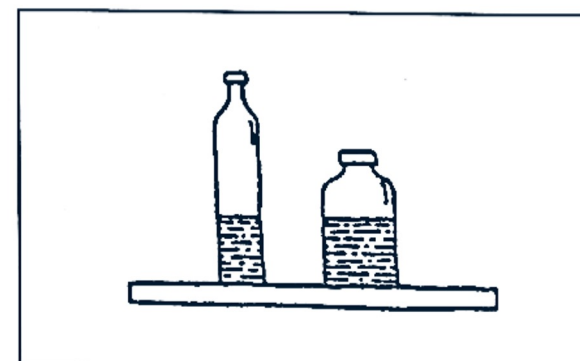
leicht,  
Erfahrungen

3. Aufgabe – Wege



Male den kürzeren Weg aus.

4. Aufgabe – Flaschen

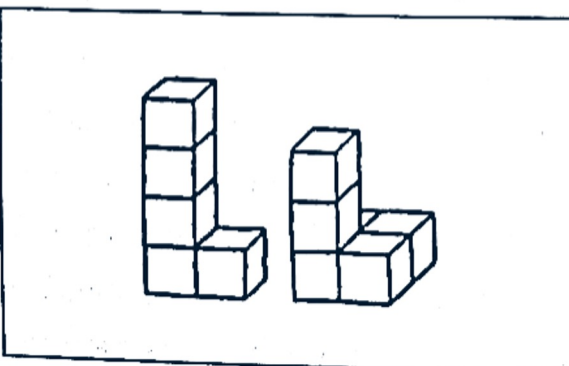


In welcher Flasche ist mehr Limonade?  
Male sie aus.

schwierig,  
zwei Dimensionen

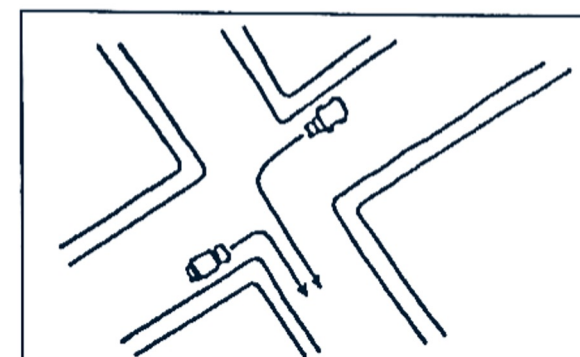
unterschiedlich,  
Erfahrungen

5. Aufgabe – Baue



Für welchen Bau brauchst du weniger  
Würfel? Male ihn aus.

6. Aufgabe – Autos



Welches Auto biegt nach rechts ab?  
Male es aus.

schwierigste  
Aufgabe

Franke & Reinhold (2016, S. 149)

# Räumliche Fähigkeiten

- Visuelle Wahrnehmung (6 Komponenten)
- Raumvorstellung (4 Komponenten)

**Visuelle  
Wahrnehmung**

**Räumliches  
Vorstellungsvermögen**

**Räumliches Denken**

**Visuelle  
Wahrnehmung**

**Räumliches  
Vorstellungsvermögen**

**Räumliches Denken**

- Voraussetzung für **räumliches Vorstellungsvermögen**
- Voraussetzung für jede **koordinierte Bewegung**
- Aktiver Prozess:
  - Ausgangspunkt im Sehen
  - Sehen selbst ist physikalischer Vorgang
  - Verarbeitung der Reize als kognitiver Prozess
  - Verbindung Wahrnehmen und Wissen, beruht auf Wissen und Motivation

## Visuelle Wahrnehmung

**Visuomotorische  
Koordination**

**Figur-Grund-  
Unterscheidung**

**Wahrnehmungs-  
konstanz**

**Räumliche  
Orientierung**

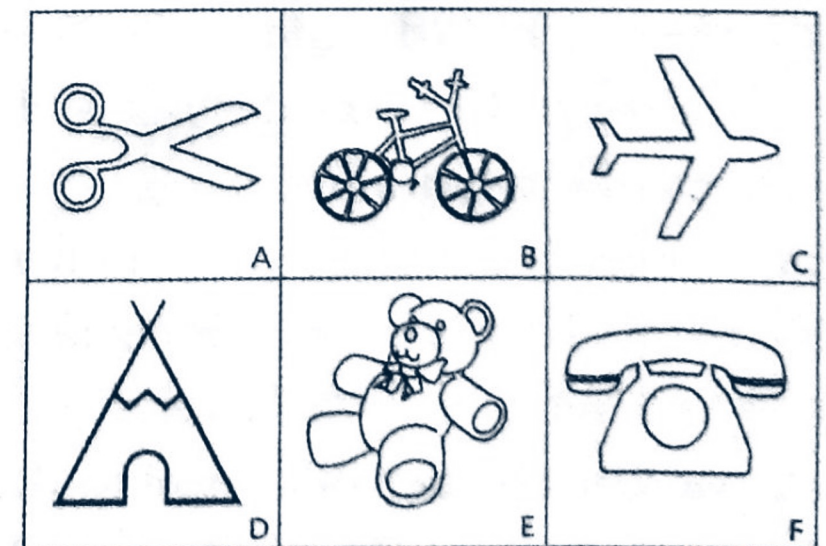
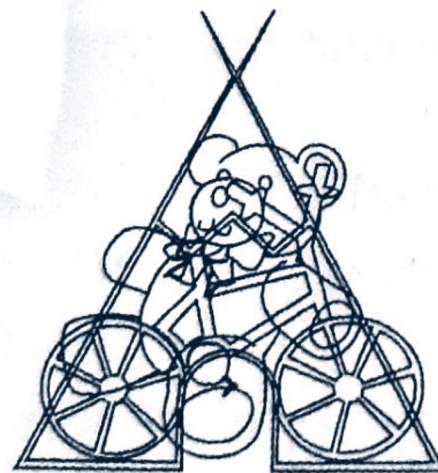
**Visuelles Gedächtnis**

**Visuelle Unterscheidung**

## Figur-Grund-Unterscheidung

- Fähigkeit von Geburt an
- Unterscheidung von Figur und Hintergrund
- Gegenstände erkennen und sich im Raum orientieren
- Konturen unterscheiden Figur und Grund, Grenzen zwischen Flächen
- Wahrnehmung räumlicher Tiefe

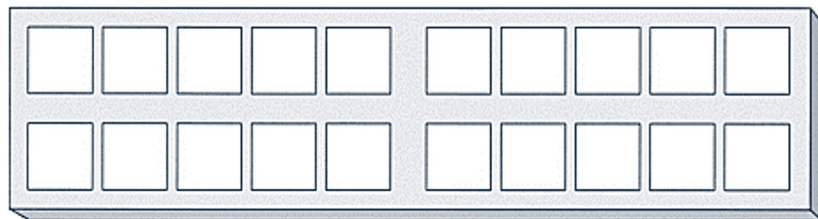
Welche Figuren sind im „Chaosbild“ enthalten?



Franke & Reinhold (2016, S. 56)

## Figur-Grund-Unterscheidung – Bezug zur Arithmetik

- Räumlich nahe beieinanderliegende, ähnliche oder gleichartige Elemente werden als zusammengehörig erachtet ebenso wie



Lüken (2012, S. 58)

- Elemente, die gemeinsame visuelle Eigenschaften (z.B. Helligkeit, Farbe, Textur) aufweisen, einer gemeinsamen Region angehören oder miteinander verbunden sind.



Lüken (2012, S. 56)

→ Eine solche Gruppierung von Einzelaspekten in Einheiten spielt u.a. in der Gestaltung und Wahrnehmung arithmetischer Veranschaulichungen eine bedeutsame Rolle.

Franke & Reinhold (2016, S. 57)

## Figur-Grund-Unterscheidung

### Kippfiguren

- Umkehrung von Figur und Grund möglich



Was sehen Sie?  
Variieren Sie Vorder-  
und Hintergrund

## Visuomotorische Koordination

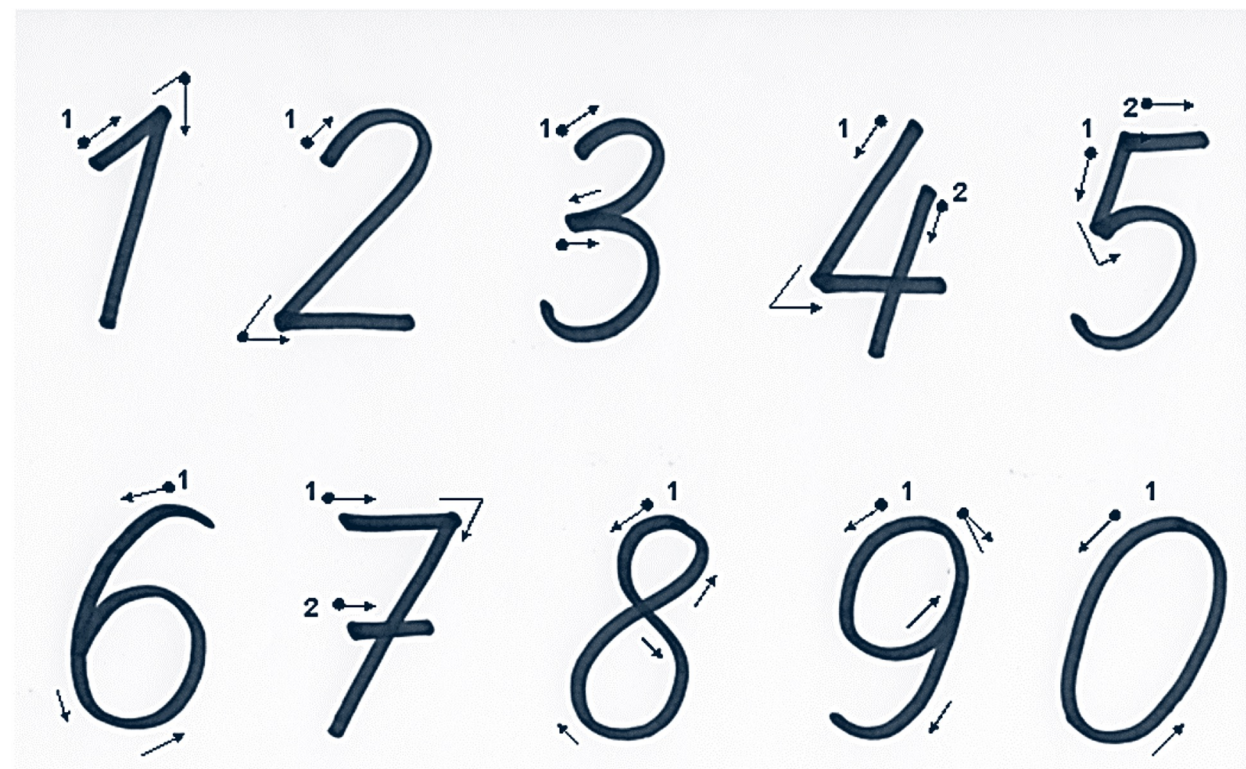
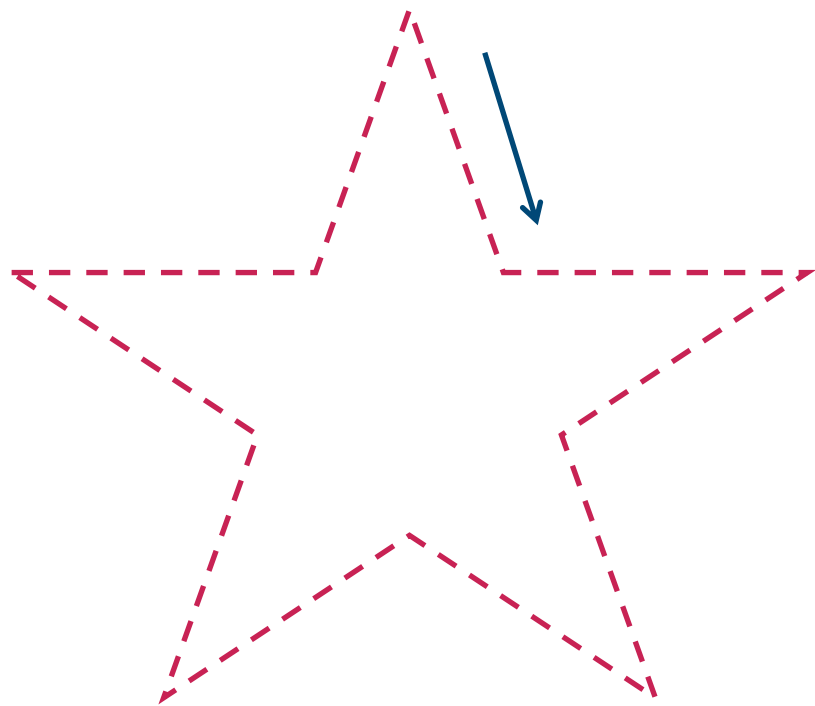
- Bei Erwachsenen in der Regel fast perfektes Zusammenspiel der Sinnesorgane, **Kinder müssen dies erst lernen**
- Koordination der Informationen von verschiedenen Sinnesorganen muss trainiert werden
- **Sehen und Handeln koordinieren**, z.B. beim Ball fangen, Schreiben, Malen, Schneiden, ‚Zocken‘...
- Visuomotorische Koordination entwickelt sich weitgehend **im Vorschulalter**

Franke & Reinhold (2016, S. 55)

## Visuomotorische Koordination

### Koordination zwischen Auge und Hand

Zeichne nach!



Kernlehrplan  
Mathematik  
Grundschule  
(2009)

## Wahrnehmungskonstanz

- Tendenz, Objekte in unserer Welt als **relativ stabil** wahrzunehmen
- **Größenkonstanz:** Objekte werden unabhängig von ihrer Entfernung als gleich groß wahrgenommen
- **Formenkonstanz:** Unabhängig von der Bewegung des Betrachters wird die Form des Objekts als konstant wahrgenommen
- Basiert auf einer ganzen Reihe von **Korrekturprozessen**, die vom Gehirn durchgeführt werden, bspw. Farbe, Helligkeit, Größe, Form, Lage...

Franke & Reinhold (2016, S. 57)

## Wahrnehmungskonstanz

Figuren in der Ebene oder im Raum in verschiedenen Größen, Anordnungen, Lagen oder Färbungen werden **wiedererkannt** und von anderen Figuren **unterschieden**



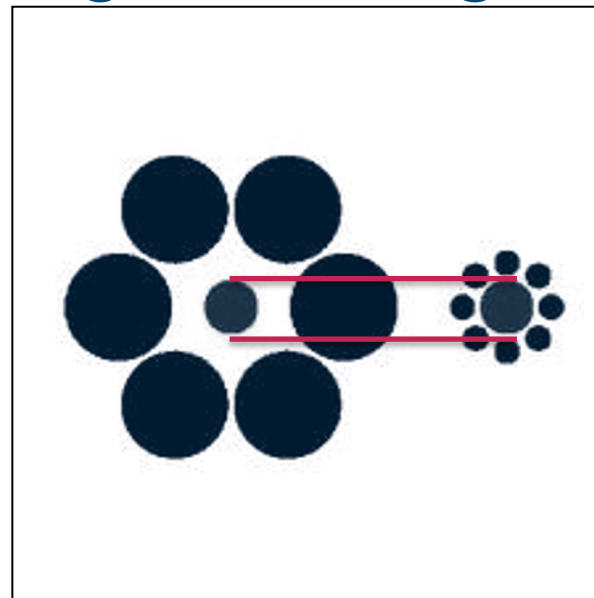
Nussknacker 3

Franke & Reinhold (2016, S. 57ff)

## Wahrnehmungskonstanz

### Beispiele für Wahrnehmungstäuschungen

- Größenkonstanz



- Amodale Figuren  
(Scheinkonturen)



Franke & Reinhold (2016, S. 53f)

## Räumliche Orientierung

- Standort und räumliche Beziehung zwischen Objekten erkennen und verstehen
- Zustandsbeschreibung
- die eigene Orientierung im Raum erkennen
- Die Beziehung der Gegenstände im Raum und deren Wiedererkennen, auch bei Wechsel des eigenen Standorts

Franke & Reinhold (2016, S. 70)

## Räumliche Orientierung

Merkmale der räumlichen Orientierung

- **Bezugssysteme** erkennen, Bsp. Wasserversuch von Piaget
- **Lokalisierung** im Raum, Bsp. 3 Berge Versuch von Piaget
- **Inversion** erkennen, Bsp. Objekte stehen auf dem Kopf
- **Rechts-Links-Orientierung**, Bsp. Verwechslung p und q
- Wahrnehmung einer **stabilen Umgebung**, Bsp. Schulweg

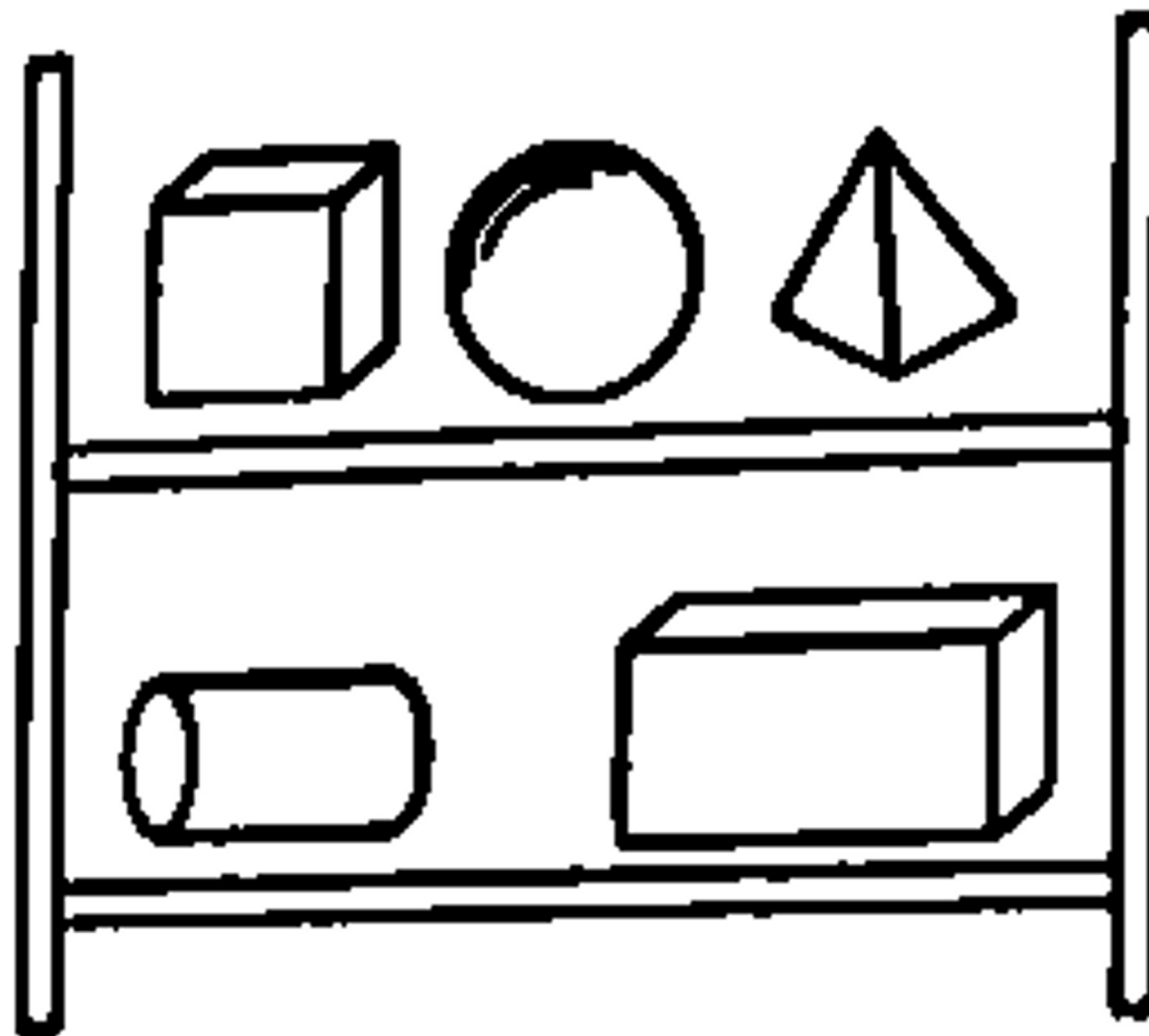
## Visuelles Gedächtnis

Charakteristische Merkmale eines nicht mehr präsenten Objektes auf andere, präsente Objekte zu beziehen

## Visuelle Unterscheidung

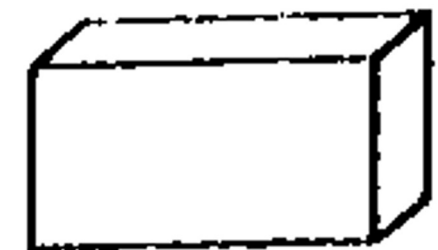
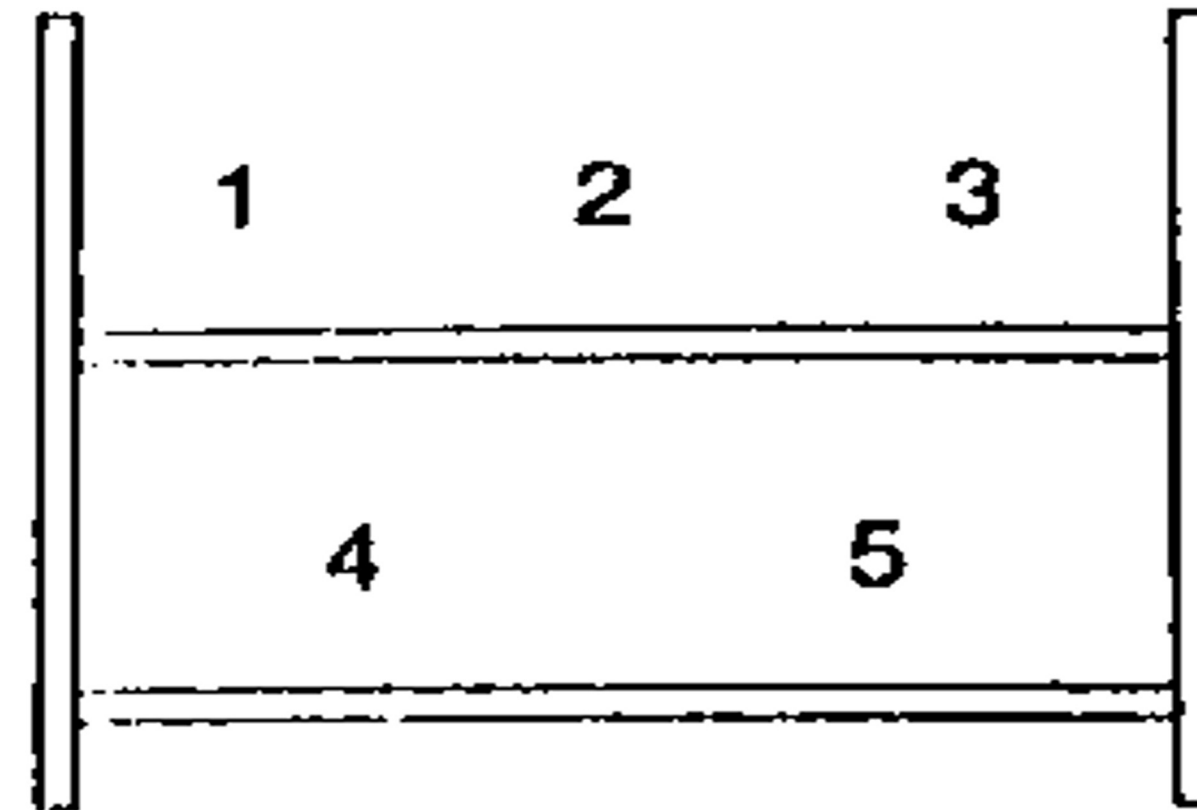
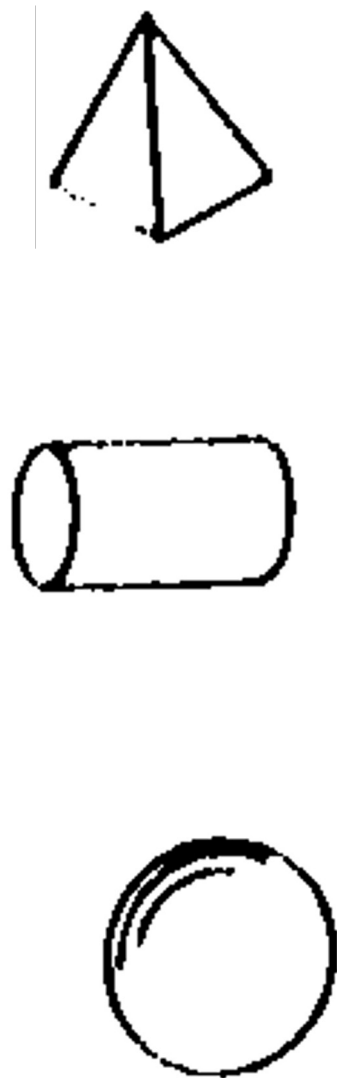
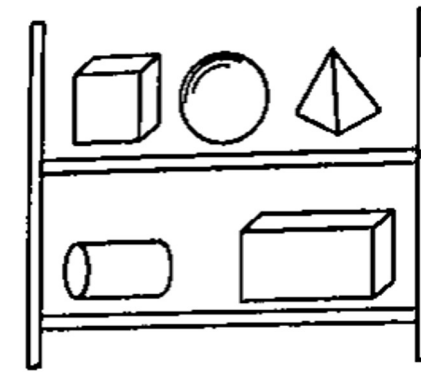
Nicht nur Gemeinsamkeiten, sondern auch Unterschiede zwischen Objekten erkennen

Was ist wo?



# Visuelle Wahrnehmung

Was ist wo?



## Visuelle Wahrnehmung mit Hund: Memory – Schau genau!



## Visuelle Wahrnehmung

Visuomotorische  
Koordination

Figur-Grund-  
Unterscheidung

Wahrnehmungs-  
konstanz

Räumliche  
Orientierung

Visuelles Gedächtnis

Visuelle Unterscheidung

# Räumliches Vorstellungsvermögen

# Räumliches Denken

## Visuelle Wahrnehmung

Visuomotorische  
Koordination

Figur-Grund-  
Unterscheidung

Wahrnehmungs-  
konstanz

Räumliche  
Orientierung

Visuelles Gedächtnis

Visuelle Unterscheidung

# Räumliches Vorstellungsvermögen

# Räumliches Denken

# Was ist Raumvorstellung?

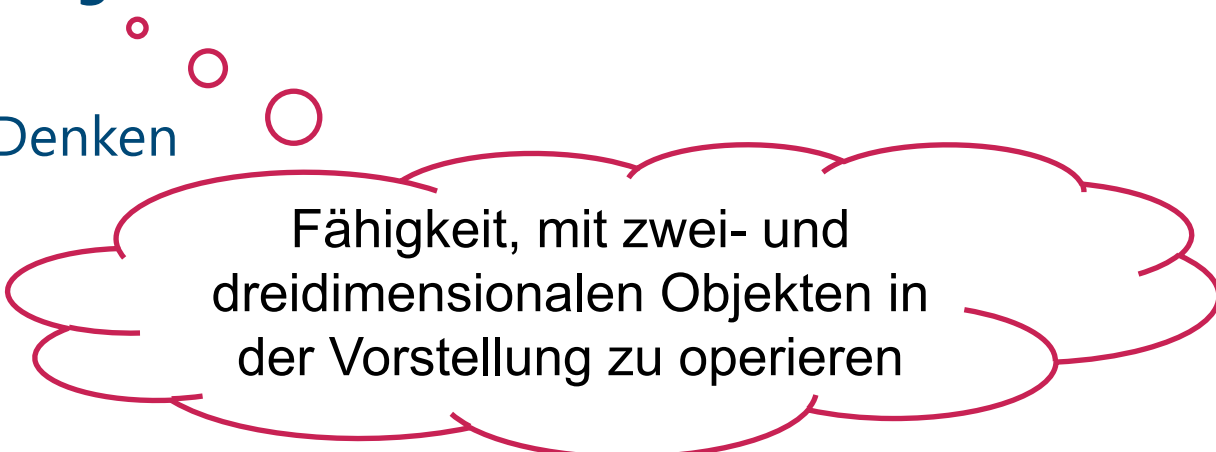
- „...das **Operieren mit Bildern im Kopf.**“ (Franke 2007, S. 28)
- „Raumvorstellung ist die Fähigkeit, räumliche Objekte **verinnerlicht** zu sehen, verinnerlicht bewegen, verinnerlicht zerlegen und zusammensetzen und verinnerlicht ausdehnen und komprimieren zu können.“ (Wollring 2011, S. 11)

## Räumliches Vorstellungsvermögen und Intelligenz

Thurstone (1938)

- Sieben Faktoren menschlicher Intelligenz:

1. Sprachverständnis
2. Wortflüssigkeit
3. Rechenfertigkeiten
4. Wahrnehmungstempo
5. **Räumliches Vorstellungsvermögen**
6. Merkfähigkeit
7. Logisches, schlussfolgerndes Denken



Fähigkeit, mit zwei- und dreidimensionalen Objekten in der Vorstellung zu operieren

## Räumliches Vorstellungsvermögen

**Räumliche  
Wahrnehmung**

**Räumliche  
Beziehungen**

**Veranschaulichung  
& Mentale Rotation**

**Räumliche  
Orientierung**

# Räumliches Vorstellungsvermögen

|                                                                    |                                              |                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>In meiner Vorstellung</b></p> <p><b>Ich befinde mich</b></p> | <p><b>... bewege ich die Dinge nicht</b></p> | <p><b>... bewege ich die Dinge</b></p>                                                                                                                      |
| <p><b>... außerhalb der Situation</b></p>                          | <p>Räumliche Beziehungen</p>                 | <p>a) Veranschaulichung<br/>(ich bewege Teile des Objekts)</p> <p>b) Gedankliches Bewegen<br/>(Mentale Rotation)<br/>(ich bewege das Objekt als Ganzes)</p> |
| <p><b>... in der Situation</b></p>                                 | <p>Räumliche Wahrnehmung</p>                 | <p>Räumliche Orientierung</p>                                                                                                                               |

Selter & Zannetin (2019, S. 101)

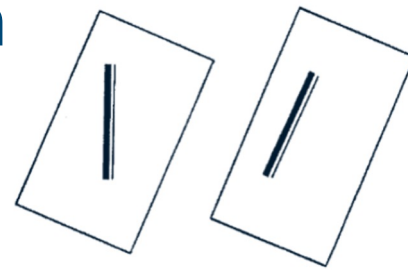
# Räumliches Vorstellungsvermögen

## Räumliche Wahrnehmung

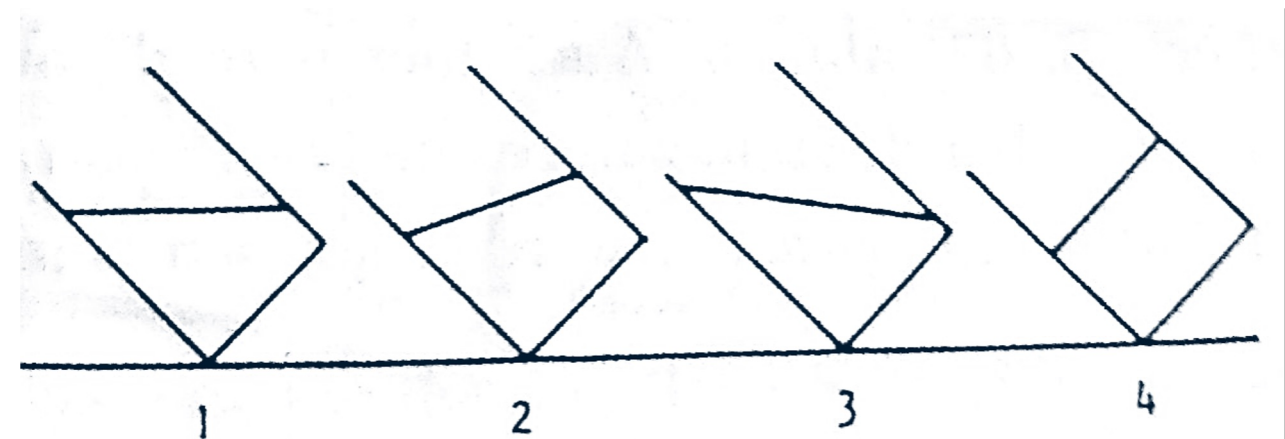
| In meiner Vorstellung<br>Ich befinde mich | ... bewege ich die Dinge nicht | ... bewege ich die Dinge                                                                                                                      |
|-------------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ... außerhalb der Situation               | Räumliche Beziehungen          | a) Veranschaulichung<br>(ich bewege Teile des Objekts)<br>b) Gedankliches Bewegen<br>(Mentale Rotation)<br>(ich bewege das Objekt als Ganzes) |
| ... in der Situation                      | Räumliche Wahrnehmung          | Räumliche Orientierung                                                                                                                        |

- **Die Fähigkeit Objekte und Lagebeziehungen von Objekten bezüglich des eignen Körpers wahrzunehmen**

- „Rod-and-Frame“ Test (Quaiser-Pohl, 1998)
- Aufgaben zur Bestimmung des Wasserspiegels (Piaget & Inhelder, 1971)



In welchem Gefäß ist der Wasserstand korrekt eingezeichnet?



Franke & Reinhold (2016, S. 71)

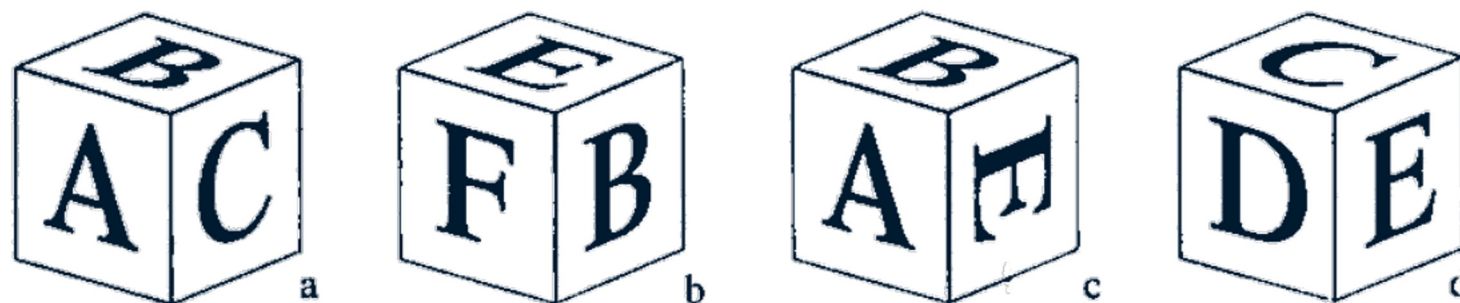
# Räumliches Vorstellungsvermögen

| In meiner Vorstellung       | ... bewege ich die Dinge nicht | ... bewege ich die Dinge                                                                                                                      |
|-----------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ich befinde mich            |                                |                                                                                                                                               |
| ... außerhalb der Situation | Räumliche Beziehungen          | a) Veranschaulichung<br>(ich bewege Teile des Objekts)<br>b) Gedankliches Bewegen<br>(Mentale Rotation)<br>(ich bewege das Objekt als Ganzes) |
| ... in der Situation        | Räumliche Wahrnehmung          | Räumliche Orientierung                                                                                                                        |

## Räumliche Beziehungen

- **Das Vorstellen und Beschreiben von räumlichen Lagebeziehungen unbewegter Objekte**
- Das richtige Erfassen räumlicher Beziehungen von Objekten oder Teilen von Objekten
- Identifizierung eines Objekts aus verschiedenen Blickwinkeln, zwei Objekte sind gleich oder verschieden

Drei der vier Schrägbilder zeigen denselben Würfel.  
Welches Bild zeigt einen anderen?

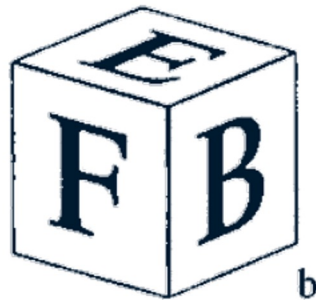


Lösen Sie die Aufgabe und begründen Sie!

Franke & Reinhold (2016, S. 65ff); Maier (1996)

# Räumliches Vorstellungsvermögen

Drei der vier Schrägbilder zeigen denselben Würfel.  
Welches Bild zeigt einen anderen?



<https://www.menti.com/iz481cgre3>

Besuchen Sie [www.menti.com](https://www.menti.com) und benutzen S

## Welches Bild zeigt einen anderen V

# Räumliches Vorstellungsvermögen

| In meiner Vorstellung<br>Ich befinde mich | ... bewege ich die Dinge<br>nicht | ... bewege ich die Dinge                                                                                                                         |
|-------------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ... außerhalb der Situation               | Räumliche Beziehungen             | a) Veranschaulichung<br>(ich bewege Teile des Objekts)<br>b) Gedankliches Bewegen<br>(Mentale Rotation)<br>(ich bewege das Objekt als<br>Ganzes) |
| ... in der Situation                      | Räumliche Wahrnehmung             | Räumliche Orientierung                                                                                                                           |

## Veranschaulichung

- **Die gedankliche Vorstellung von Bewegungen wie Drehungen, Verschiebungen und Faltungen von Teilen eines Objekts**
- Vorstellung über die Veränderung einer Figur, Zerlegen, Zusammensetzen
- alles gedanklich, ohne Verwendung anschaulicher Hilfen
- Veranschaulichung als Vorstellung von Veränderungen einer Figur

Franke & Reinhold (2016, S. 68f)

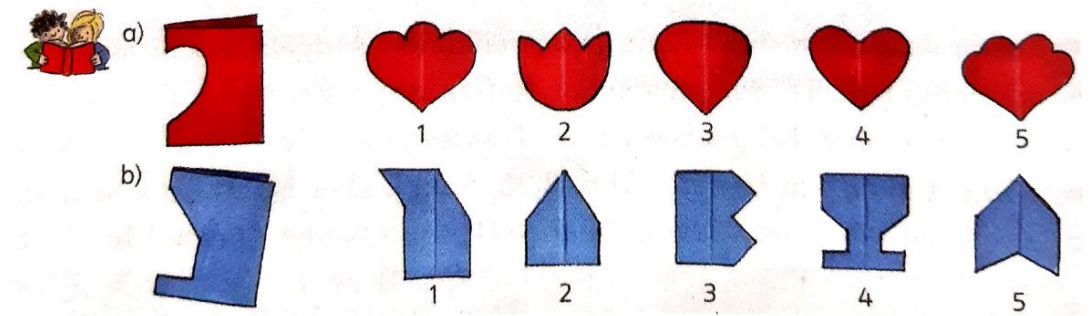
# Räumliches Vorstellungsvermögen

## Veranschaulichung

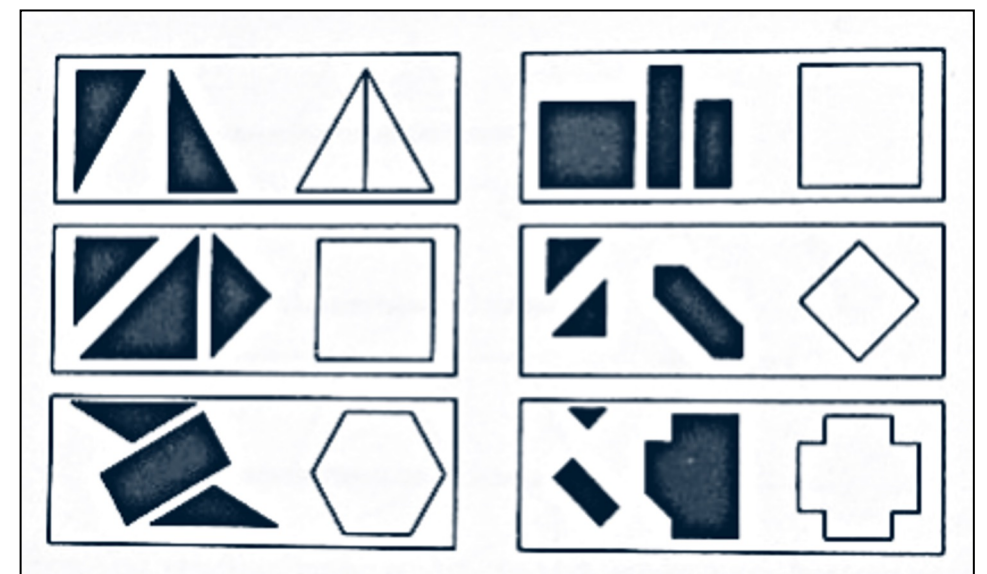
- Schneiden, klappen, falten in der Vorstellung
- Auslegen einer Figur mit Teilen

| In meiner Vorstellung<br>Ich befinde mich | ... bewege ich die Dinge nicht | ... bewege ich die Dinge                                                                                                                      |
|-------------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ... außerhalb der Situation               | Räumliche Beziehungen          | a) Veranschaulichung<br>(ich bewege Teile des Objekts)<br>b) Gedankliches Bewegen<br>(Mentale Rotation)<br>(ich bewege das Objekt als Ganzes) |
| ... in der Situation                      | Räumliche Wahrnehmung          | Räumliche Orientierung                                                                                                                        |

Welche Figur entsteht durch das Ausschneiden und Aufklappen?



Denken und Rechnen 3



Franke & Reinhold (2016, S. 68f)

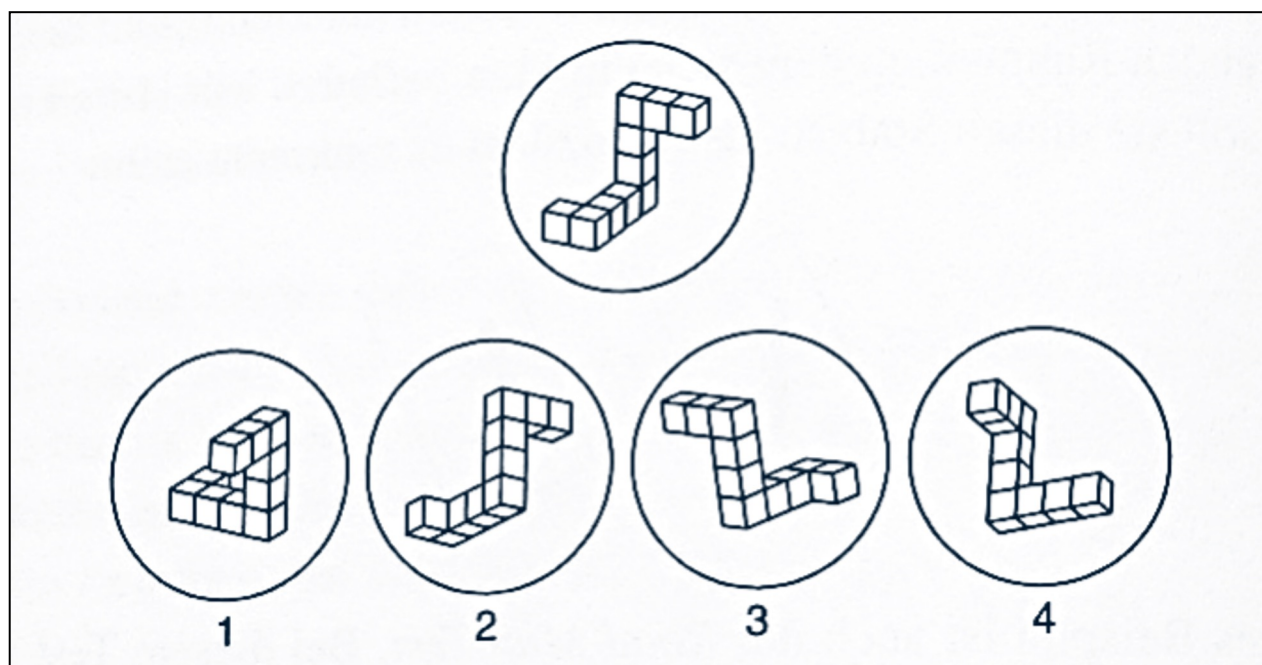
# Räumliches Vorstellungsvermögen

| In meiner Vorstellung<br>Ich befinde mich | ... bewege ich die Dinge<br>nicht | ... bewege ich die Dinge                                                                                                                         |
|-------------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ... außerhalb der Situation               | Räumliche Beziehungen             | a) Veranschaulichung<br>(ich bewege Teile des Objekts)<br>b) Gedankliches Bewegen<br>(Mentale Rotation)<br>(ich bewege das Objekt als<br>Ganzes) |
| ... in der Situation                      | Räumliche Wahrnehmung             | Räumliche Orientierung                                                                                                                           |

## Gedankliches Bewegen

(mentale Rotation)

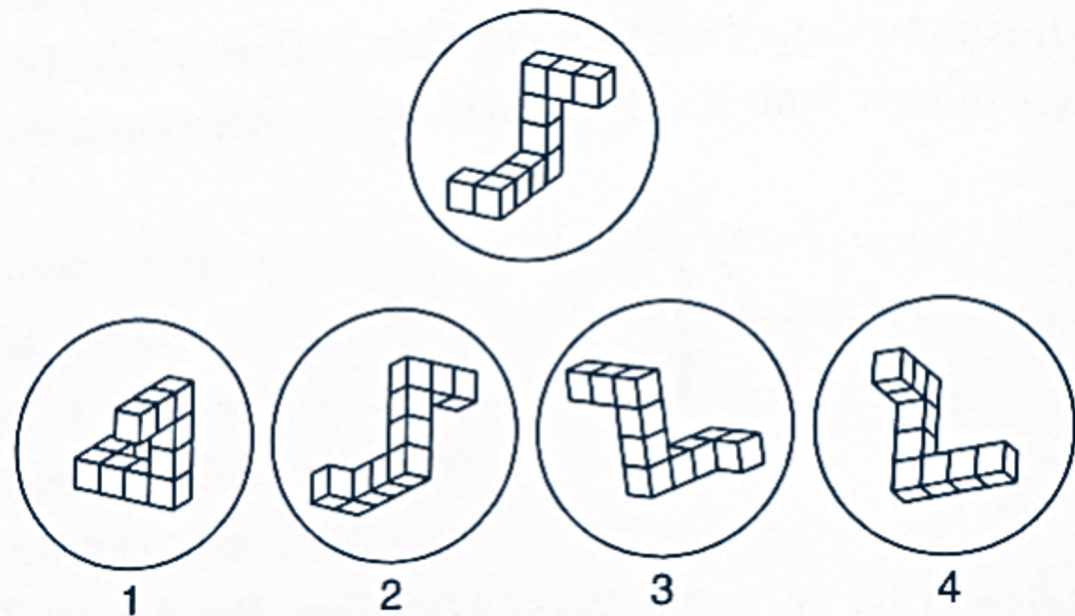
- Bezieht sich auf die Fähigkeit, sich Rotationen eines zwei- oder dreidimensionalen Objektes als Ganzes schnell und präzise vorstellen zu können.



Welche der unteren vier Figuren stimmen mit der Standardfigur überein?  
Begründen Sie!

Franke & Reinhold (2016, S. 68f)

# Räumliches Vorstellungsvermögen



Welche der unteren vier  
Figuren stimmen mit der  
Standardfigur überein?  
Begründen Sie!



<https://www.menti.com/wyb7sexwh8>

Go to [www.menti.com](https://www.menti.com) and use the code

**Welche der unteren vier Figuren  
der Standardfigur überein?**

# Räumliches Vorstellungsvermögen

| In meiner Vorstellung<br>Ich befinde mich | ... bewege ich die Dinge<br>nicht | ... bewege ich die Dinge                                                                                                                         |
|-------------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ... außerhalb der Situation               | Räumliche Beziehungen             | a) Veranschaulichung<br>(ich bewege Teile des Objekts)<br>b) Gedankliches Bewegen<br>(Mentale Rotation)<br>(ich bewege das Objekt als<br>Ganzes) |
| ... in der Situation                      | Räumliche Wahrnehmung             | Räumliche Orientierung                                                                                                                           |

## Räumliche Orientierung

- Beschreibt die Fähigkeit, die eigene Person gedanklich richtig in eine räumliche Situation einzuordnen, sich real und mental im Raum zurechtzufinden.
- Unterschied zur räumlichen Beziehung: eigener Standort liegt innerhalb der Aufgabensituation



Franke & Reinhold (2016, S. 70)

Denken und Rechnen 2, S. 53

# Räumliches Vorstellungsvermögen

|                                                                    |                                              |                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>In meiner Vorstellung</b></p> <p><b>Ich befinde mich</b></p> | <p><b>... bewege ich die Dinge nicht</b></p> | <p><b>... bewege ich die Dinge</b></p>                                                                                                                      |
| <p><b>... außerhalb der Situation</b></p>                          | <p>Räumliche Beziehungen</p>                 | <p>a) Veranschaulichung<br/>(ich bewege Teile des Objekts)</p> <p>b) Gedankliches Bewegen<br/>(Mentale Rotation)<br/>(ich bewege das Objekt als Ganzes)</p> |
| <p><b>... in der Situation</b></p>                                 | <p>Räumliche Wahrnehmung</p>                 | <p>Räumliche Orientierung</p>                                                                                                                               |

Selter & Zannetin (2019, S. 101)



# Umsetzung im Unterricht: Kopfgeometrie

Kopfgeometrie ist ein Mittel zur Schulung des räumlichen  
Vorstellungsvermögens im Unterricht

Die Kopfgeometrie umfasst alle mündlich (im Kopf) zu  
lösenden geometrischen Aufgaben, die das visuelle  
Wahrnehmungs- und das räumliche Vorstellungsvermögen  
schulen.

- **Vorstellung** der geometrischen Objekte
- **in der Vorstellung** mit den geometrischen Objekten  
**operieren**

„...das Operieren mit Bildern  
im Kopf.“ (Franke, 2007, S. 28)

Franke & Reinhold (2016, S. 109)

## Ein Beispiel

Stelle Dir vor: Auf dem Tisch liegen ein Rechteck, ein Kreis, ein Quadrat und ein Dreieck.

Der Kreis liegt links vom Rechteck.

Das Dreieck liegt zwischen dem Rechteck und dem Quadrat.

Das Quadrat liegt rechts außen.

In welcher Reihenfolge liegen die Figuren?

Franke & Reinhold (2016, S. 110)

**Achtung:** Inhaltlich ist  
Kopfgeometrie nicht mit  
Kopfrechnen zu vergleichen!

## Ein Beispiel

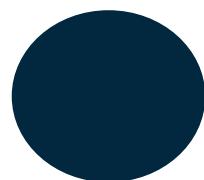
Stelle Dir vor: Auf dem Tisch liegen ein Rechteck, ein Kreis, ein Quadrat und ein Dreieck.

Der Kreis liegt links vom Rechteck.

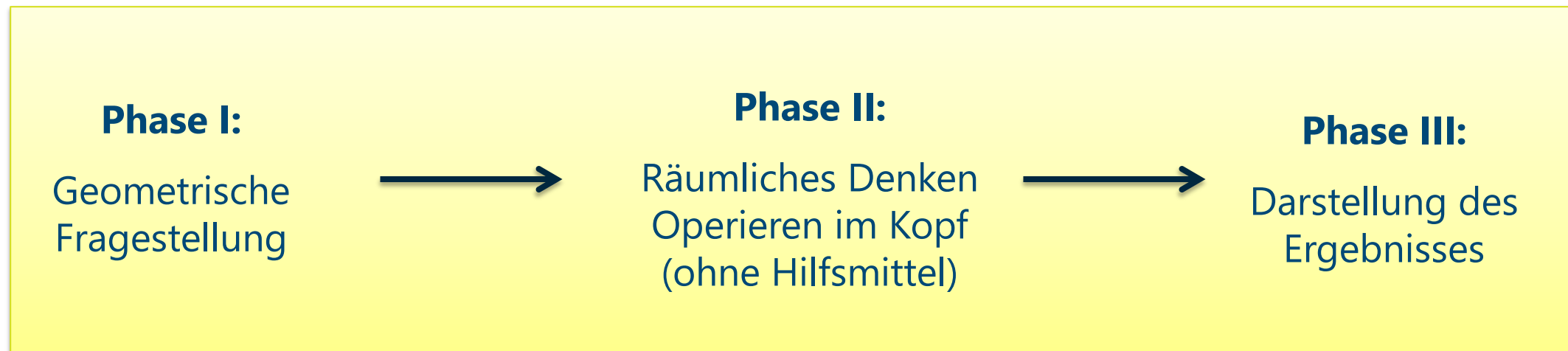
Das Dreieck liegt zwischen dem Rechteck und dem Quadrat.

Das Quadrat liegt rechts außen.

In welcher Reihenfolge liegen die Figuren?



Franke & Reinhold (2016, S. 110)



## Hilfestellungen

### **Denkbare Hilfen bei der Aufgabenstellung:**

- Abbildungen, Unterstützung mit den Händen, (Körper)Modelle

### **Denkbare Hilfen bei der Ergebnisdarstellung:**

- Auf- und Einzeichnen, Nachbauen, Unterstützung mit den Händen

Franke & Reinhold (2016, S. 110ff)

## Variation 1: **Reine Kopfgeometrie**

Lehrer verbalisiert  
geometrische  
Fragestellung



Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf



Schüler verbalisiert das  
Ergebnis seiner  
Überlegungen

Stelle Dir vor: Auf dem Tisch liegen ein Rechteck, ein Kreis, ein Quadrat und ein Dreieck.

Der Kreis liegt links vom Rechteck.

Das Dreieck liegt zwischen dem Rechteck und dem Quadrat.

Das Quadrat liegt rechts außen.

In welcher Reihenfolge liegen die Figuren?

Franke & Reinhold (2016, S. 110ff)

## Variation 1: **Reine Kopfgeometrie**

Lehrer verbalisiert  
geometrische  
Fragestellung



Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf



Schüler verbalisiert das  
Ergebnis seiner  
Überlegungen

## Variation 2: **Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in Phase I**

Lehrer erläutert seine  
Fragestellung unter  
Zuhilfenahme seiner Hände,  
einer Zeichnung oder eines  
Modells

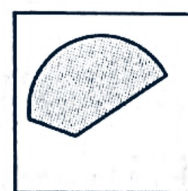
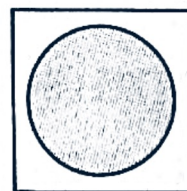


Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf

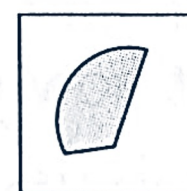


Schüler verbalisiert das  
Ergebnis seiner  
Überlegungen

Aus welchen Teilen kannst du die Figur auf der  
linken Seite zusammensetzen? Begründe!



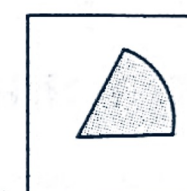
a



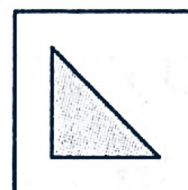
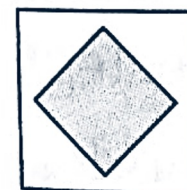
b



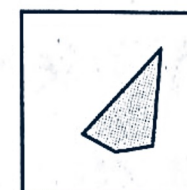
c



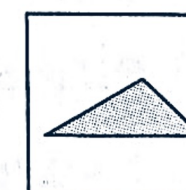
d



e



f



g



h

Franke & Reinhold (2016, S. 111)

## Variation 1: **Reine Kopfgeometrie**

Lehrer verbalisiert  
geometrische  
Fragestellung



Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf



Schüler verbalisiert das  
Ergebnis seiner  
Überlegungen

## Variation 2: **Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in Phase I**

Lehrer erläutert seine  
Fragestellung unter  
Zuhilfenahme seiner Hände,  
einer Zeichnung oder eines  
Modells



Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf



Schüler verbalisiert das  
Ergebnis seiner  
Überlegungen

## Variation 3: **Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in Phase III**

Lehrer verbalisiert  
geometrische  
Fragestellung



Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf

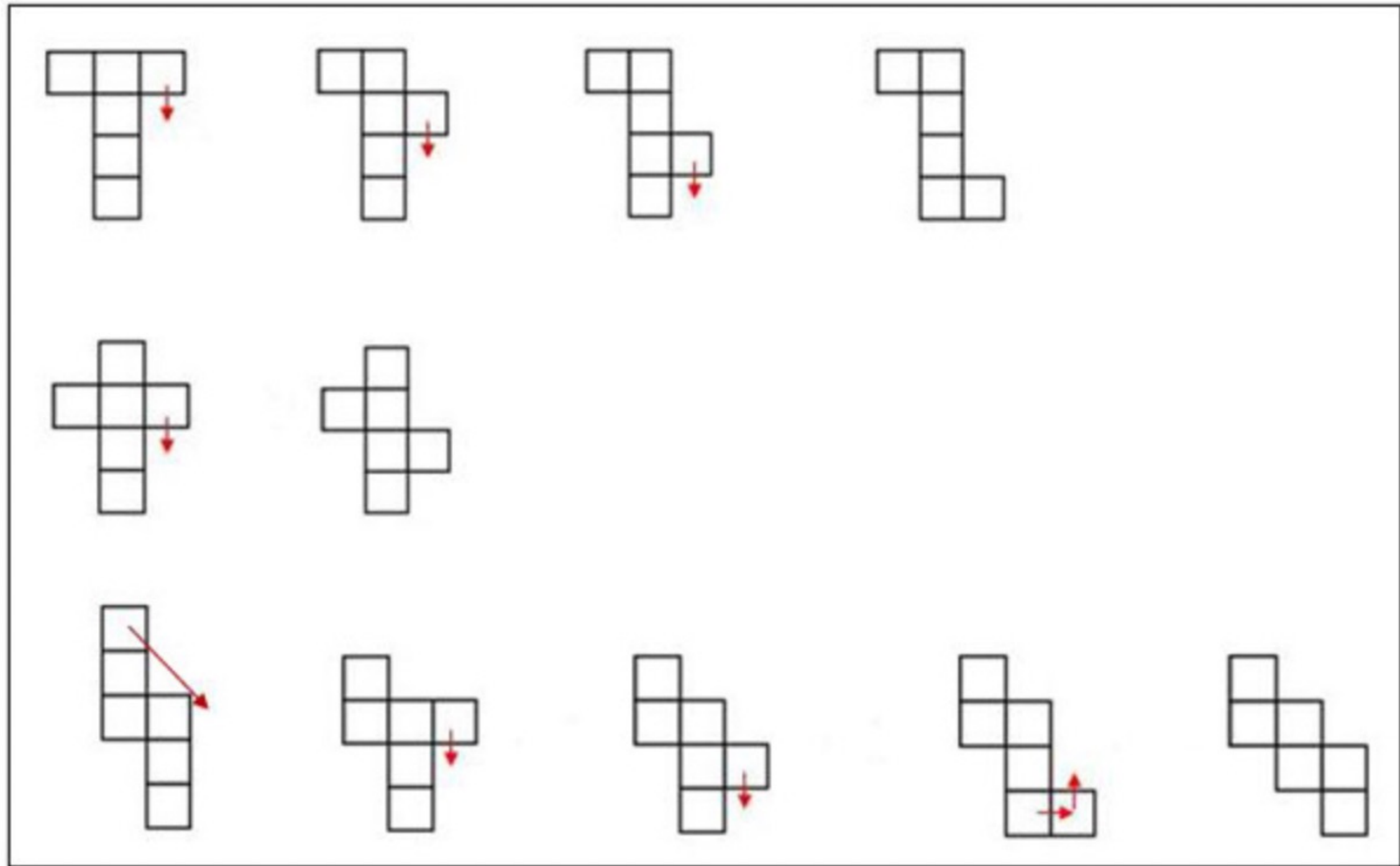


Schüler erläutert sein  
Ergebnis unter  
Zuhilfenahme seiner  
Hände, einer Zeichnung  
oder baut das Ergebnis  
nach

Wie ihr wisst, hat ein Würfel sechs quadratische Flächen. Wir wollen überlegen, wie die Netze eines Würfels aussehen, wenn ich den Würfel entlang seiner Kanten zerschneide. Versucht mit Nachdenken so viele verschiedene Würfelnetze wie möglich zu finden. Zum Beschreiben eurer Lösungen habe ich euch quadratische Pappstückchen mitgebracht.

Lösen Sie die Aufgabe.

Franke & Reinhold (2016, S. 112)



## Variation 1: **Reine Kopfgeometrie**

Lehrer verbalisiert  
geometrische  
Fragestellung



Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf



Schüler verbalisiert das  
Ergebnis seiner  
Überlegungen

## Variation 2: **Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in Phase I**

Lehrer erläutert seine  
Fragestellung unter  
Zuhilfenahme seiner Hände,  
einer Zeichnung oder eines  
Modells



Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf



Schüler verbalisiert das  
Ergebnis seiner  
Überlegungen

## Variation 3: **Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in Phase III**

Lehrer verbalisiert  
geometrische  
Fragestellung



Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf



Schüler erläutert sein  
Ergebnis unter  
Zuhilfenahme seiner  
Hände, einer Zeichnung  
oder baut das Ergebnis  
nach

## Variation 4: **Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in Phase I und III**

Lehrer erläutert seine  
Fragestellung unter  
Zuhilfenahme seiner Hände,  
einer Zeichnung oder eines  
Modells



Räumliches Denken,  
Vorstellen, Operieren im  
Kopf



Schüler erläutert sein  
Ergebnis unter  
Zuhilfenahme seiner  
Hände, einer Zeichnung  
oder baut das Ergebnis  
nach

Franke & Reinhold (2016, S. 110ff)

## Kopfgeometrie kann dazu beitragen,

- dass geometrische **Fachbegriffe** und deren **Eigenschaften** gefestigt werden;
- dass das **Sprach- und Ausdruckvermögen** der Schülerinnen und Schüler geschult werden;
- dass **Kommunikation- und Kooperationskompetenzen** gefördert werden;
- dass die Fähigkeit der **exakten Beschreibung** und Wiedergabe geometrischer Gebilde, Beziehungen und Zustände entwickelt wird;
- dass die **Konzentrationsfähigkeit** der Schülerinnen und Schüler wesentlich gestärkt wird;
- dass Schülerinnen und Schüler wieder **Spaß und Freude** am Geometrieunterricht bekommen.

Franke & Reinhold (2016, S. 110)



# Exkurs: 3D-Druck

# Exkurs: 3D-Druck

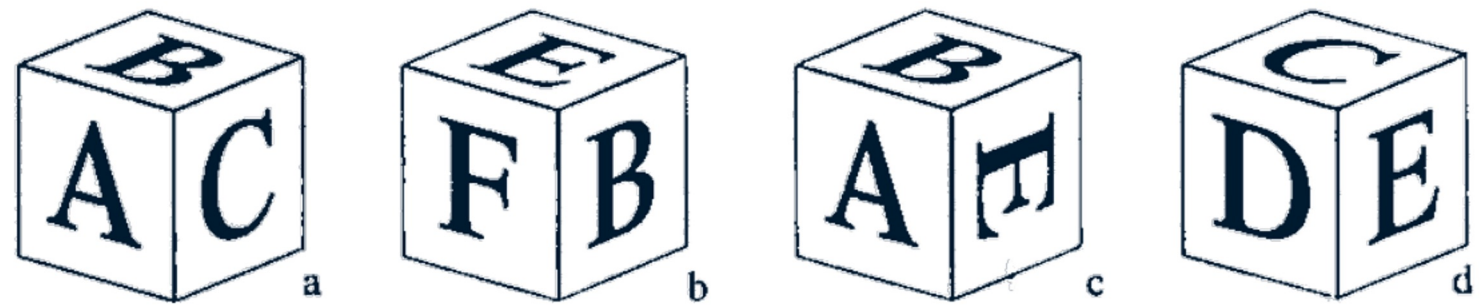
**3D-Druck** (additive Fertigung):  
Fertigungsverfahren, bei dem  
Material Schicht für Schicht  
aufgetragen wird und  
so dreidimensionale Gegenstände  
(Werkstücke) erzeugt werden.



Abbildungsquelle: <https://www.prusa3d.com/de/>

# Exkurs: 3D-Druck

Drei der vier Schrägbilder zeigen denselben Würfel.  
Welches Bild zeigt einen anderen?



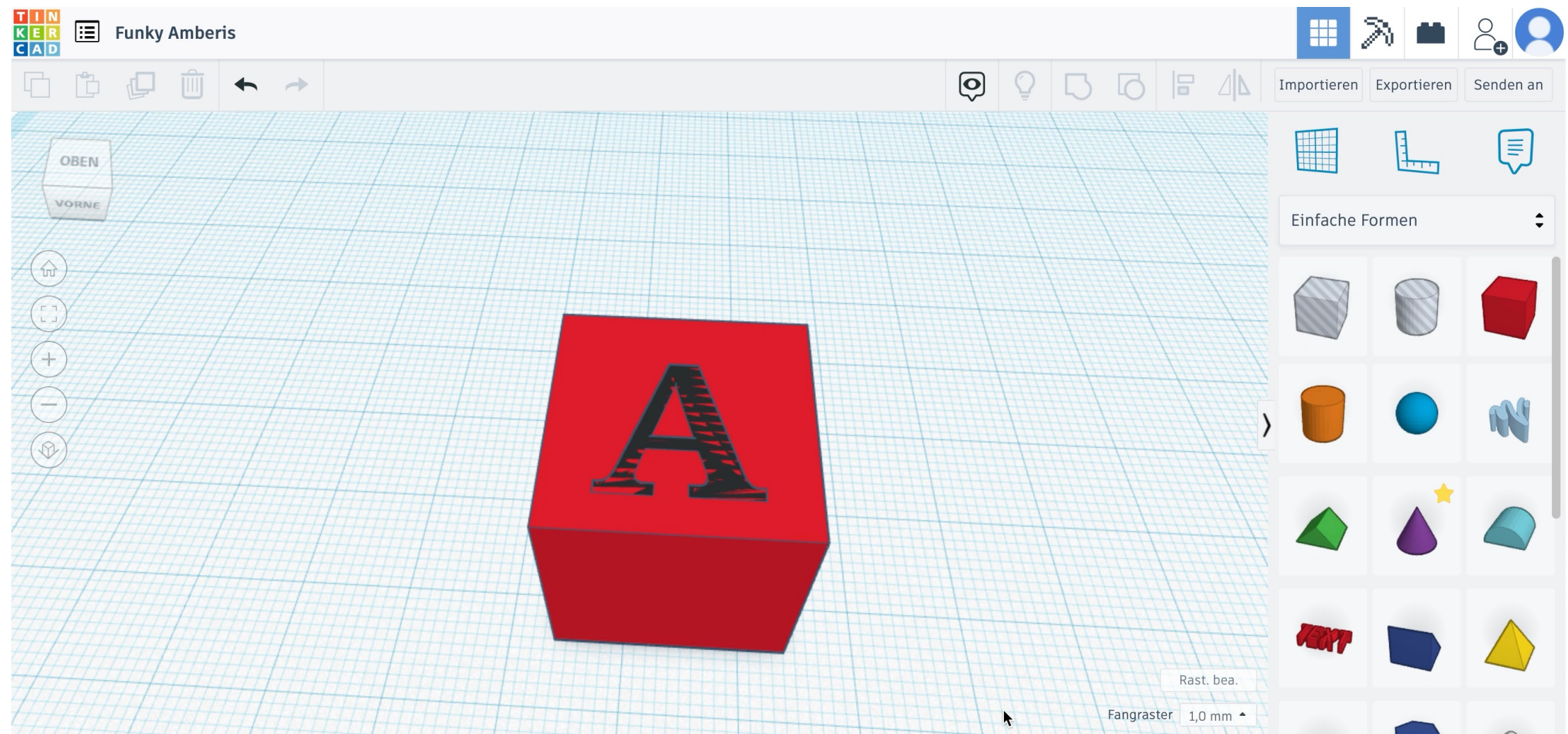
Bauen Sie den Würfel in Tinkercad nach.

<https://www.tinkercad.com/>

## Hinweise:

- Bitte höchstens 3cm Seitenlänge (ideal: **2cm**).
- Falls Sie Erhebungen einbauen: bitte höchstens 1mm hoch, Vertiefungen 1-2mm.
- Bitte ihre **Gruppennummer** klein an einer Seite des Würfels einfügen.
- Exportieren Sie die Datei als **.STL-Datei** mit folgendem Namen:  
**[Gruppennummer]-[Wunschfarbe].stl**, also z.B. „1-blau.stl“ und laden Sie die Datei in den **Ordner „3D-Druck“ in Teams** hoch (folgende Farben stehen zur Auswahl: blau, gelb, rot).

# Einschub: Bohrung



- Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*, Heidelberg, Spektrum Verlag
- Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.
- Grüßing, M. (2002). Wieviel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben? *ZDM*, 34 (2): 37 – 45.
- Lüken, M. M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann Verlag.
- Maier, P. H. (1996). Räumliches Vorstellungsvermögen im Geometrieunterricht. *Praxis Schule 5-10*: 22 – 27
- Selter, C. & Zannetin, E. (2019). *Mathematik unterrichten in der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.
- Wollring, B. (2011): Raum- und Formvorstellung. *Mathematik differenziert*, 1-2011: 9 – 11

## Ich kann...

- ☐ die 6 Komponenten visueller Wahrnehmung benennen und beschreiben.
- ☐ die 4 Komponenten der Raumvorstellung benennen und beschreiben.
- ☐ erläutern, welche Komponenten der visuellen Wahrnehmung und der Raumvorstellung ein Kind benötigt, um eine bestimmte Aufgabe lösen zu können.
- ☐ an einem Beispiel erläutern, was Kopfgeometrie ist.
- ☐ die 4 Variationen von Kopfgeometrieaufgaben nennen und beschreiben sowie Aufgabenbezogen denkbare Hilfestellungen nennen.
- ☐ Potenziale des Einsatzes Kopfgeometrischer Aufgaben nennen.
- ☐ erläutern, worin sich Kopfgeometrie und Kopfrechnen unterscheiden.
- ☐ Aufgaben zur Förderung räumlicher Fähigkeiten lösen und angewendete Lösungsstrategien beschreiben und reflektieren.

**Vielen Dank** für Ihre Aufmerksamkeit und Mitarbeit  
und bis nächsten Dienstag!

