

Didaktik der Mathematik in der Primarstufe III

Didaktik der Geometrie

04 - Zeichnen und Konstruieren

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Melanie Platz

Themenübersicht

Der dreidimensionale Anschauungsraum wird von Formgebilden unterschiedlicher Dimension bevölkert (Punkte, Linien, Flächen und Körper), die sich auf vielfältige Weise konstruktiv erzeugen lassen.



Datum	Nr.	Thema	Grundidee
11.04.23	01	Organisatorisches & Einführung	
18.04.23	02	Entwicklung räumlicher Fähigkeiten	
25.04.23	03	Geometrische Begriffe und Wissenserwerb	
02.05.23	04	Zeichnen und Konstruieren	Formen und ihre Konstruktion
09.05.23	05	Ebene Figuren I	
16.05.23	06	Ebene Figuren II & Räumliche Objekte	
23.05.23	07	Symmetrie I (Kongruenzabbildungen)	Operieren mit Formen
30.05.23	08 (entfällt)	--	
06.06.23	09	Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette)	
13.06.23	10	Falten	Maße und Formeln
20.06.23	11	Längen, Flächen und Volumina I	
27.06.23	12	Längen, Flächen und Volumina II	Geom. Gesetzm. & Muster
04.07.23	13	Pläne & Maßstäbe, Wiederholung & Fragen I	Koordinaten
11.07.23	14 (online)	Wiederholung & Fragen II	
18.07.23	15	Klausur	

Einstimmung

- Zeichnen ist eine spezielle Form des Darstellens geometrischer Objekte
- **Projektion räumlicher Objekte in die Ebene, aber trotzdem erkennt man sie als räumliche Objekte**
- ebenfalls Darstellung ebener Figuren
- Realistisches Zeichnen – Geometrisches Zeichnen

Realistisches Zeichnen – Geometrisches Zeichnen

Realistisches Zeichnen

- Gegebenheiten möglichst originalgetreu wiedergeben
- bedeutsam in der Grundschule
- Herausforderungen:
 - Motorik
 - zielgerichtetes Wahrnehmen
 - Darstellen von Wahrgenommenem im Bild



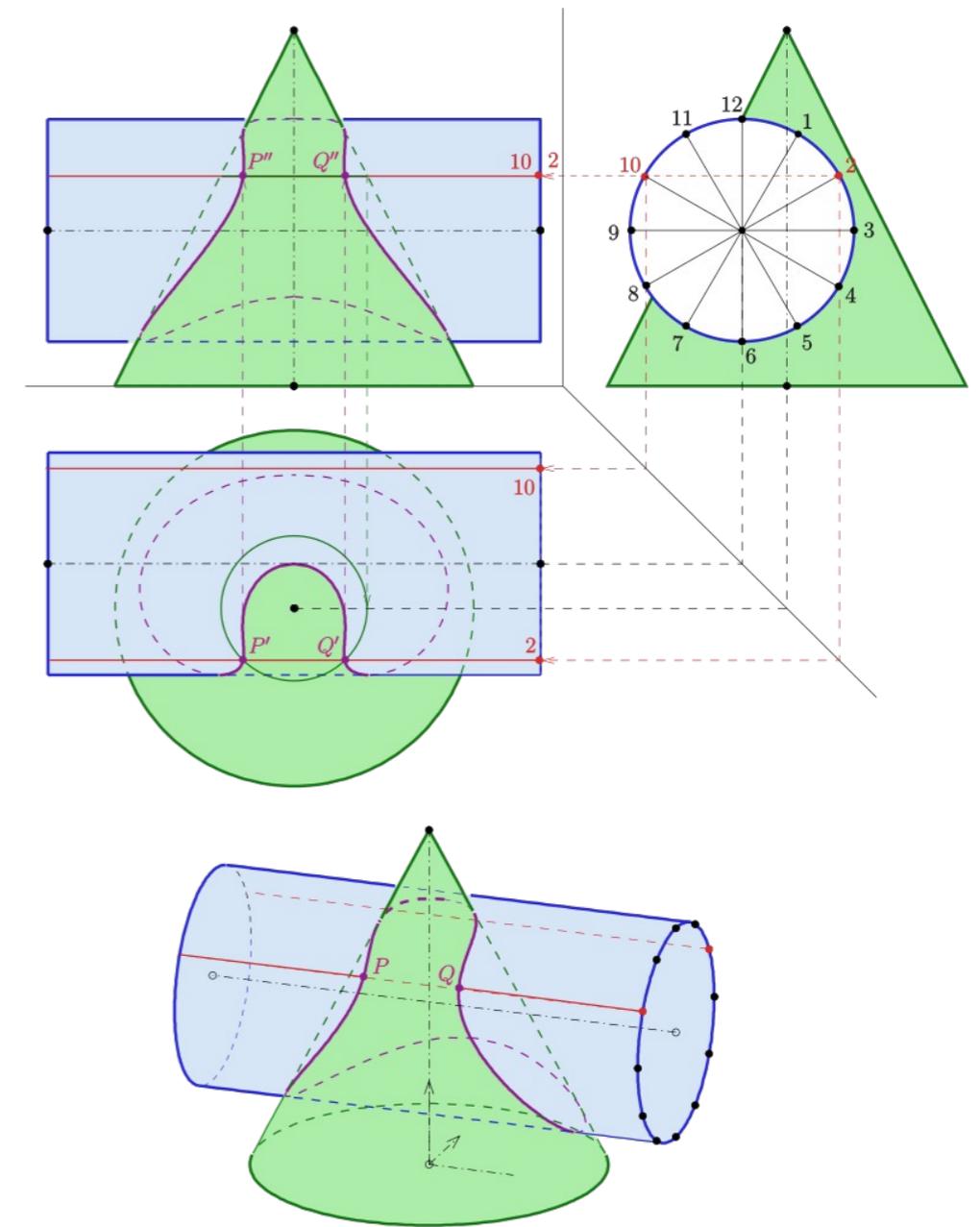
Abbildungsquelle: Kleine Vogel-Wunderkammer. Umschlagvorderseite, Bild von Jesko Donst.

Franke & Reinhold, 2016. S. 326

Realistisches Zeichnen – Geometrisches Zeichnen

Geometrisches Zeichnen

- Aufnahme möglichst vieler Informationen in die Zeichnung
- Nutzung von Konstruktionsverfahren
- Stichwort Parallelprojektion



Franke & Reinhold, 2016. S. 326f;
Helmerich & Lengnink, 2016, S. 201f

Zeichnen und Konstruieren

- Stufen der zeichnerischen Entwicklung
- Projektionen
- Umsetzung im Unterricht
- Zeichnen ebener Figuren
- Konstruieren und Zeichnen

*Mit Inhalten von Dr. Anna--Marietha Vogler, Dr. Eva Hoffart, Prof. Dr. Andreas Obersteiner
u.a.*

Ich kann...

- dreidimensionale Objekte mit Projektionen (insbesondere Dreitafelprojektion und Schrägbilder) darstellen und konstruieren.
- Eigenschaften sowie Vor- und Nachteile verschiedener Darstellungen nennen.
- Zeichenhilfen zur räumlichen Darstellung geometrischer Körper im Geometrieunterricht sowie deren Potenziale und Grenzen nennen.
- Konsequenzen für den Geometrieunterricht ableiten.
- Arten des Zeichnens ebener Figuren beschreiben und Zeichenwerkzeuge der Grundschule charakterisieren.
- Konstruieren und Zeichnen charakterisieren.
- Grund- und Standardkonstruktionen mit Zirkel und Lineal nennen, erzeugen und passende Konstruktionsbeschreibungen anfertigen sowie lesen und realisieren.
- Aspekte zur didaktischen Bedeutung von Konstruktionsaufgaben und des Anfertigens von Konstruktionsbeschreibungen nennen.
- Baupläne von Würfelgebäuden anfertigen, lesen und realisieren.

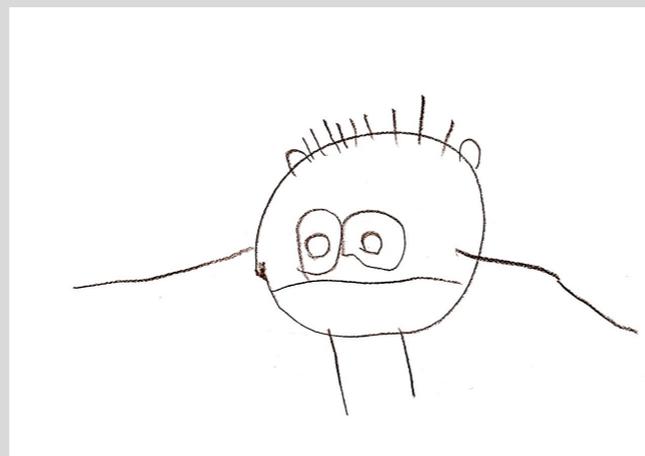
Stufen der zeichnerischen Entwicklung

- Stufenmodell
- Perspektivisches Zeichnen
- Zeichnen geometrischer Körper auf Kästen-/Gitterpapier
- Freihandzeichnung

Stufen der zeichnerischen Entwicklung

- Untersuchung von freien Kinderzeichnungen
- Kennzeichnung von Stufen zeichnerischer Entwicklung
- Ordnung und Zusammenfassung von Einzelphänomenen
- Das Stufenmodell
 1. Kritzelphase
 2. Übergangsphase zu Darstellungen
 3. Erste Schemaphase
 4. Zweite Schemaphase
 5. Auflösung des Schemabildes

Stufen der zeichnerischen Entwicklung



1. Kritzelpphase: Urknäuel, noch keine Formen/Gegenstände erkennbar

2. Übergangsphase: Kritzelp werden zu ersten Darstellungen kombiniert, typisch „Kopffüßler“

3. Erste Schemaphase: Richtungsdifferenzierung, Röntgenbilder, Bedeutungsgröße, Detailreichtum, Prägnanztendenz

Franke & Reinhold, 2016. S. 328f

Stufen der zeichnerischen Entwicklung



4. Zweite Schemaphase: Mehr Details, andere Motivwahl, analoge Darstellungen des gesamten Bildes

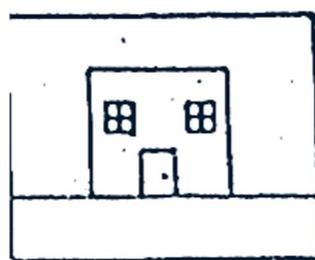


5. Auflösung des Schemabildes: Nicht mehr nur naturgetreu, Übertreibungen, Karikatur, andere Gestaltungsmittel

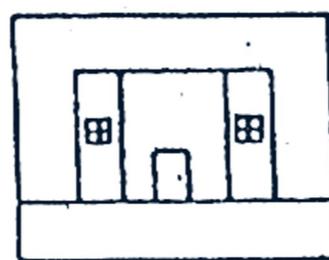
Franke & Reinhold, 2016. S. 329

Perspektivisches Zeichnen

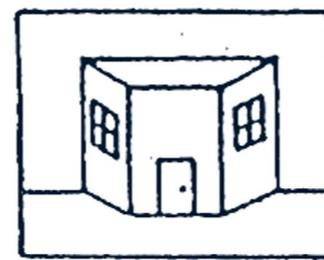
- In der zweiten Schemaphase bemühen sich Kinder um ein realistisches Gestaltungskonzept
- Problem: Wie soll auf einem zweidimensionalen Zeichenblatt Tiefe dargestellt werden?
- Auch hier verschiedene Entwicklungsstadien (Lewis, 1963)



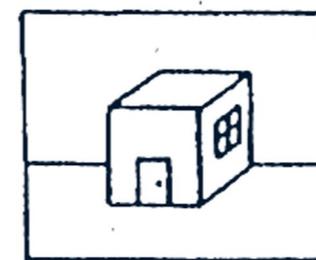
I
eben-schematisch



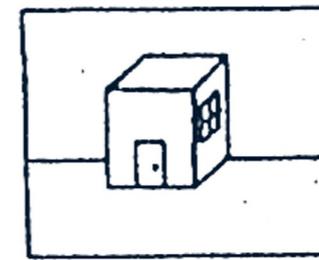
II
massiv-schematisch



III



IV
prärealistisch



V
realistisch

- Verdeckungen als Mittel zur Tiefendarstellung, Weglassen nicht sichtbarer Teile

Franke & Reinhold, 2016. S. 329ff

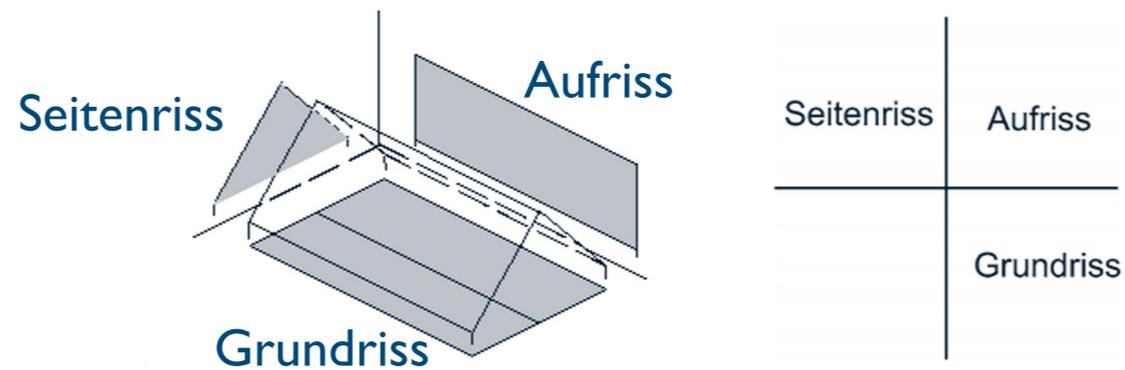
EIMa WiSe
21/22

Projektionen

- Dreitafelprojektion
- Parallelprojektion
- Zentralprojektion

- **Projektionen bilden den dreidimensionalen Körper in die zweidimensionale Zeichenebene ab.**
- Solche Darstellungen sollen **anschaulich** sein, d. h. das Bild soll eine gute Anschauung des Körpers vermitteln und helfen, eine räumliche Vorstellung aufzubauen.
- Die Darstellung soll möglichst **maßgerecht** sein, d. h. die zwangsläufig auftretenden „Verzerrungen“ sollen die Gesamtproportionen nicht unnötig entstellen und nach gewissen Regeln „gleichförmig“ vollziehen, außerdem sollen möglichst viele andere Größen „in wahrer Größe“ dargestellt werden

Dreitafelprojektion



Definition: Grundriss

Als Grundriss (oder Draufsicht) bezeichnet man die zweidimensionale Darstellung eines waagerechten Schnittes durch ein geometrisches Objekt oder ein Gebäude, zumeist auf Bodenebene. Anschaulich gesprochen ist es die Ansicht des Objekts, die sich aus einer Sicht direkt von oben auf das Objekt ergibt.

Definition: Aufriss

Der Aufriss (die Vorderansicht) zeigt das Objekt in einer zweidimensionalen Darstellung in seiner Ansicht direkt von vorne, abgebildet auf eine senkrecht stehende Projektionsfläche.

Definition: Seitenriss

Als Seitenriss (oder Seitenansicht) wird die Ansicht des Objekts von der Seite bezeichnet und ergibt sich aus der Ansicht aus der nach Grundriss und Aufriss noch fehlenden Raumrichtung.

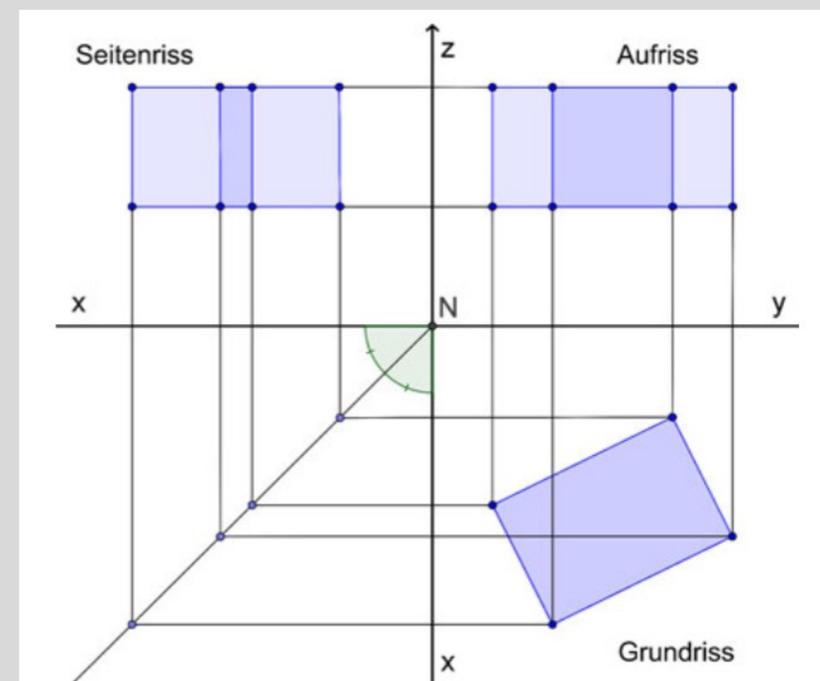
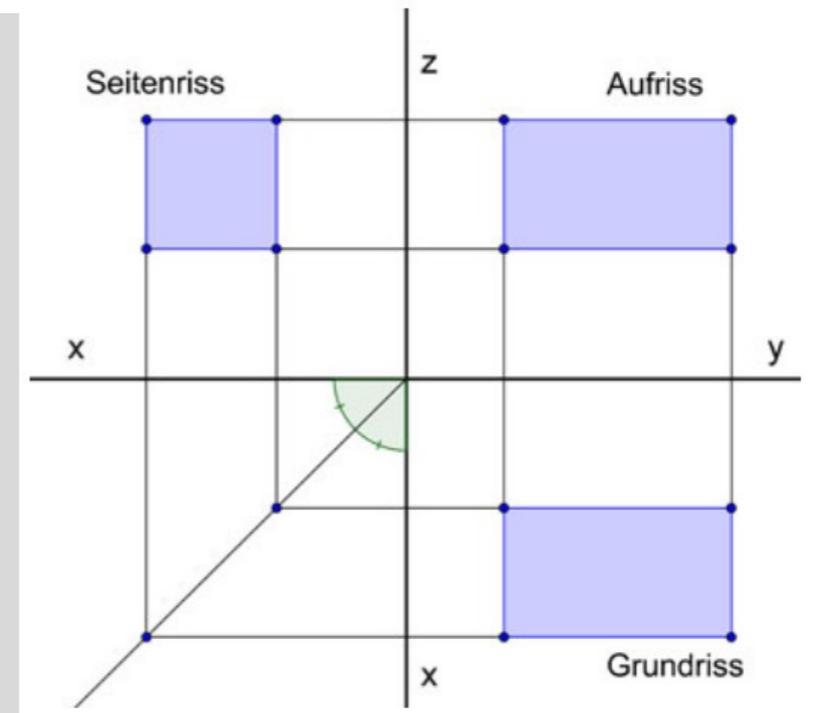
Helmerich & Lengnink, 2016. S. 206

Dreitafelprojektion

Eigenschaften

- Alle ebenen Figuren, die zu der betreffenden Projektionsebene parallel sind, werden wieder in wahrer Größe dargestellt.
- Zur Projektionsebene senkrechte Strecken werden bei einer senkrechten Projektion im Projektionsbild nicht mehr sichtbar, sondern auf einen Punkt projiziert.

Helmerich & Lengnink, 2016. S. 206ff

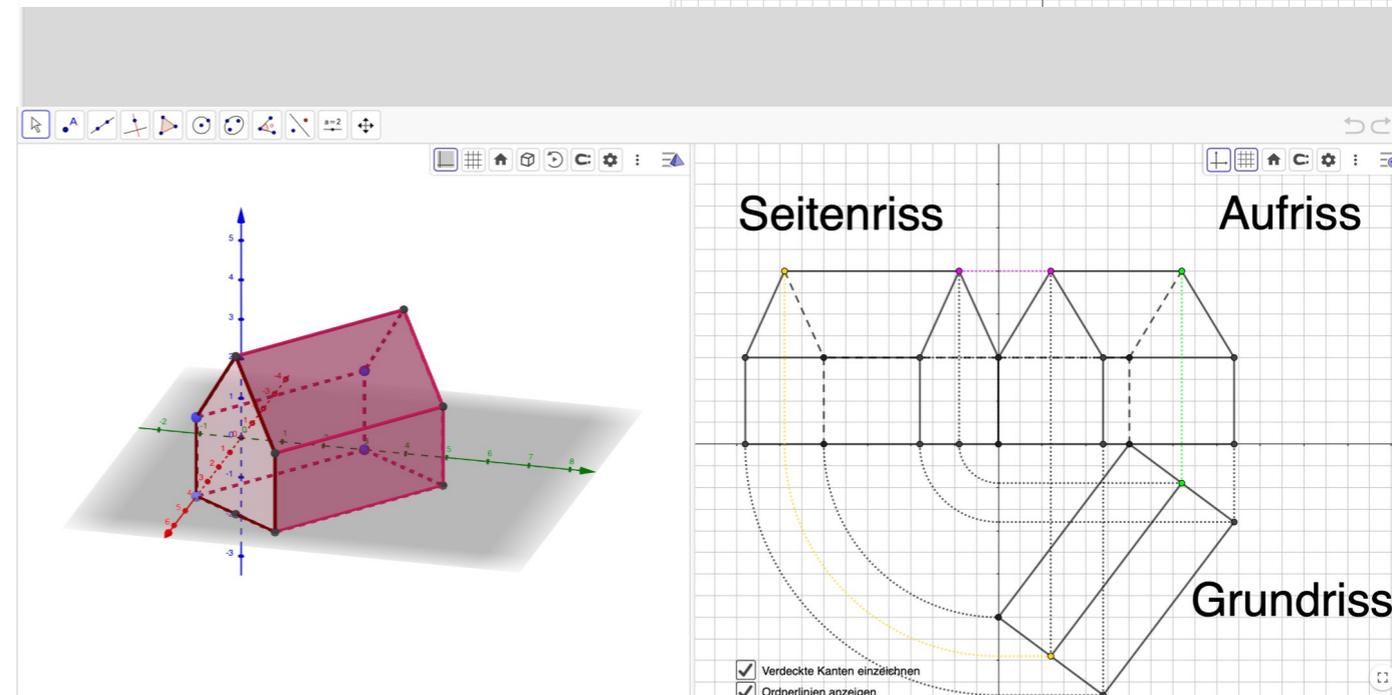
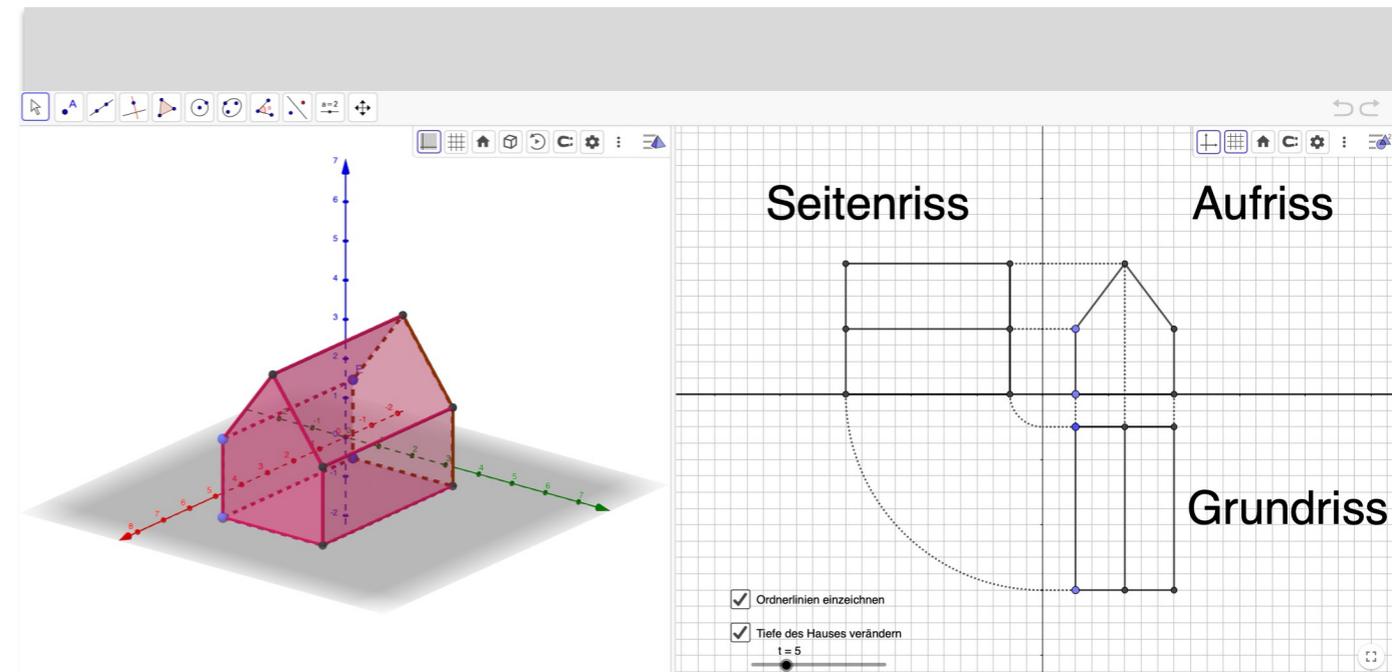


Dreitafelprojektion

Eigenschaften

- Alle ebenen Figuren, die zu der betreffenden Projektionsebene parallel sind, werden wieder in wahrer Größe dargestellt.
- Zur Projektionsebene senkrechte Strecken werden bei einer senkrechten Projektion im Projektionsbild nicht mehr sichtbar, sondern auf einen Punkt projiziert.

Helmerich & Lengnink, 2016. S. 206ff



<https://www.geogebra.org/m/h7dveghj>

Parallelprojektionen

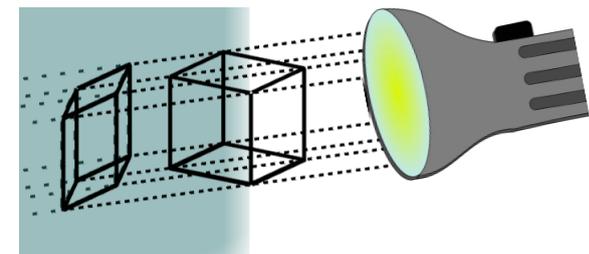
Etwas weniger anschaulich als die Dreitafelprojektion, aber dafür weitgehend maßgerecht, d. h. geraden-, teilverhältnis- und parallelentreu, teilweise werden sogar Längen und Winkel in wahrer Größe wiedergegeben. Zudem ist die Konstruktion mit einfachen Mitteln auszuführen.

- Die Parallelprojektion gilt als Grundlage der meisten Konstruktionsverfahren.
- Bei der Parallelprojektion sind die Abbildungsstrahlen **parallel**.
- Zueinander parallele Strecken, die nicht in der Projektionsrichtung liegen, werden als parallele Strecken verkürzt abgebildet.
- Projektionsformen
 - **Schrägbilder** (auch: Eintafelprojektion; die Strahlen projizieren das Kantenmodell des Körpers nicht senkrecht auf die Projektionsebene, sondern in einem „schrägen“ Winkel)

Übung 4

- **Kavalierprojektion** (Frontschau)
- **Isometrische Darstellung in Parallelprojektion**
- **Militärprojektion** (Vogelschau)

Die Projektionsstrahlen verlaufen nicht senkrecht, sondern in einem bestimmten Winkel ungleich 90° zur Projektionsfläche.



Kavalierprojektion (Frontschau)

Eigenschaften

- Alle ebenen Figuren, die parallel zur Aufrissebene (Projektionsebene) sind, werden durch die Kavalierprojektion in wahrer Größe (maßgerecht) abgebildet.
- Alle Elemente und Strecken des Körpers, die senkrecht zur Projektionsebene liegen – aber durch das schräge Auftreffen der parallelen Projektionsstrahlen doch im Aufriss sichtbar werden –, werden mit einem

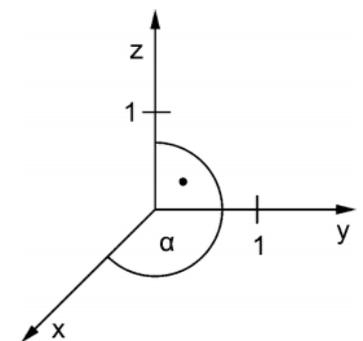
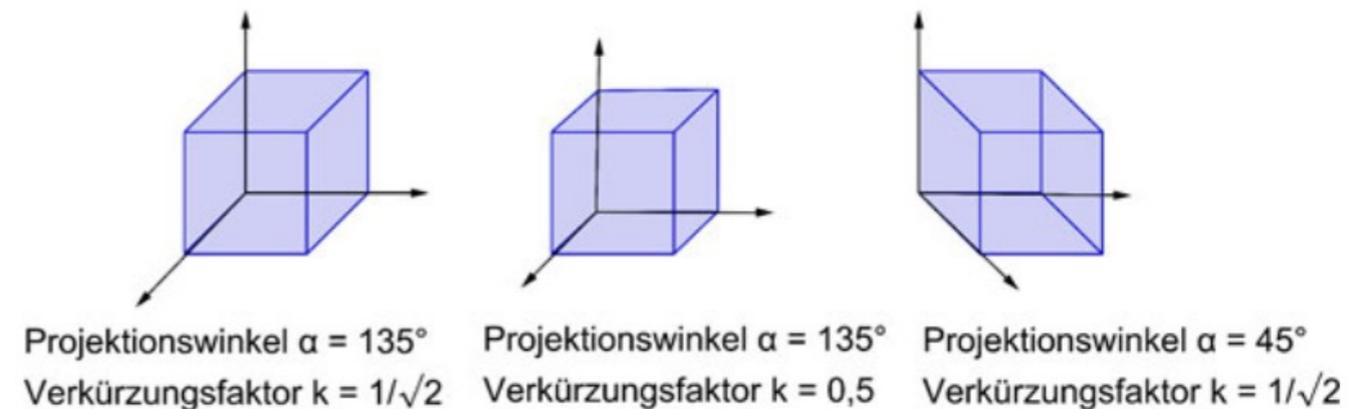
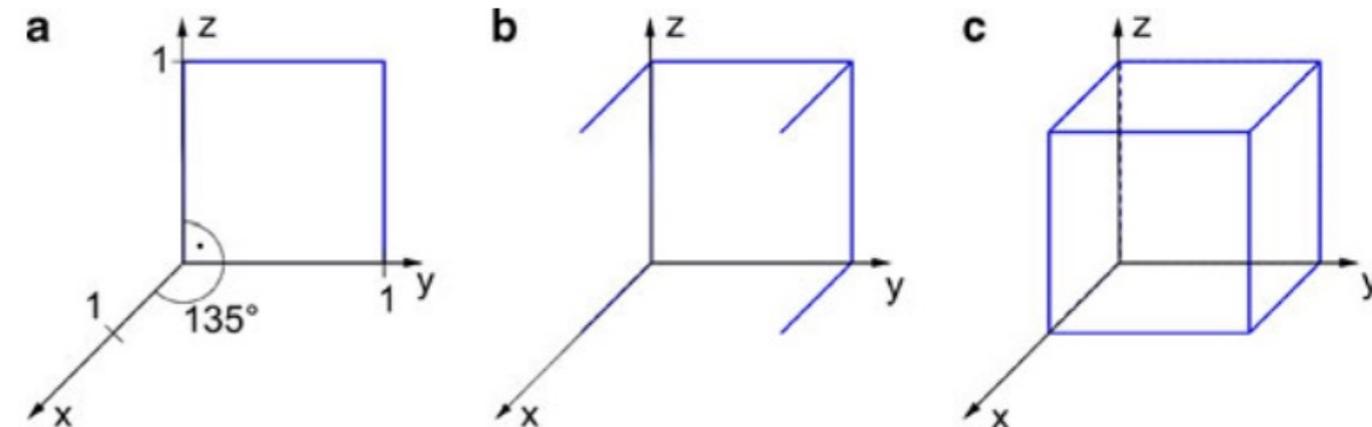
Verkürzungsfaktor k dargestellt.

Für eine besonders anschauliche und gelungene Kavalierprojektion wird als Verkürzungsfaktor $k = 1/2$ oder $k = 1/\sqrt{2}$ empfohlen (Projektionswinkel: 45° bzw. 135°). (Als Verkürzungsfaktor kann jede beliebige positive reelle Zahl gewählt werden, im Ergebnis werden dann aber die Proportionen des Körpers evtl. nur noch sehr verzerrt wiedergegeben.)

Helmerich & Lengnink, 2016. S. 210ff

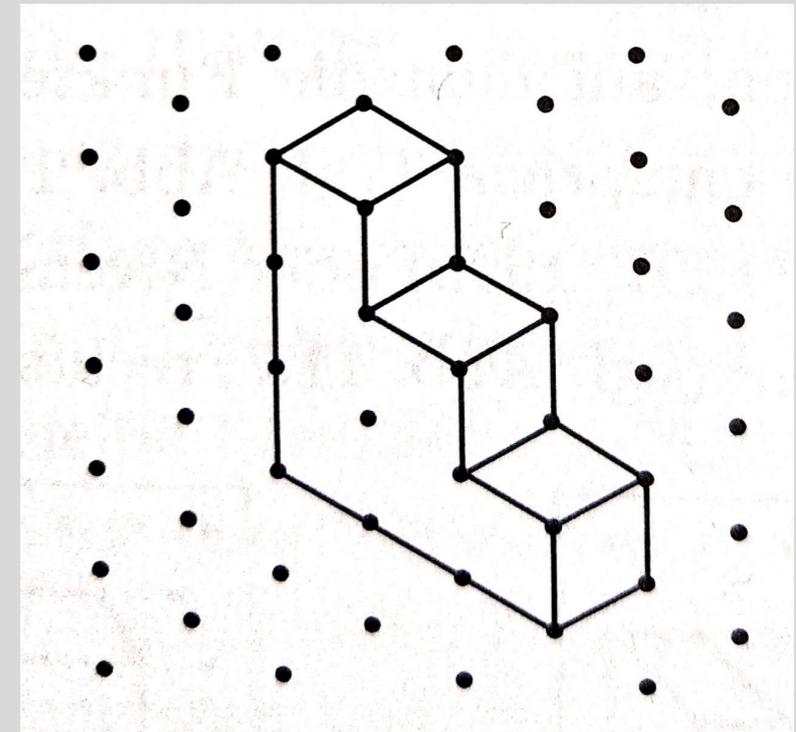
Warum $k=1/\sqrt{2}$?

Projektionsdreibein



Eigenschaften

- Kanten, die am räumlichen Objekt gleich lang sind, werden auch hier gleich lang (isometrisch) dargestellt.
- Führt bspw. in der Darstellung von Würfeln und Quadern dazu, dass die quadratischen oder rechteckigen Flächen sowie auch die am Objekt feststellbaren rechten Winkel verzerrt dargestellt werden.



Militärprojektion (Vogelschau)

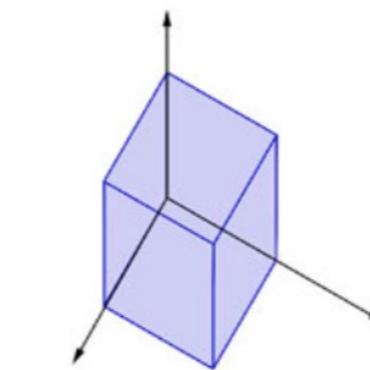
Eigenschaften

- Alle zur Projektionsebene (Grundrissebene) parallelen ebenen Figuren werden in wahrer Größe dargestellt.
- Alle zur Projektionsebene (Grundrissebene) senkrecht stehenden Streckenelemente werden mit einem

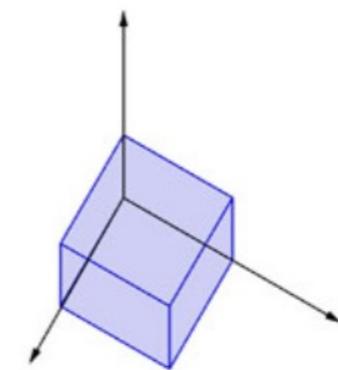
Verkürzungsfaktor abgebildet.

Für anschauliche gute Militärprojektionen empfiehlt sich der Einsatz eines Projektionswinkels von 60° oder 120° und eines Verkürzungsfaktors von $k=1/2$, $k=1/3$ oder $k=1$.
(Ein Verkürzungsfaktor $k=1$ bedeutet, dass die zur Projektionsfläche senkrecht stehenden Strecken in Richtung der z-Achse mit dem Faktor 1 multipliziert werden, also nichts verkürzt wird!)

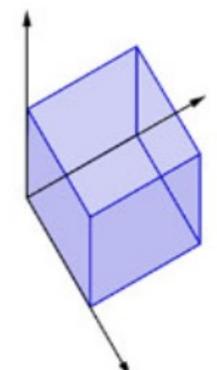
Helmerich & Lengnink, 2016. S. 213ff



Projektionswinkel $\alpha = 120^\circ$
Verkürzungsfaktor $k = 1$

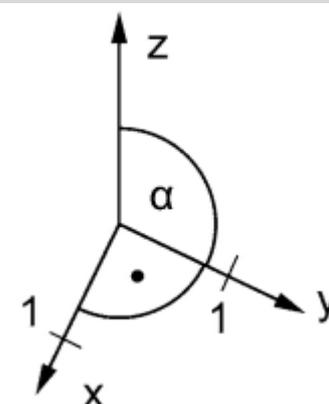


Projektionswinkel $\alpha = 120^\circ$
Verkürzungsfaktor $k = 0,5$



Projektionswinkel $\alpha = 60^\circ$
Verkürzungsfaktor $k = 1/\sqrt{2}$

Projektionsdreibein



Vor- und Nachteile

Die Darstellung in Kavalierprojektion bietet den Vorteil, dass die frontale Seitenansicht eines Würfels auch tatsächlich quadratisch erscheint.

- Bei der Kavalier- und Militärprojektion entsteht eher ein räumlicher Eindruck des Körpers als bei der Dreitafelprojektion, dafür werden einige Strecken nicht maßgerecht, sondern verkürzt dargestellt.
- Die Kavalierprojektion liefert gute Darstellungen von Körpern und ihrer „Fassade“ in „wahrer Größe“, während die Militärprojektion vorzuziehen ist, wenn man vor allem an einem maßgerechten Grundriss interessiert ist.

Helmerich & Lengnink, 2016. S. 215

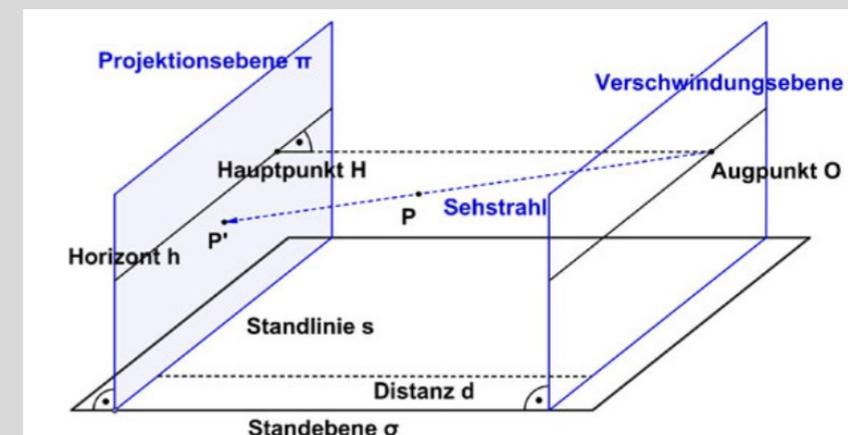
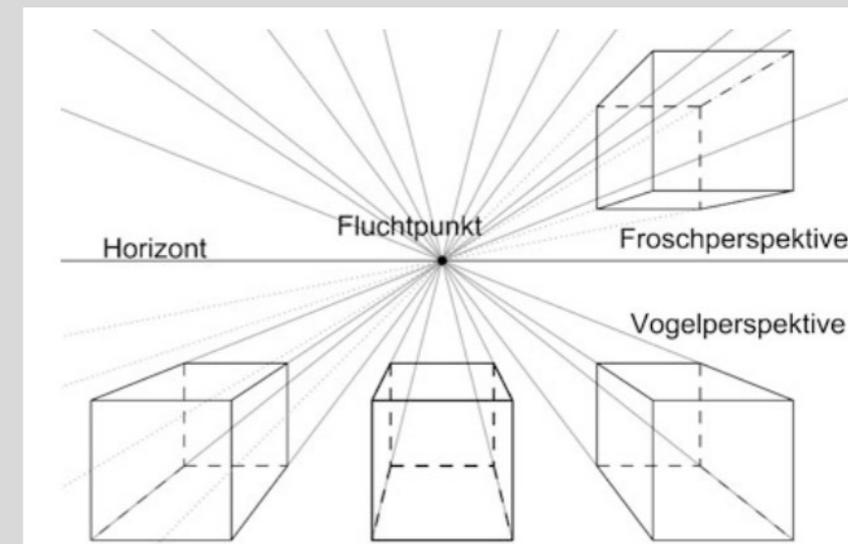
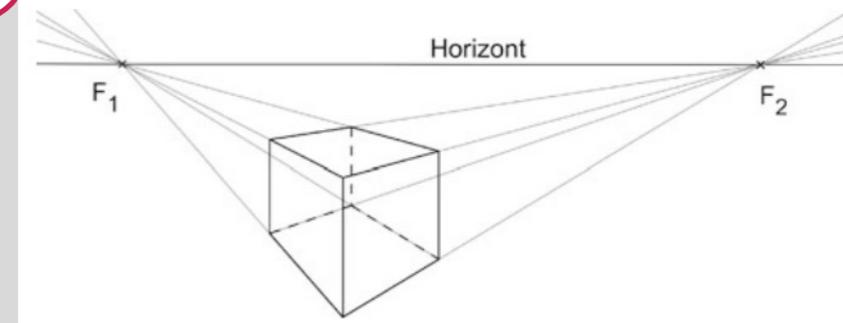
Zentralprojektion

Den optimalen räumlichen Eindruck erreicht man nur, wenn das Auge genau im Augpunkt positioniert wird, und nur für den Bereich, der bei Fixierung des Hauptpunktes noch in unserem sog. Sehkegel liegt, der unser Sichtfeld kegelförmig beschränkt.

Eigenschaften

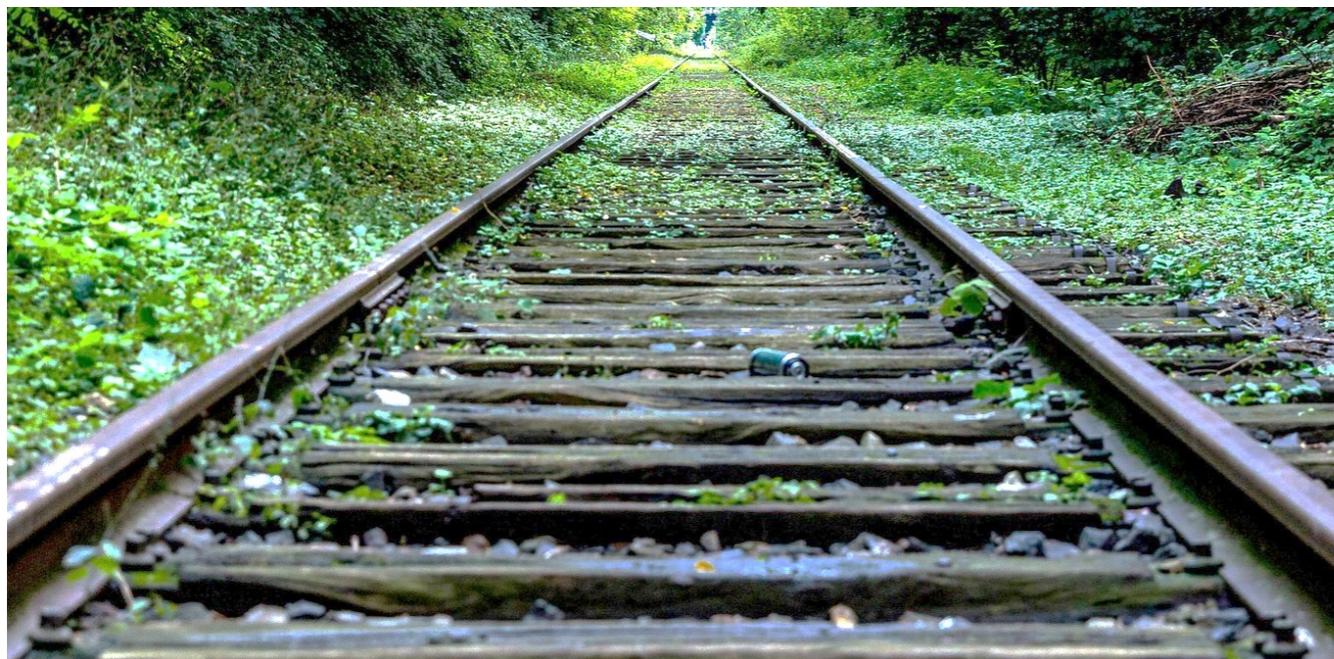
- Bei der Zentralprojektion handelt es sich um eine Abbildung, die räumliche Gegenstände von einem Punkt (dem sog. Zentrum oder Augpunkt) aus auf eine Ebene projiziert.
- Dadurch, dass die Zentralprojektion Bilder erzeugt, die unserem natürlichen Sehen oder Fotografien sehr ähnlich sind, entstehen anschauliche Darstellungen von räumlichen geometrischen Körpern.
- Allerdings hat dies den Preis, dass anders als bei der Parallelprojektion keine Längen, keine Verhältnisse von Längen und auch keine Winkelgrößen mehr aus dem Bild entnommen werden können.

Helmerich & Lengnink, 2016. S. 216ff

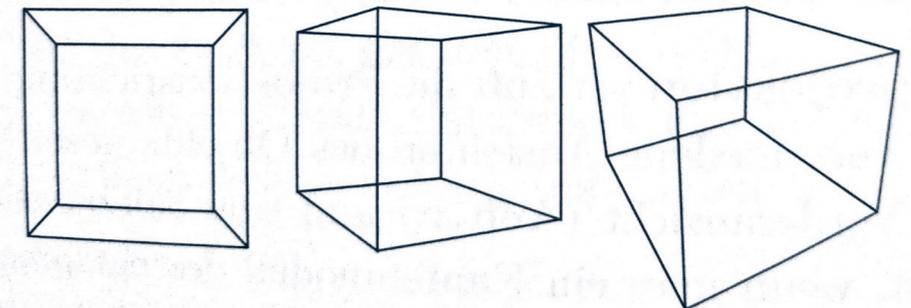


Wahrnehmung

- Die Parallelprojektionen stimmen nicht mit der perspektivischen Wahrnehmung überein.
- Beispiel Eisenbahnschienen, Stichwort Zentralprojektion



1 Fluchtpunkt 2 Fluchtpunkte 3 Fluchtpunkte



- Jede Projektion in die Ebene bringt Verzerrung mit sich

Franke & Reinhold, 2016. S. 327f

Umsetzung im Unterricht

- Zeichenhilfen zur räumlichen Darstellung geometrischer Körper
- Konsequenzen für den Unterricht

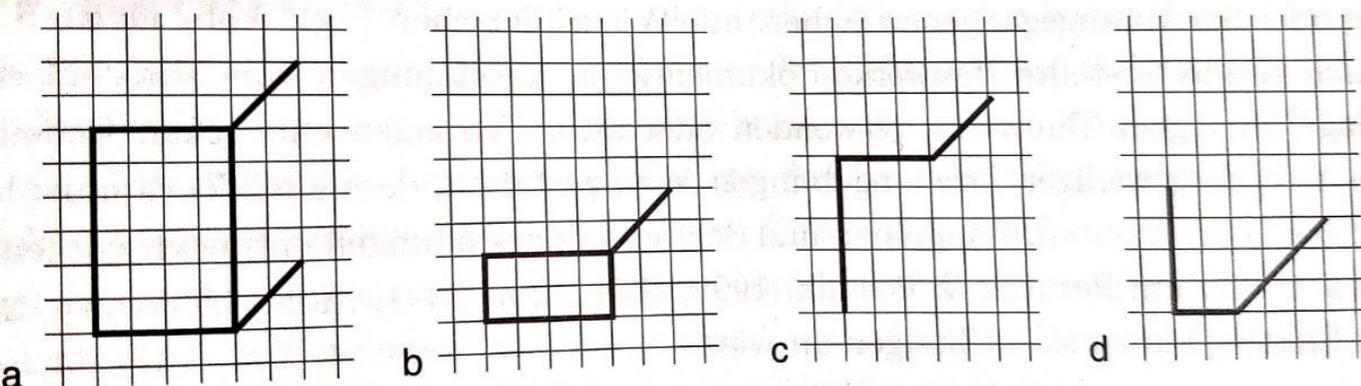
- lange Zeit spielt räumliche Zeichnen im Geometrieunterricht der Grundschule keine große Rolle
- Entwicklungsstadien werden dem Selbstlauf oder dem Kunstunterricht überlassen
- In der Mittelstufe wird das Zeichnen verlangt
- Unterstützung der Entwicklung durch gezielte Aktivitäten

Zeichenhilfen zur räumlichen Darstellung geometrischer Körper

Kavalierprojektion



Vervollständige und zeichne verdeckte Kanten gestrichelt ein.



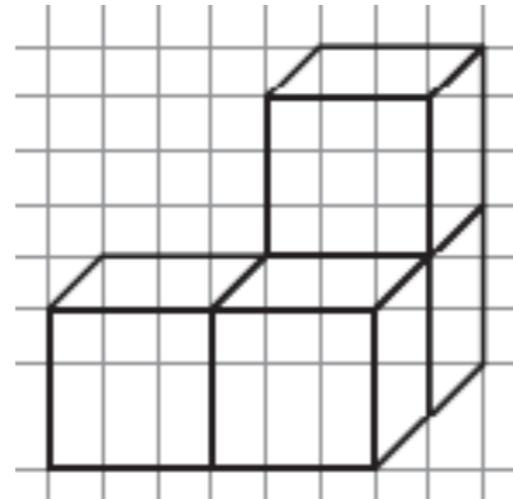
Quader und Würfel auf Kästchenpapier

1. Wir zeichnen die Vorderfläche des Würfels in ihrer wahren Gestalt.
2. Die Kanten, die von vorn nach hinten gehen, zeichnen wir schräg und verkürzt. Wir zeichnen nur die drei Kanten, die bei einem undurchsichtigen Würfel zu sehen sind, wenn wir von „vorn oben rechts“ auf den Würfel schauen.
3. Wir ergänzen die beiden sichtbaren Kanten an der hinteren Fläche des Würfels.

Franke & Reinhold, 2016. S. 334 & 338f

Zeichenhilfen zur räumlichen Darstellung geometrischer Körper

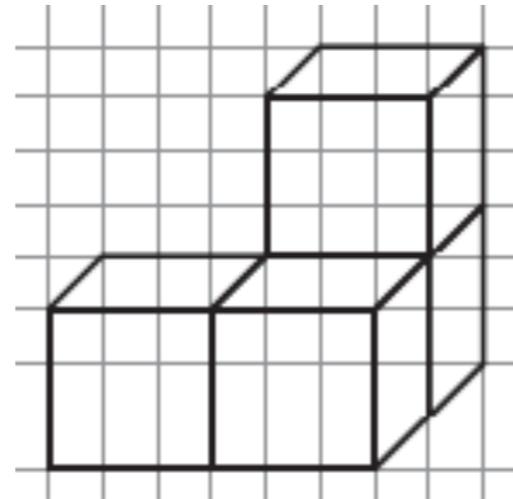
Zeichnen geometrischer Körper auf Kästchenpapier



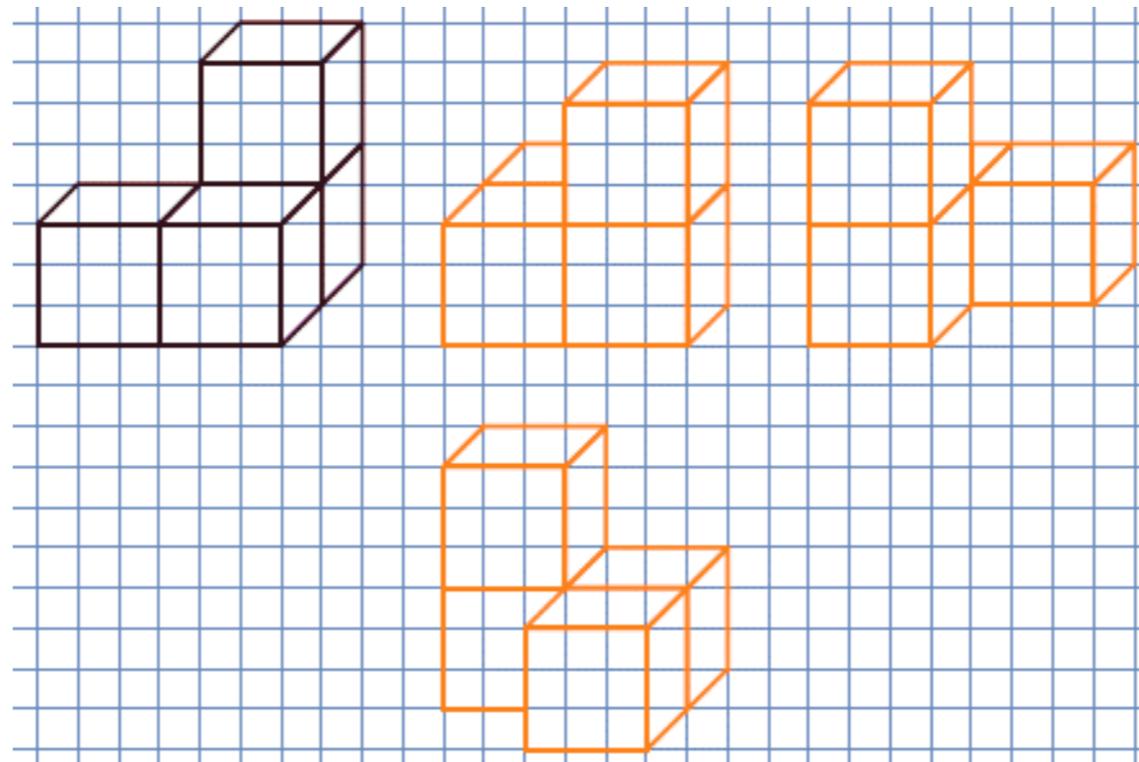
Zeichnen Sie Schrägbilder,
die den Körper von
verschiedenen Seiten
zeigen.

Zeichenhilfen zur räumlichen Darstellung geometrischer Körper

Zeichnen geometrischer Körper auf Kästchenpapier

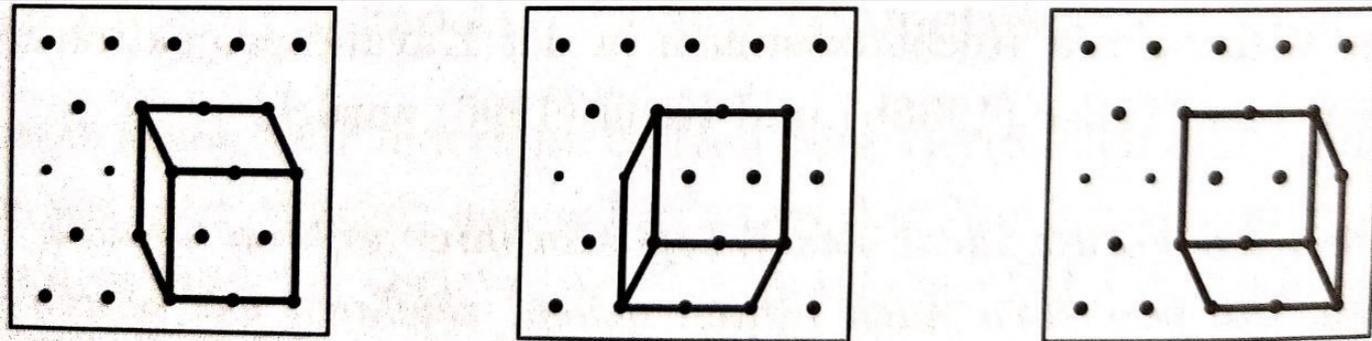
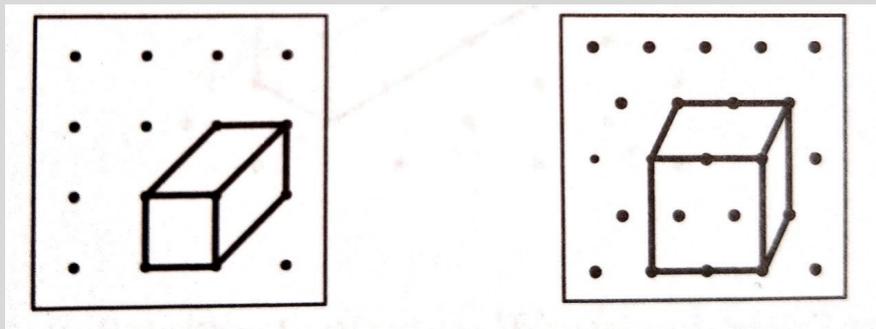


Zeichnen Sie Schrägbilder, die den Körper von verschiedenen Seiten zeigen.



Zeichenhilfen zur räumlichen Darstellung geometrischer Körper

Kavalierprojektion



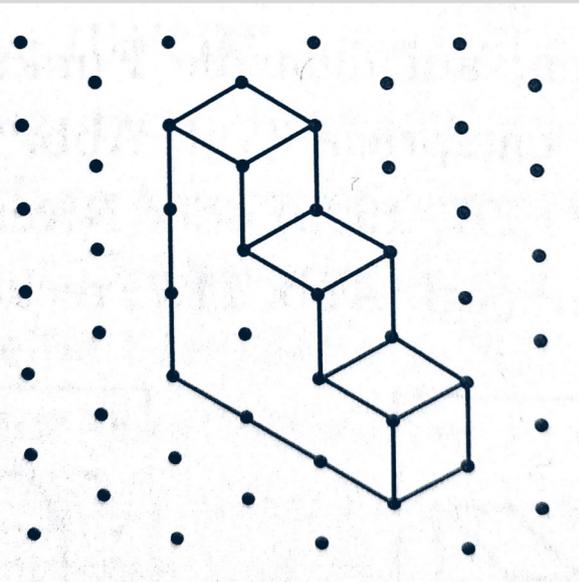
Quader und Würfel auf Punktepapier

- Ähneln dem Zeichnen auf Kästchenpapier
- Dreiecksgitter bieten den Vorteil, dass verschiedene Lagen eines Würfels oder Quaders im Raum gezeichnet werden können.

Franke & Reinhold, 2016. S. 339f

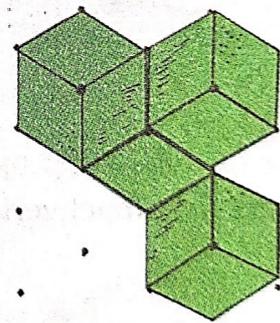
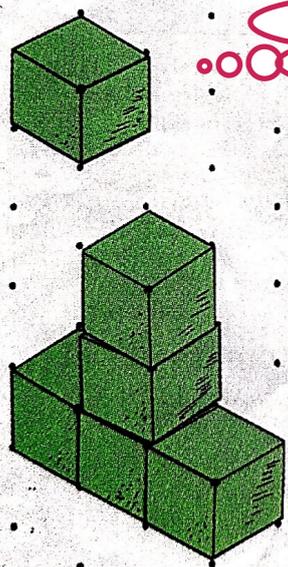
Zeichenhilfen zur räumlichen Darstellung geometrischer Körper

isometrische Parallelprojektion



1. Zeichne die Treppe ab.
2. Aus wie vielen Einzelwürfeln besteht sie? Zeichne einzelne Würfel ein.
3. Wie sieht die Treppe aus, wenn sie nach rechts oben führt?
4. Wie sieht die Treppe aus, wenn sie noch zwei weitere Stufen bekommt?

Ein regelmäßiges Sechseck wird in drei kongruente Rautenflächen geteilt.



Warum handelt es sich um ein „unmögliches“ Bauwerk?

Würfeltreppe & Würfelplättchen

- Übung zu Würfeltreppen bietet sich zum Entdecken von Zusammenhängen an
- Würfelplättchen
 - erleichtern den Schritt vom konkreten Bauen zum Zeichnen
 - Grundlegung für das Verständnis perspektivischer Darstellungen räumlicher Objekte
 - sind im Sinne eines „Erkundens und Aushandelns“ der Gesetzmäßigkeiten perspektivischer Darstellungen einer rein vermittelnden Einführung in das perspektivische Zeichnen vorzuziehen

Spiel „CUBUS“.

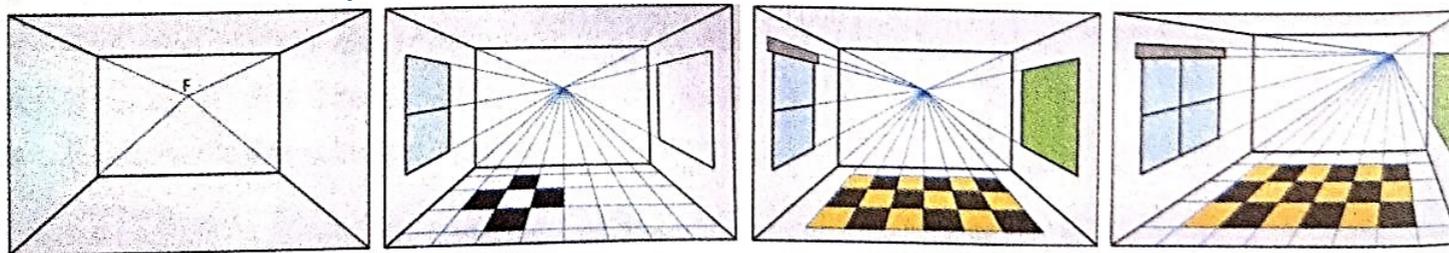
Franke & Reinhold, 2016. S. 339f

- **Vor der Einführung des Hilfsmittels entscheiden, welcher Darstellungsart man den Vorzug einräumt**

- z.B.:

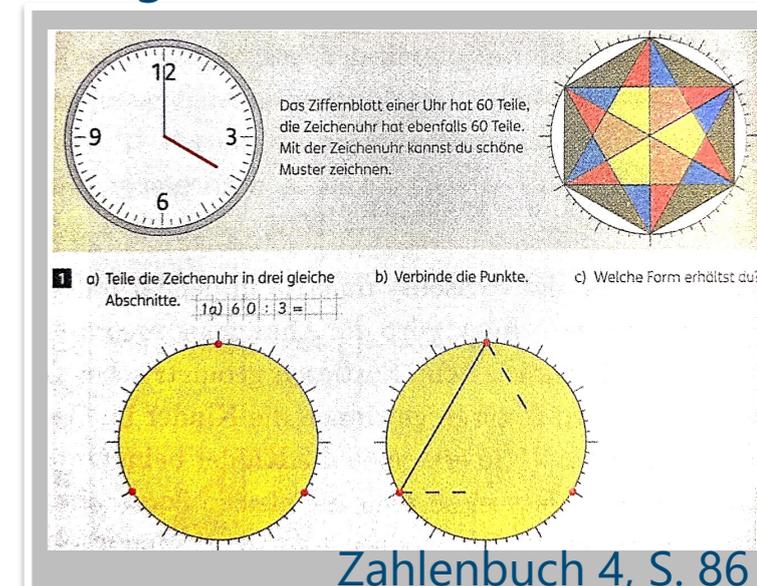
- Einführung mit Würfelplättchen
- Dokumentation erstellter Bauwerke, Zeichnungen von Mitschülern zur Vorlage für eigene Bauwerke verwenden oder selbst Vorlagen entwerfen.
- **Zusammenhänge zwischen Würfelbauten, Bauplänen und Schrägbild Darstellungen sollen entdeckt werden können**, Einstieg z.B. über die Würfeltreppenübung.

- Erste Darstellungen in Zentralprojektion (am Ende der Grundschulzeit)



Franke & Reinhold, 2016. S. 340ff

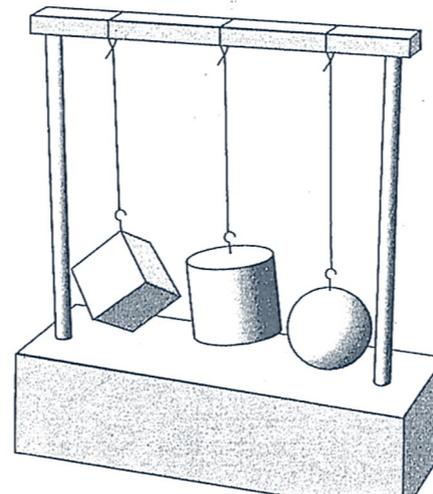
Mathematikus 4, S. 97



Zahlenbuch 4, S. 86

Freihandzeichnung

- Nach Zeichnung diverser Schrägbilder
- Modell von einem bestimmten Standpunkt aus zeichnen



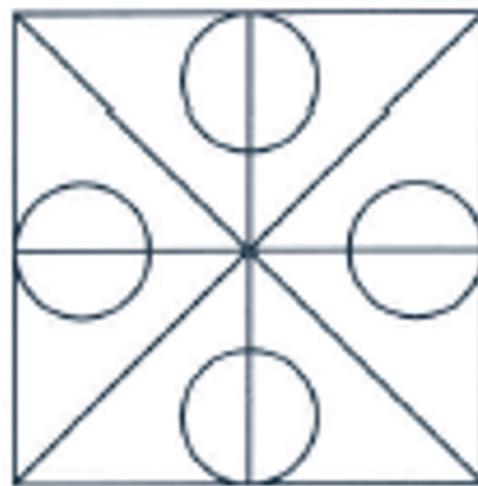
- Diese Modelle sind ideal für Übungen zum Freihandzeichnen, weil sie unterschiedliche Perspektiven ermöglichen

Zeichnen ebener Figuren

- Freihandzeichnen
- Zeichnen mit Schablone
- Zeichnen mit Zeichengeräten

Zeichnen ebener Figuren

- Gewinnen geometrischer Erfahrungen
- Protokollieren von Handlungen, Festhalten von Arbeitsergebnissen

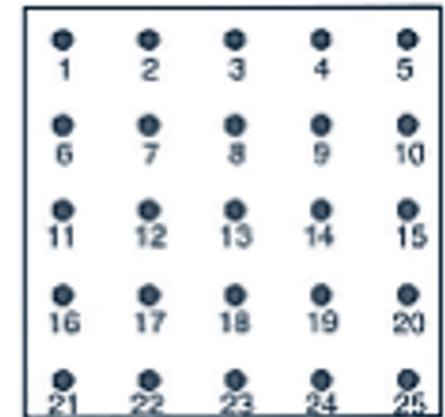
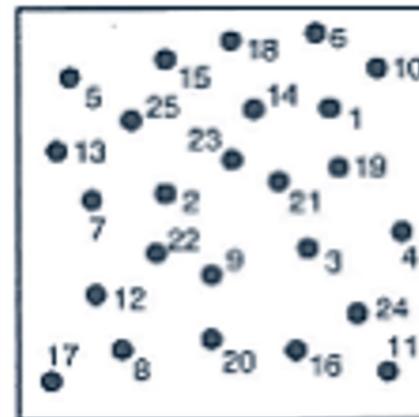


Franke & Reinhold, 2016. S. 345

Zeichnen ebener Figuren

Freihandzeichnen

- Linien- und Bogenmuster
(Bleistift und Farbe)
- Verbinden von Zahlen,
Übergang zu geometrischen
Formen
- Karo-/Punktepapier als Hilfe
- Abzeichnen von Bildern
- Nach Anweisung zeichnen



1. Verbinde Punkte so, dass ein Dreieck (Quadrat, Rechteck) entsteht.
2. Zeichne Dreiecke (Quadrate, Rechtecke), die gleich groß sind, indem du Punkte verbindest.
3. Welche Figur erhältst du, wenn du in der linken Abbildung die Punkte 1, 25, 17 und 11 verbindest? (Verbinde in der angegebenen Reihenfolge. Welche Figuren kannst du zeichnen, wenn du in einer anderen Reihenfolge verbindest? Probiere es mit einer anderen Farbe aus.)
4. Welche Punkte in der rechten Abbildung kannst du zu einem Quadrat (Rechteck, Dreieck) verbinden? Probiere es aus.

4 a) Zeichne ab und ergänze jeweils die 4. und 5. Figur.

A

1. 2. 3. 4. Figur

B

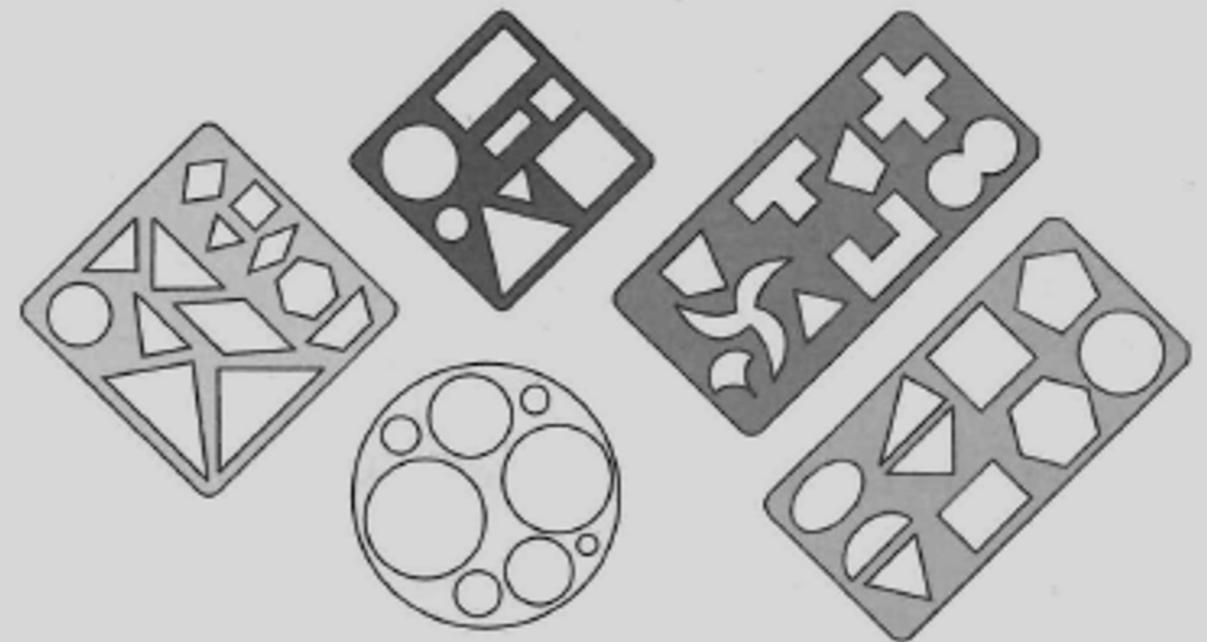
1. 2. 3. 4. Figur

b) Beschreibt die Muster. Wie verändern sich die Figuren?
c) Wie werden das 10. Rechteck und das 10. Dreieck aussehen? Zeichnet.

5 Erfindet eigene Muster. Gebt sie zum Fortsetzen weiter.

Zeichnen mit Schablone

- Negativ- und Positivschablonen
- Übergang vom Freihandzeichnen zum Umgang mit geometrischen Zeichengeräten
- Nutzen von Schablonen
 - Zeichnen bestimmter geometrischer Figuren
 - Zusammensetzen geometrischer Figuren zu Bildern
 - Herstellen von Mustern, Ornamenten und Parketten



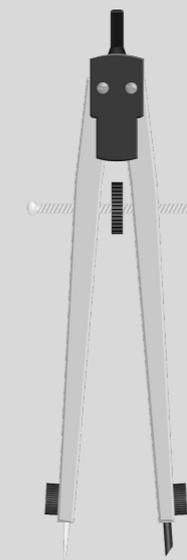
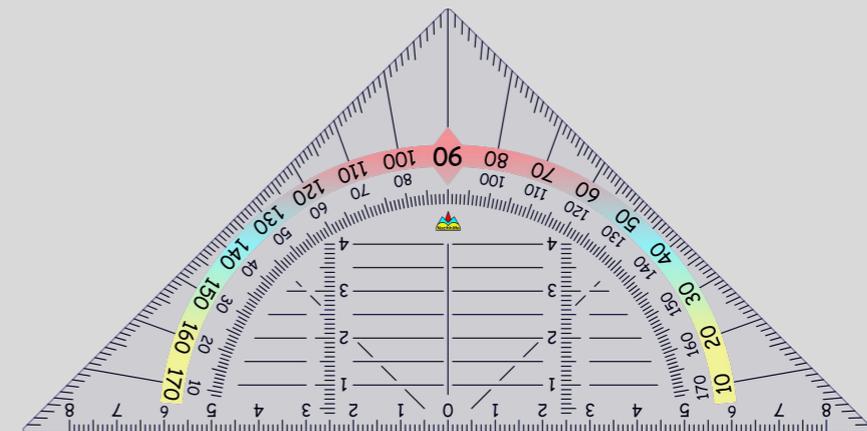
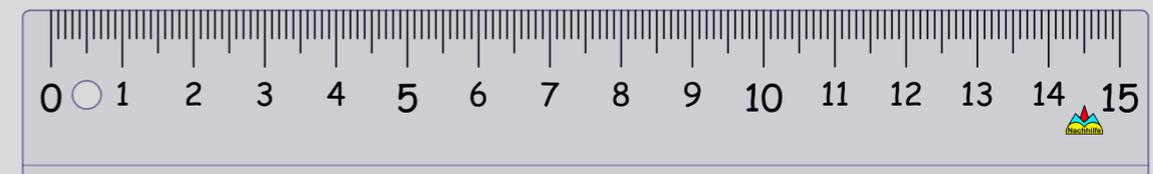
Vorlesung 09: Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette)

Franke & Reinhold, 2016, S. 349f

Zeichnen ebener Figuren

Zeichnen mit Zeichengeräten

- Lineal
- Geodreieck
- Zirkel



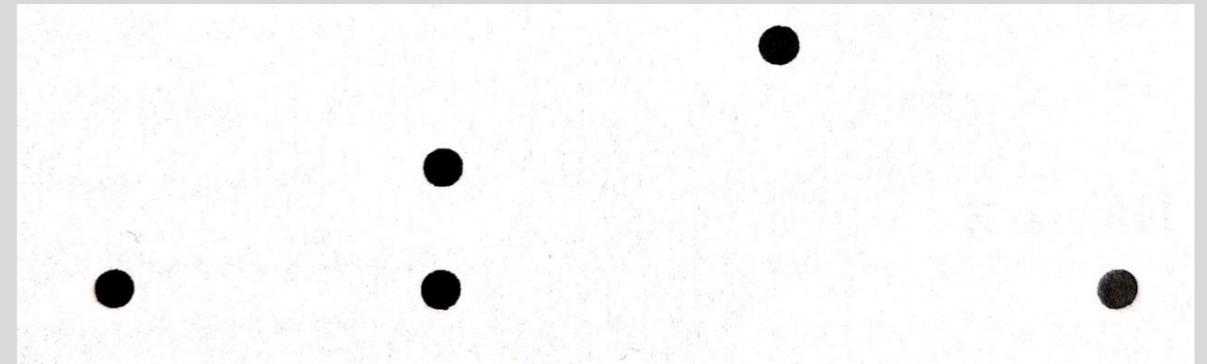
Zeichnen ebener Figuren

Zeichnen mit Zeichengeräten

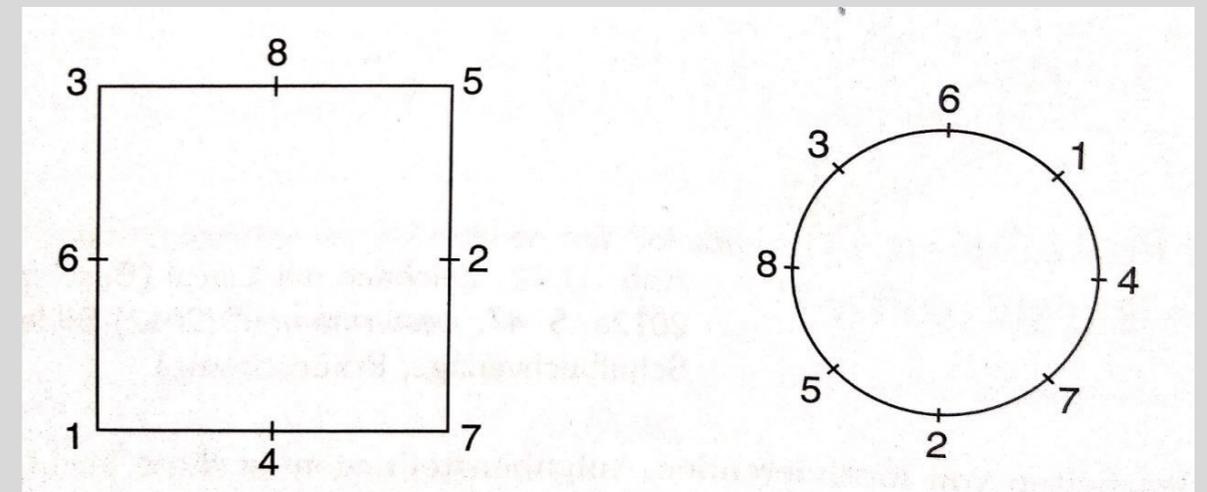
Lineal



- Anlegen und halten des Lineals
- Zeichnen entlang der Kante
- Umgang mit Maßskala



Verbinde alle Punkte so, dass ein Dreieck entsteht. Verwende Dein Lineal. Beachte, dass jeder Punkt auf der Dreieckslinie liegen soll.



Verbinde die Zahlen der Reihen nach. Beginne mit 1. Verbinde zum Schluss die größte und die kleinste Zahl. Ahnst Du schon vorher, welche Figur entsteht?

Franke & Reinhold, 2016, S. 351f

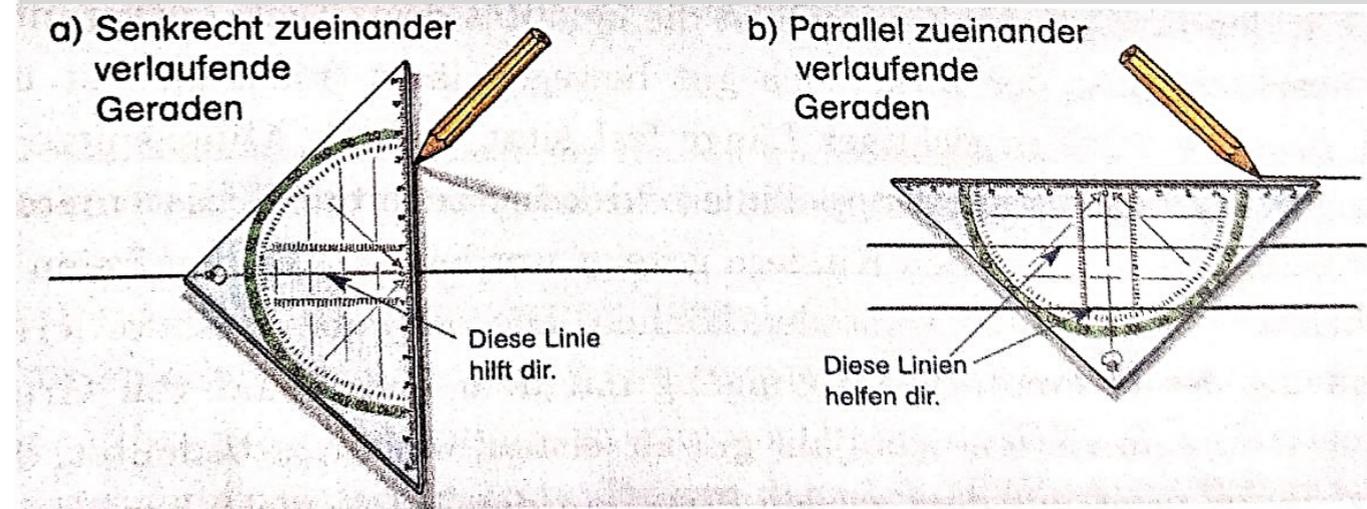
Zeichnen ebener Figuren

Zeichnen mit Zeichengeräten

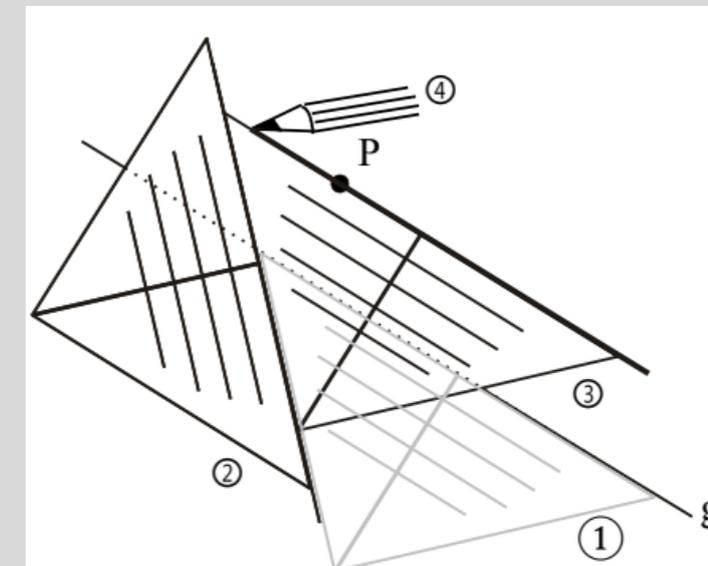
Geodreieck



- Zeichnen paralleler und senkrechter Linien
- Erkennen und verwenden der Maßeinteilung



Matheprofis 4, S. 30



Franke & Reinhold, 2016, S. 353f;
Benölken, Gorski, & Müller-Philipp, 2018, S. 273

Definition: Parallel

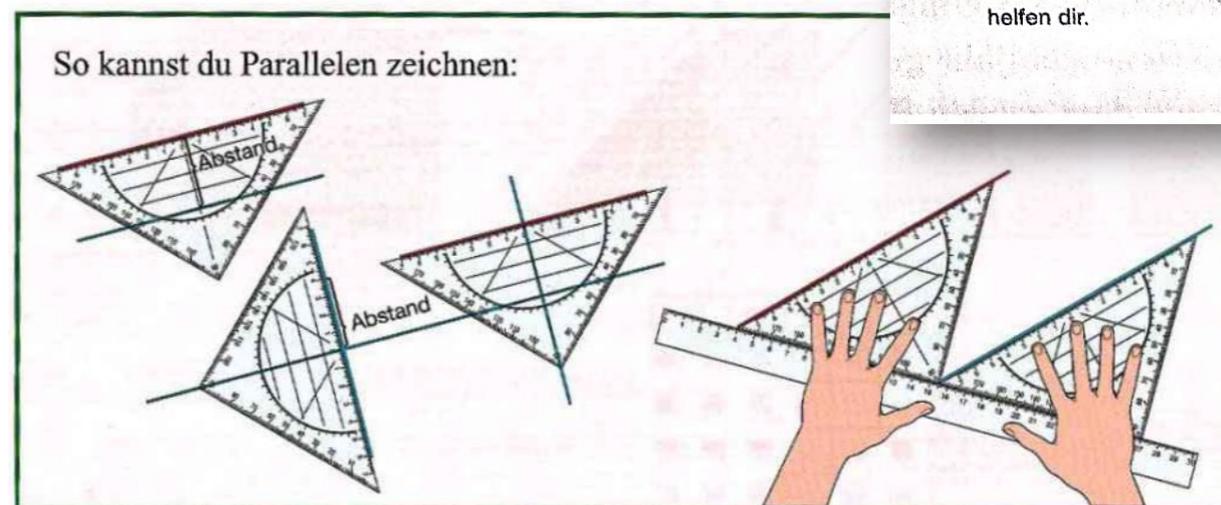
Zwei Geraden g und h heißen genau dann parallel, wenn sie **identisch sind oder keinen gemeinsamen Punkt** haben.

Neben der oben genannten Definition der Parallelität gibt es noch andere Möglichkeiten:

Zwei Geraden g und h heißen parallel, wenn

- ihr Durchschnitt leer ist oder wenn sie gleich sind.
- sie überall den gleichen Abstand zueinander haben.
- sie von einer dritten Geraden im gleichen Winkel geschnitten werden.

Welche Definition von parallel wird hier angesprochen?



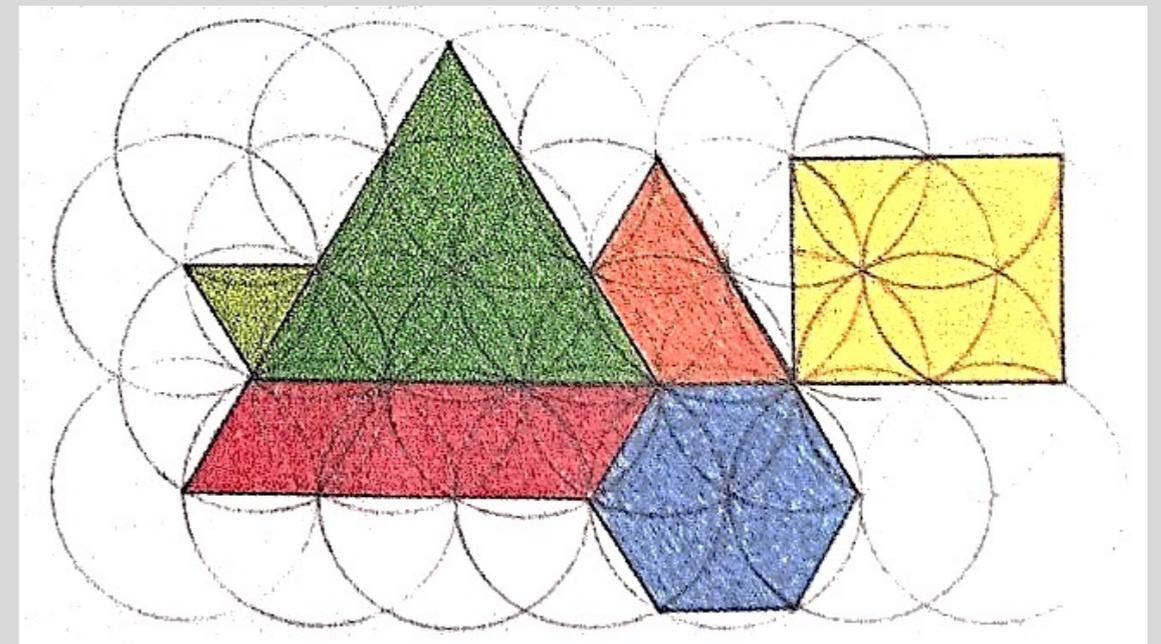
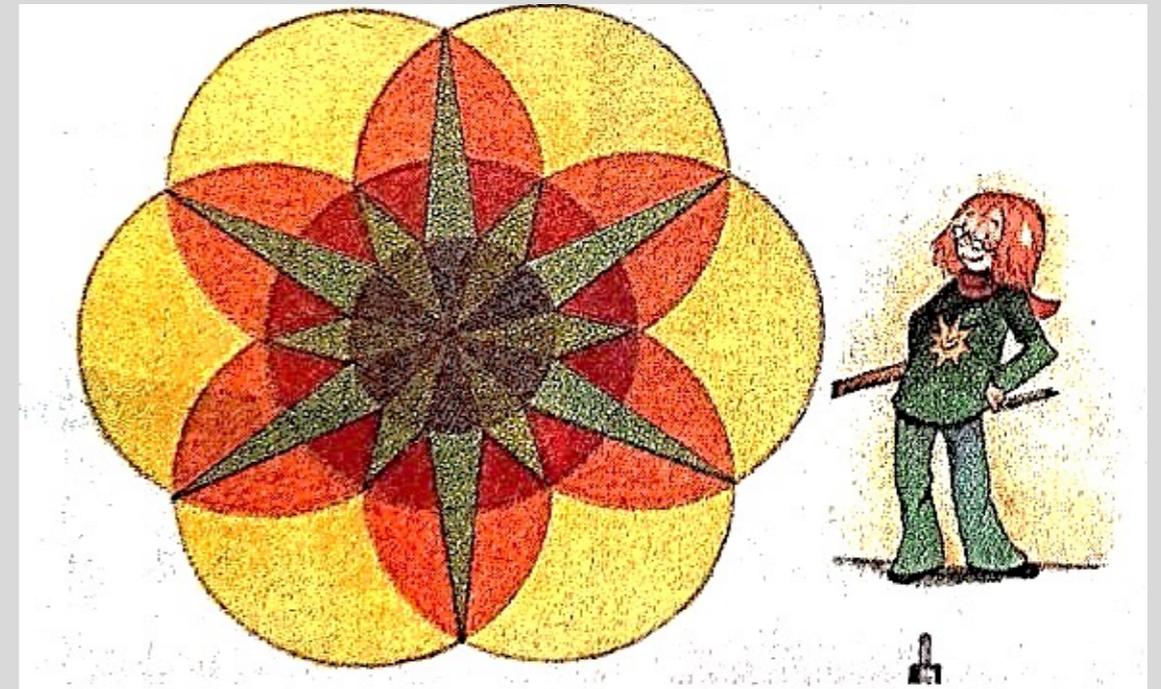
Zeichnen ebener Figuren

Zeichnen mit Zeichengeräten

Zirkel



- Wichtig: Qualität des Zirkels
- Mandalas



EIMa WiSe
21/22

Konstruieren und Zeichnen

- Unterscheidung
- Konstruktive Zugänge zur Geometrie
- Die Werkzeuge
- Konstruktionsbeschreibungen
- Grund- und Standardkonstruktionen

Unterscheidung?!

Sammeln Sie Aspekte zur didaktischen Bedeutung von Konstruktionsaufgaben.

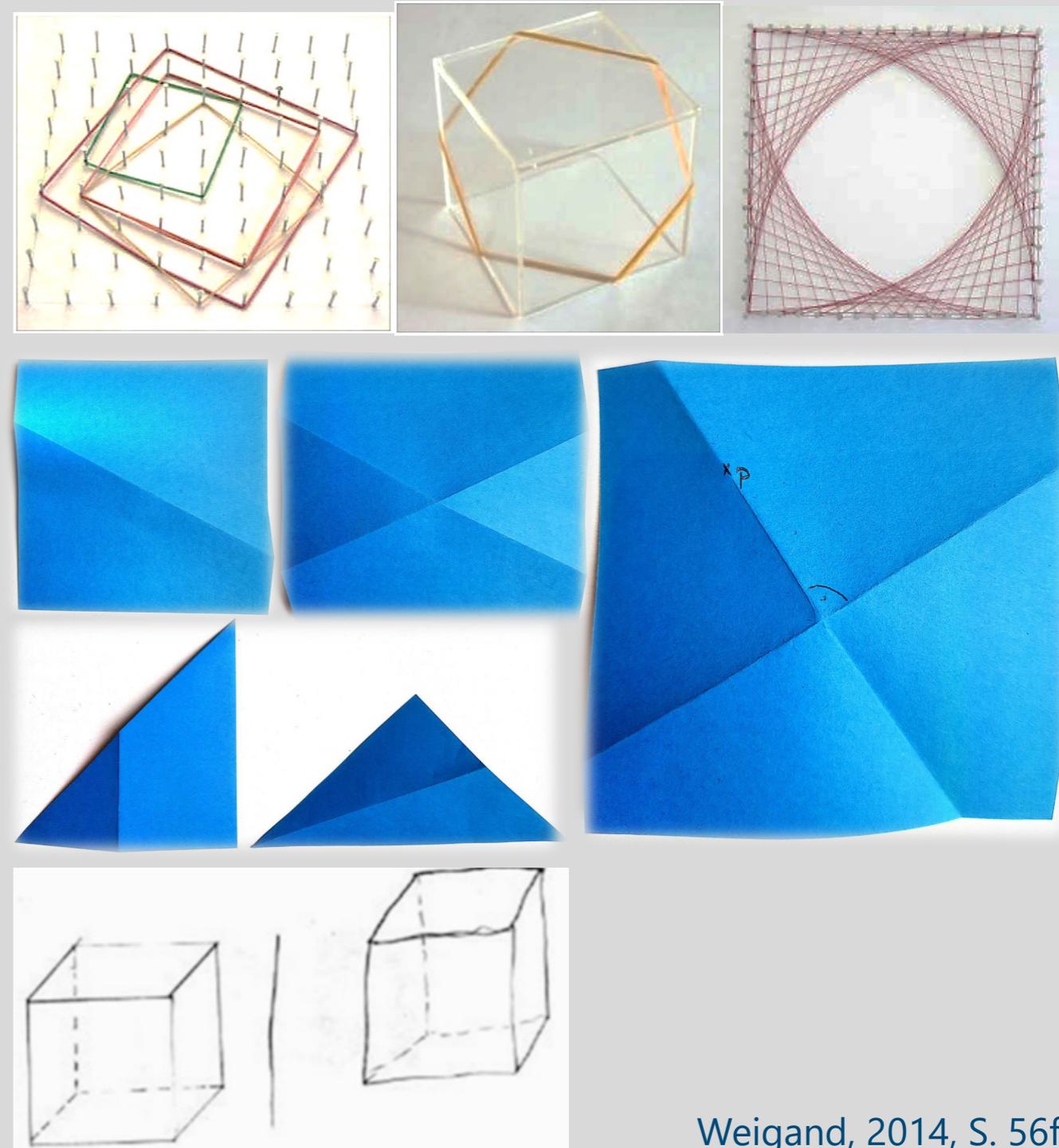
Übung 4

- Erzeugen, Herstellen **oder Zeichnen** geometrischer Objekte mit Hilfe von Werkzeugen oder Instrumenten
- Arbeit mit (Konstruktions)Werkzeugen, mentales Operieren und Arbeit auf der begrifflichen Ebene
- Geometrische Objekte sind ideelle Objekte, Konstruieren ist die Erzeugung **ideeller Objekte**
- dargestellt, hergestellt oder erzeugt werden jedoch **reale Objekte**

Weigand, 2014, S. 55f

Konstruktive Zugänge zur Geometrie

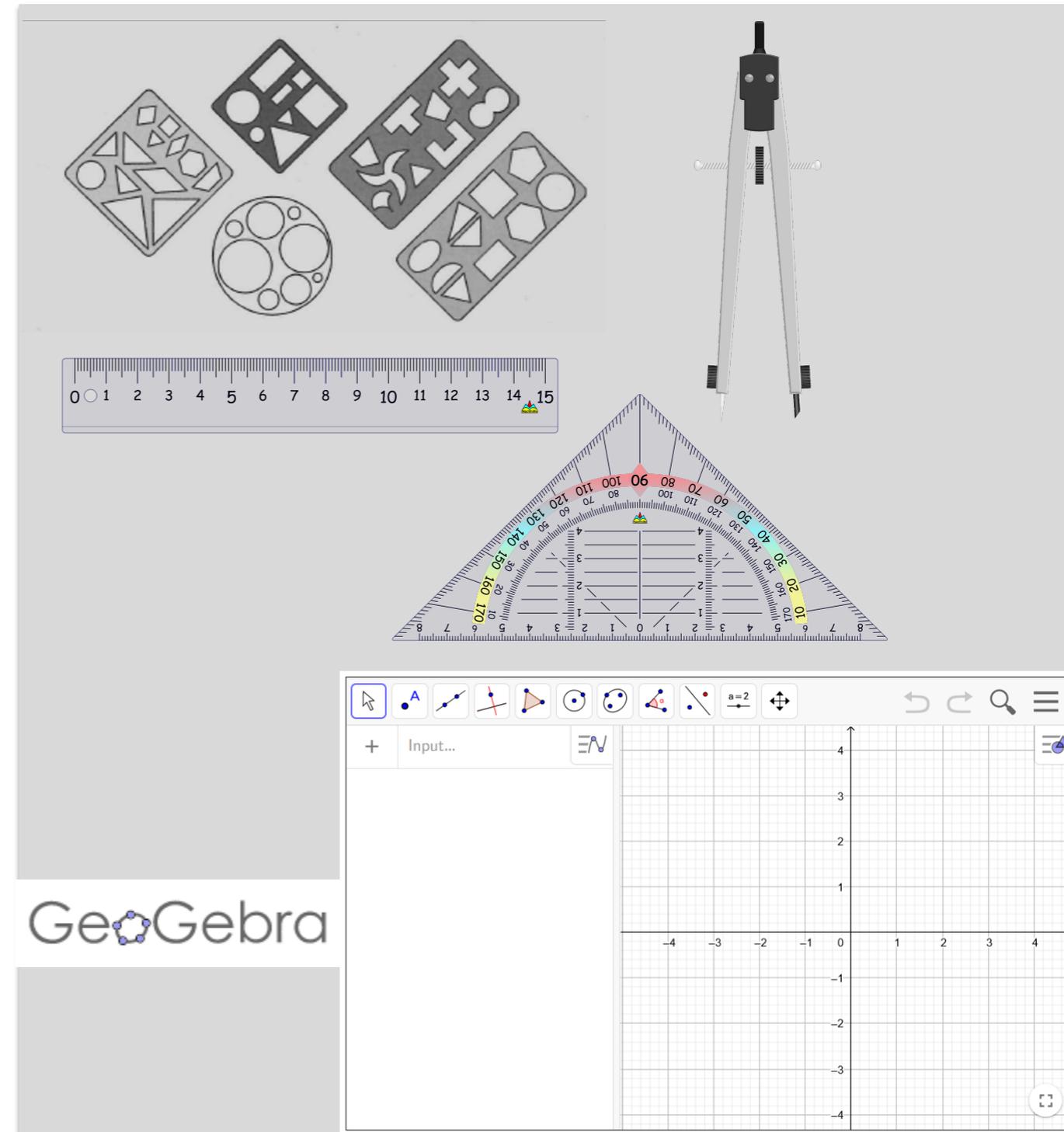
- Spannen von Seilen und Bändern
 - Geobrett
 - Spannen ebener Schnitte
 - Nagelbilder
- Falten
 - Falten geometrischer Figuren
 - Stichwort Figureneigenschaften
- Zeichnen



Weigand, 2014, S. 56ff

Die Werkzeuge

- Die Klassiker
 - Schablonen (ab Klasse 1)
 - Lineal (ab Klasse 1)
 - Zirkel (ab Klasse 4)
- Die Praktischen
 - Geodreieck (ab Klasse 3)
- Die Modernen
 - Dynamische Geometriesysteme (ab Klasse 5)



Franke & Reinhold, 2016, S. 351; Weigand, 2014, S. 59ff

Welche Möglichkeiten gibt es, eine Strecke zu halbieren?

- Strecke mit Lineal abmessen und Zahlenwert halbieren
- Strecke mit Faden ablegen und Faden halbieren
- gezeichnete Strecke: Papier falten
- Bei sehr kleinen Strecken: Mittelpunkt per Augenmaß
- Bei großen Strecken in der Umwelt: Mitte mit Maßband abmessen
- Bei sehr langen Strecken: Abfahren mit Auto, Kilometermesser
- Google-Earth
- ...

Welches Verfahren liefert die genaueste Lösung?

- real durchgeführte Konstruktionen erbringen nicht immer die genauesten Ergebnisse
→ **Ungenauigkeitsquellen**
- Warum haben Zirkel-und-Lineal Konstruktionen eine so große Bedeutung?
 - kein praktisches, sondern theoretisches Interesse
 - nicht das tatsächliche Herstellen realer Objekte, sondern gedankliches Erzeugen ideeller Objekte mit Hilfe idealisierter Operationen
 - theoretisch exakte Ergebnisse in der Vorstellung, aber praktische Durchführung ungenau
 - theoretisch exakt ist etwas anderes als praktisch genau!
 - Jeder einzelne Schritt lässt sich eindeutig beschreiben
 - Man erhält das Ergebnis in endlichen vielen Schritten

Konstruieren ist eine Tätigkeit, die mit idealen Objekten in der Vorstellung operiert.

Was ist konstruieren?

Beim Konstruieren wird ausgehend von einer Ausgangskonfiguration durch Verwendung ausgewählter Werkzeuge, die nach festgelegten Regeln eingesetzt werden, eine Zielkonfiguration erzeugt.

- (vorgegebene) **Ausgangskonfiguration**
 - eine Menge geometrischer Objekte (Punkte, Gerade, etc.)
 - ein System von Beziehungen
- **Konstruktionsschritte**
 - endliche Anzahl von Operationen
 - festgelegte Werkzeuge (z. B. Zirkel und Lineal)
 - feste Regeln
- **Zielkonfiguration**
 - Menge geometrischer Objekte/System von Beziehungen
 - schließt Ausgangskonfiguration ein und erweitert diese

Übung 4

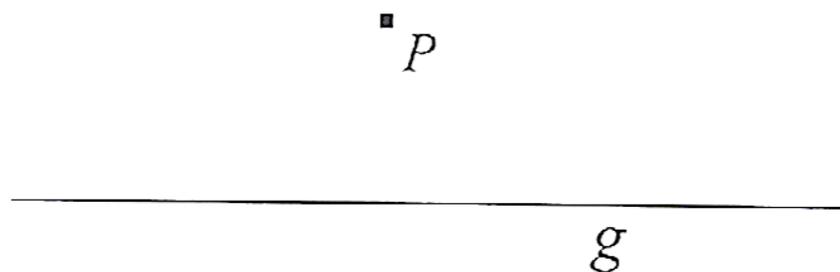
Weigand, 2014, S. 64

Ein Beispiel

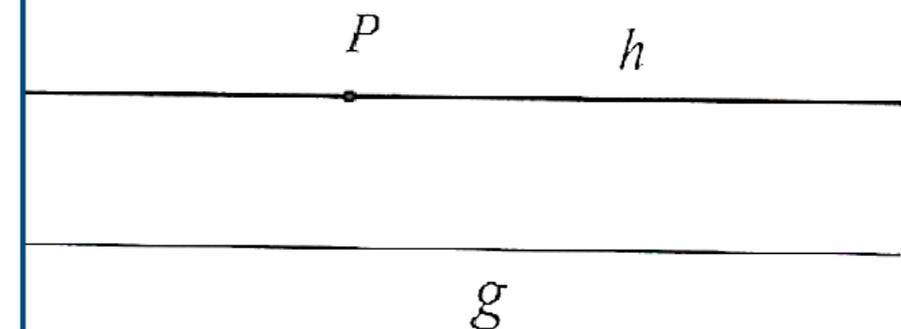
Zur Ausgangskonfiguration:
Welche geometrischen Objekte?
Welches System von Beziehungen?

Konstruiere mit Zirkel und Lineal eine Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden.

Ausgangskonfiguration: Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$.



Zielkonfiguration:



Weigand, 2014, S. 65

Konstruieren und Zeichnen

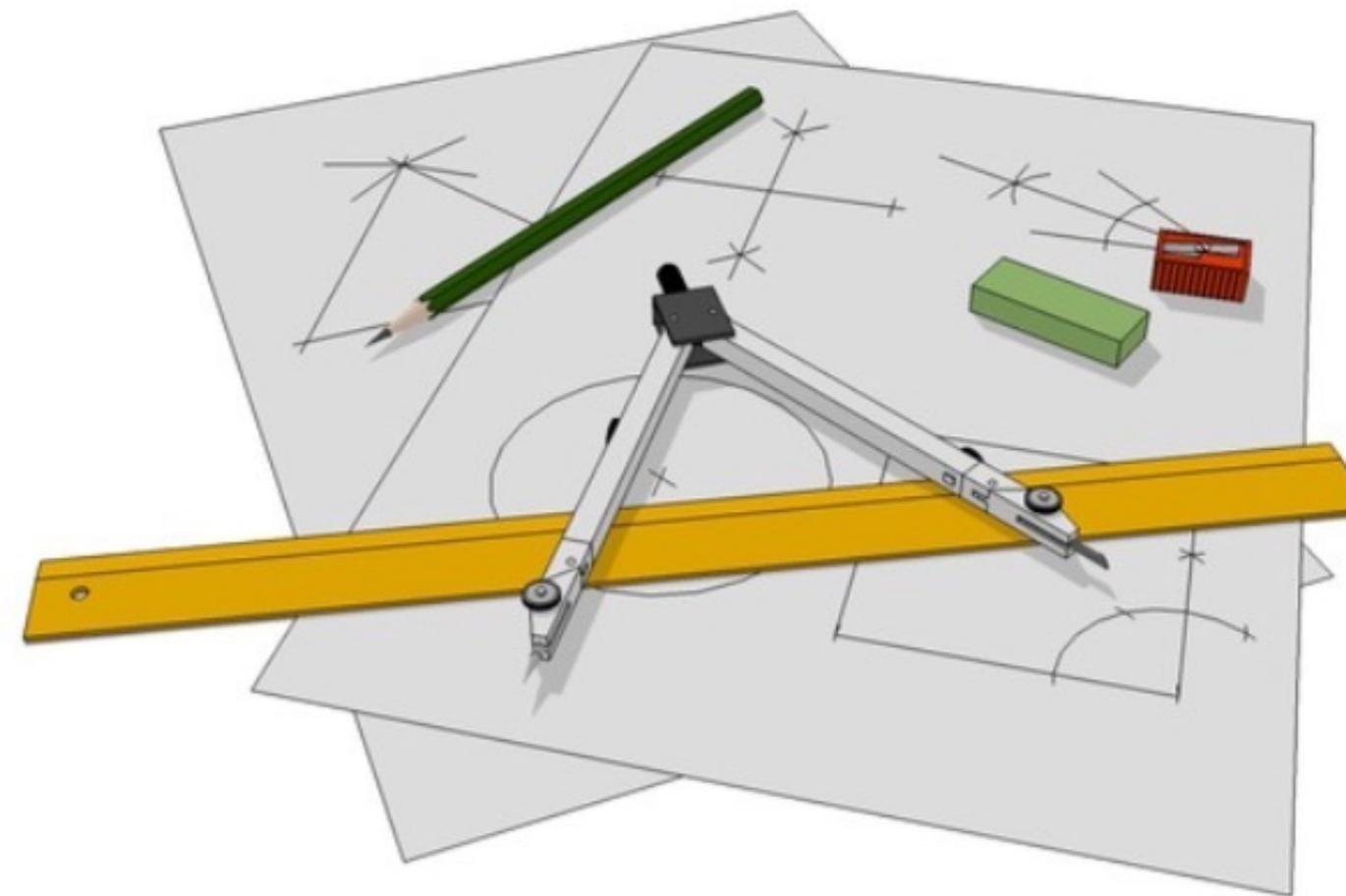
Traditionell bedeutet Konstruieren in der Geometrie ausschließlich das Konstruieren mit Zirkel und Lineal.

Warum?

Postulate nach Euklid:

- Man kann von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen.
- Man kann eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend verlängern.
- Man kann mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen.

Damit sind die **Grundkonstruktionen** festgelegt, die sich mit Zirkel und Lineal (ohne Messkala) realisieren lassen.



Abbildungsquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Konstruktion_mit_Zirkel_und_Lineal#/media/Datei:R%C3%A9gua_e_compasso.jpg

Weigand, 2014, S. 59

Erlaubte Konstruktionen

- Beliebigen Punkt zeichnen.
- Beliebigen Punkt auf einer Geraden, Strecke oder Kreislinie zeichnen.
- Gerade durch zwei Punkte zeichnen (Lineal).
- Zwei Punkte durch eine Strecke verbinden (Lineal).
- Schnittpunkte von Geraden, Strecken und Kreislinien markieren.
- Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt M durch einen weiteren Punkt P zeichnen (Zirkel).
- Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt M mit einem Radius zeichnen, der von zwei (schon konstruierten oder gegebenen) Punkten übernommen werden kann (Zirkel).

Grundkonstruktionen

Grundkonstruktionen lassen sich mit dem jeweiligen Werkzeug in einem Schritt erzeugen

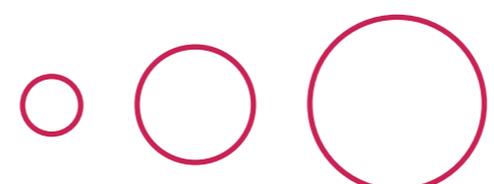
- **Zirkel & Lineal:** (bei gegebenen Punkten A und B)
 - einen Kreis mit Mittelpunkt A durch B zeichnen (Radius $|AB|$)
 - eine Gerade durch die Punkte A und B zeichnen,
 - eine Halbgerade ausgehend von Punkt A durch B zeichnen,
 - die Strecke \overline{AB} zeichnen
- **Geodreieck**
 - Senkrechten
 - Parallelen
 - Abtragen von Winkeln

Standardkonstruktionen

- Standardkonstruktionen lassen sich nicht eindeutig festlegen
- Idee: Verbindung mehrerer Grundkonstruktionen (abhängig vom Werkzeug)

- **Zirkel & Lineal:**

- Strecke übertragen,
- Winkel übertragen,
- Mittelpunkt einer Strecke konstruieren,
- Winkel halbieren,
- Lot auf eine Gerade durch einen Punkt konstruieren,
- Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt konstruieren.



Zum Üben:

<https://www.geogebra.org/m/DZ3566Ag>

Übung 4

Wie können wir mit den erlaubten Konstruktionen eine Strecke $[AB]$ mit $|AB| = 3\text{cm}$ oder einen Winkel mit $\alpha = 30^\circ$ zeichnen?

→ **Es müssen Einheiten oder Repräsentanten gegeben sein. Diese können wir per Konstruktion abtragen.**

Weigand, 2014, S. 68

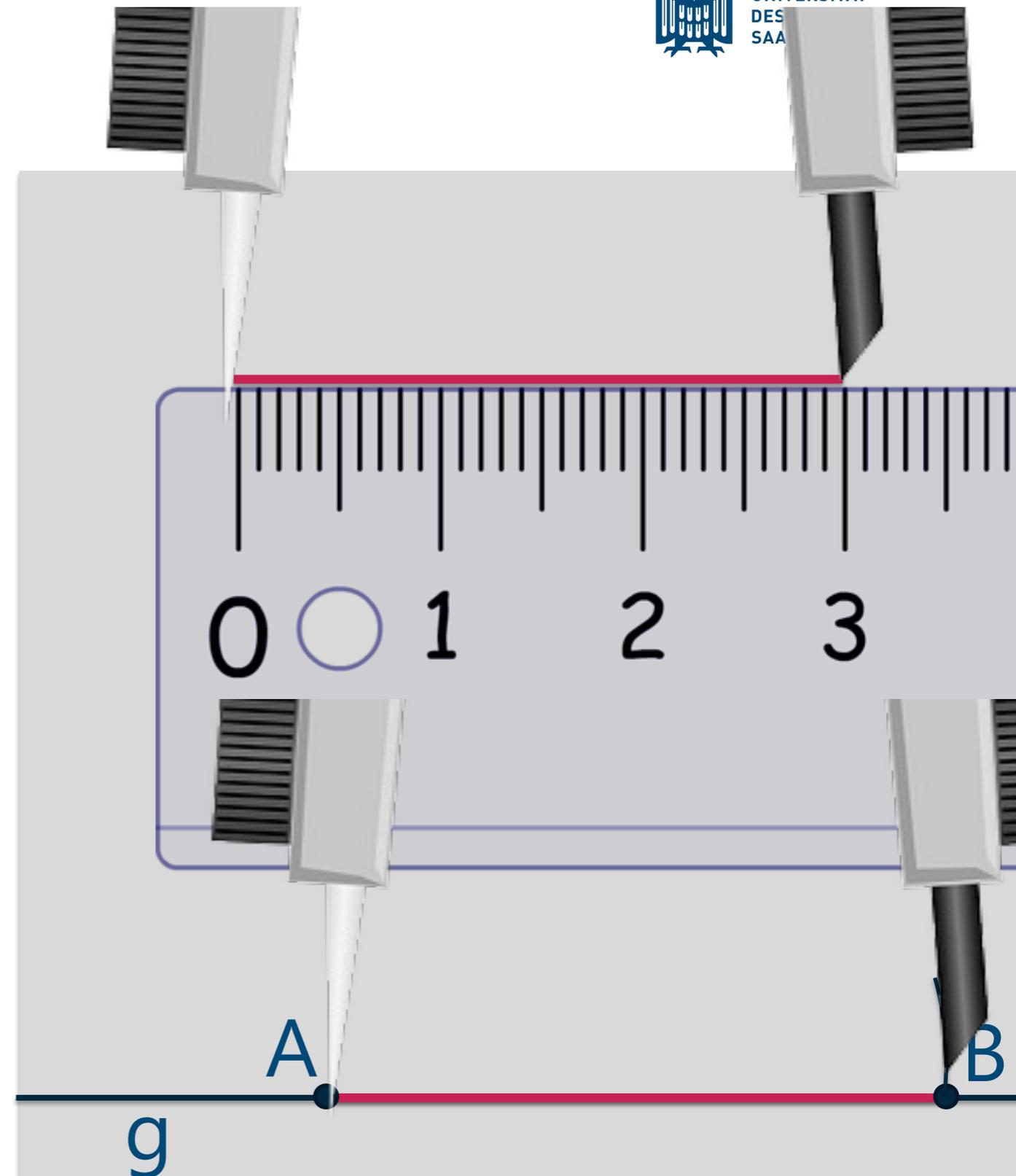
Konstruieren und Zeichnen

Strecke übertragen

Konstruieren als Abtragen

Beispiel: Zeichne eine Strecke \overline{AB} mit $|AB|=3\text{cm}$.

- Gegeben: Repräsentant
- Konstruktion:
 - Zeichne Gerade g und markiere einen Anfangspunkt A .
 - Die Länge des Repräsentanten mit dem Zirkel abgreifen.
 - Kreis um A mit diesem Radius liefert Punkt B .
 - Strecke \overline{AB} zeichnen



Benölken, Gorski, & Müller-Philipp, 2018, S. 256 & 263f

Winkel übertragen

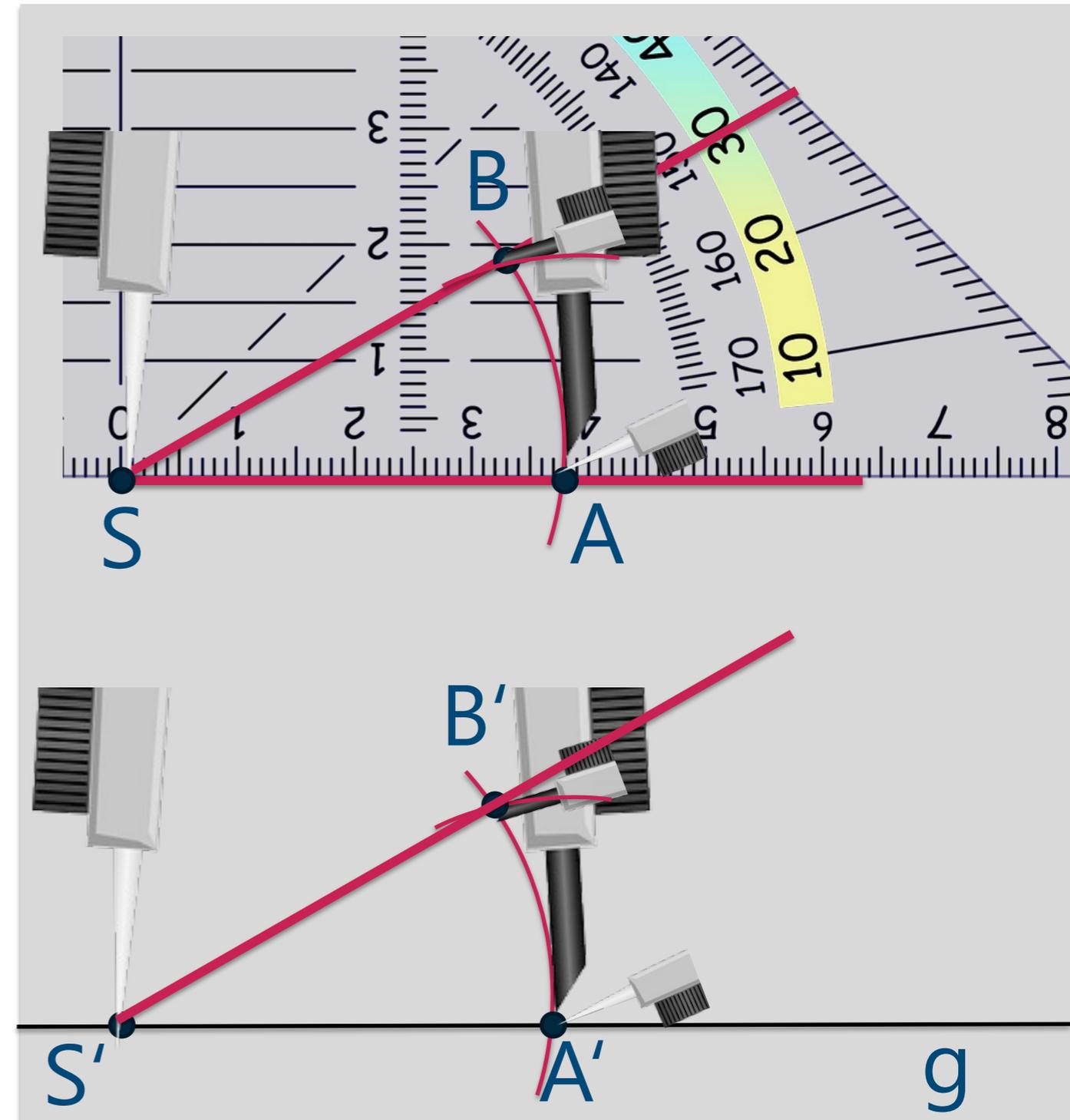
Konstruieren als Abtragen

Beispiel : Zeichne Winkel α mit $\alpha = 30^\circ$

Gegeben: Repräsentant

Konstruktion:

- Zeichne Gerade g und markiere einen Punkt S' .
- Mit dem Zirkel in den Scheitelpunkt S des Winkels einstechen und einen Bogen durch beide Schenkel zeichnen (liefert Punkte A und B).
- Mit dem Zirkel in den Punkt S' einstechen und mit dem gleichen Radius einen Bogen zeichnen (liefert Punkt A').
- Den Zirkel auf den Abstand der beiden Punkte A und B einstellen.
- Mit dem Zirkel in den Punkt A' einstechen und mit dem gleichen Radius einen Bogen zeichnen (liefert Punkt B').
- Die Halbgerade $\overrightarrow{S'B'}$ zeichnen.

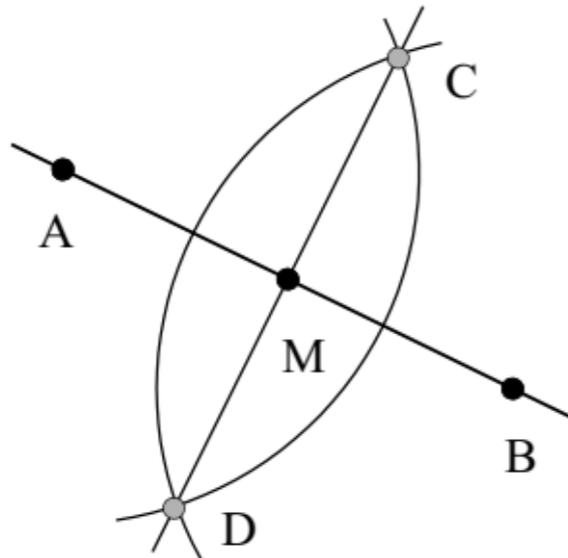


Benölken, Gorski, & Müller-Philipp, 2018, S. 264f

Bedeutung von „Konstruieren“

- Wenn wir sagen, Strecken oder Winkel mit bestimmten Größen seien gegeben, so meinen wir damit, dass die entsprechenden **Repräsentanten** vorgegeben sind und man sie abtragen kann.
- Sind die Repräsentanten in einer konkreten Aufgabe nicht gegeben (was sehr üblich ist), so dürfen wir das Geodreieck oder das Lineal **als „Speicher“ dieser Repräsentanten** verwenden.

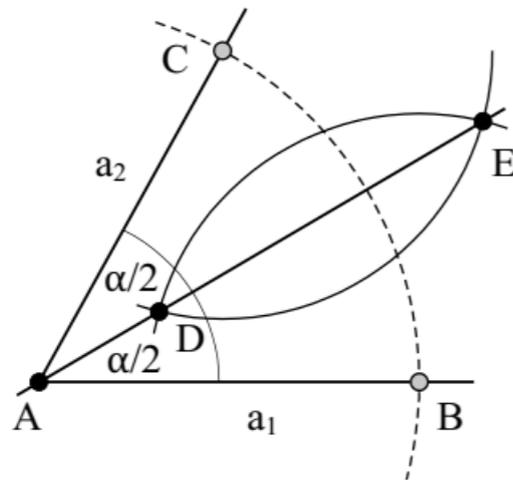
Mittelpunkt einer Strecke konstruieren



Konstruktionsschritt	Erläuterung
1. $k_1(A; r_1 > \frac{s}{2})$	
2. $k_2(B; r_2 = r_1)$	
3. $k_1 \cap k_2 = \{C, D\}$	Die Schnittmenge beider Kreise liefert die Punkte C und D.
4. $CD \cap \overline{AB} = \{M\}$	Die Schnittmenge der Geraden CD und der Strecke \overline{AB} ist der Mittelpunkt M der Strecke \overline{AB} .

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp, 2018, S. 267

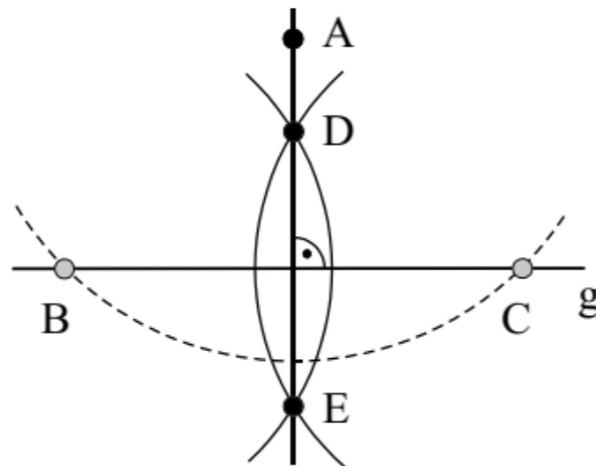
Winkel halbieren



Konstruktionsschritt	Erläuterung
<ol style="list-style-type: none"> 1. $k_1(A; r_1 \text{ bel.})$ 2. $k_1 \cap a_1 = \{B\}, k_1 \cap a_2 = \{C\}$ 3. $k_2(B; r_2 > \frac{l(BC)}{2})$ 4. $k_3(C; r_3 = r_2)$ 5. $k_2 \cap k_3 = \{D, E\}$ 6. \overrightarrow{AE} 	<p>Die Halbgerade durch die Punkte A und E (bzw. D) ist die gesuchte Winkelhalbierende.</p>

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp, 2018, S. 267

Lot auf eine Gerade durch einen Punkt konstruieren



Konstruktionsschritt	Anmerkung
1. $k_1(A; r_1)$	r_1 muss größer als der Abstand von A zu g sein.
2. $k_1 \cap g = \{B, C\}$	
3. $k_2(B; r_2 > \frac{l(\overline{BC})}{2})$	Durch geeignetes Anlegen des Geodreiecks (siehe Abbildung 191) lässt sich das Lot schnell fällen.
4. $k_3(C; r_3 = r_2)$	
5. $k_2 \cap k_3 = \{D, E\}$	
6. $AE = DE = AD$ ist das Lot durch A auf g.	

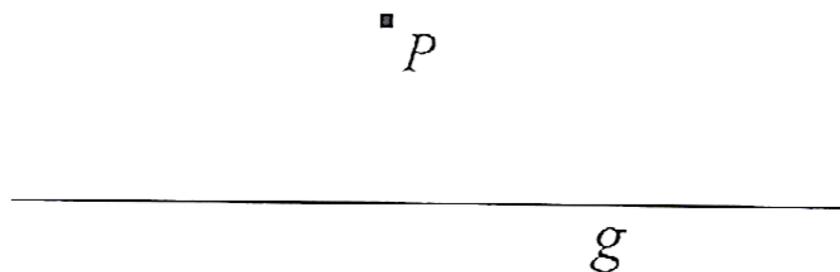
Benölken, Gorski, & Müller-Philipp, 2018, S. 267

Ein Beispiel

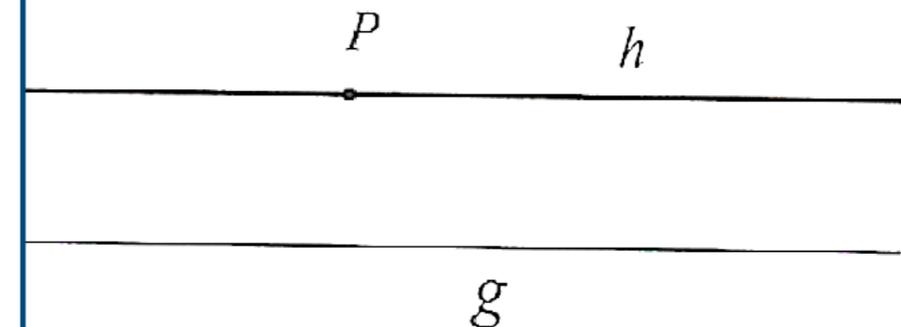
Zur Ausgangskonfiguration:
Welche geometrischen Objekte?
Welches System von Beziehungen?

Konstruiere mit Zirkel und Lineal eine Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden.

Ausgangskonfiguration: Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$.



Zielkonfiguration:



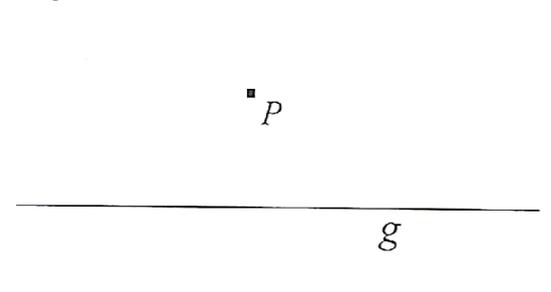
Weigand, 2014, S. 65

Führen Sie die beiden Konstruktionen durch! Sind die Beschreibungen gut nachvollziehbar und vollständig?

Ein Beispiel

- häufig gibt es mehrere Lösungswege, das heißt verschiedene Konstruktionsschritte führen zur Zielkonfiguration
- zu unserem Beispiel:

Ausgangskonfiguration: Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$.



- Bogen mit Radius r um P , der g in einem Punkt Q schneidet
- Abtragen des Radius r auf der Geraden g (Punkt R)
- Bogen mit dem Radius r um Punkt R , der den ersten Bogen in Punkt S schneidet
- Gerade durch S und P ist die Parallele

Schlage mit dem Zirkel um den Punkt P einen Kreis, dessen Radius so groß ist, dass er die gegebene Gerade an zwei Stellen schneidet.

Um diese beiden Schnittpunkte schlägst du dann jeweils einen weiteren Kreis mit gleichem Radius. Diese beiden Kreise schneiden sich an zwei Stellen (eine davon ist der gegebene Punkt P). Zeichne nun eine Gerade durch die Schnittpunkte der beiden zuletzt gezeichneten Kreise und benenne sie mit s .

Die Gerade s steht senkrecht auf der gegebenen Geraden g und verläuft durch den Punkt P .

Die Gerade s schneidet auch den zuerst gezeichneten Kreis um den Punkt P . Schlage um diese beiden Schnittpunkte jeweils einen weiteren Kreis mit etwas größerem Radius, so dass sich diese beiden Kreise schneiden. Zeichne dann eine Gerade durch die beiden Schnittpunkte dieser beiden Kreise.

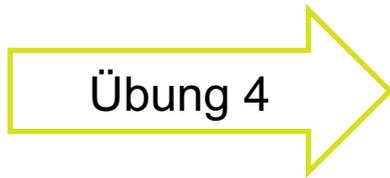
Diese Gerade steht senkrecht auf der Geraden s und ist damit parallel zur Geraden g . Sie verläuft auch durch den Punkt P . Sie ist also die gesuchte Gerade.

Konstruktionsbeschreibungen

- sollen eine nachvollziehbar und vollständige Beschreibung der einzelnen Konstruktionsschritte geben
- Sprache der Beschreibung ist dem sprachlichen Niveau der Lernenden angepasst
- von umgangssprachlichen Formulierungen zu einer zunehmend formalisierten Darstellung

Konstruktionsbeschreibungen

- sind für Schüler eine Dokumentation des eigenen Lösungsweges
- sind für Schüler und Lehrer eine Kontrolle des Lösungsweges, Nachvollziehen der Konstruktion
- sind ein Anlass zum Verbalisieren der vollzogenen Handlungen
- dienen zur Kommunikation im Unterricht

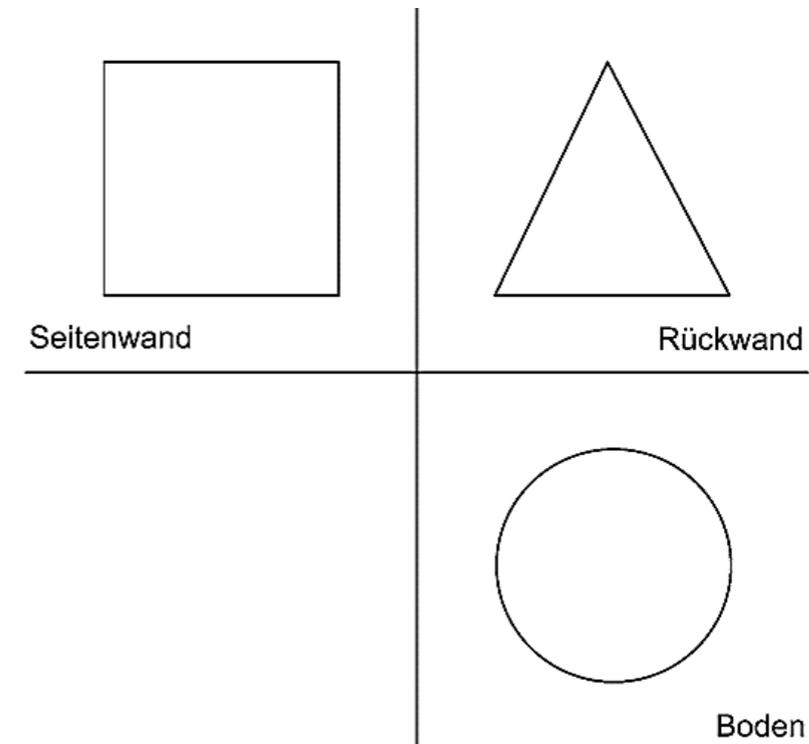


Übung 4

Weigand, 2014, S. 67

Nochmal zur Dreitafelprojektion

Stellen Sie sich vor, Sie beleuchten einen Körper von drei Seiten: Exakt von vorne, von der Seite und von oben. Sie sehen nun die Schatten des Körpers an den drei Wänden: Auf dem Boden einen kreisförmigen Schatten, an der Rückwand einen dreieckigen Schatten und an der Seitenwand einen quadratischen Schatten.



Wie sieht demnach der Schatten werfende Körper aus?

Kann es einen solchen Körper überhaupt geben?

Experimentieren Sie - versuchen Sie den Körper aus Knetmasse zu modellieren oder aus einer großen Kartoffel auszuschneiden.

Tipp: Beginnen Sie damit, die kreisförmige Ansicht herzustellen, z. B. als lange Knetmassenrolle. Überlegen Sie dann, wie Sie diese Knetrolle so „zuschneiden“ können, dass auch die beiden anderen Ansichten als Quadrat und Dreieck zu sehen sind.

- Benölken, R., Gorski, H. J., & Müller-Philipp, S. (2018). Leitfaden Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Franke, M., & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.
- Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie. Berlin Heidelberg: Springer.
- Weigand, Hans-Georg (2009): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I, Heidelberg, Spektrum Verlag.

Ich kann...

- dreidimensionale Objekte mit Projektionen (insbesondere Dreitafelprojektion und Schrägbilder) darstellen und konstruieren.
- Eigenschaften sowie Vor- und Nachteile verschiedener Darstellungen nennen.
- Zeichenhilfen zur räumlichen Darstellung geometrischer Körper im Geometrieunterricht sowie deren Potenziale und Grenzen nennen.
- Konsequenzen für den Geometrieunterricht ableiten.
- Arten des Zeichnens ebener Figuren beschreiben und Zeichenwerkzeuge der Grundschule charakterisieren.
- Konstruieren und Zeichnen charakterisieren.
- Grund- und Standardkonstruktionen mit Zirkel und Lineal nennen, erzeugen und passende Konstruktionsbeschreibungen anfertigen sowie lesen und realisieren.
- Aspekte zur didaktischen Bedeutung von Konstruktionsaufgaben und des Anfertigens von Konstruktionsbeschreibungen nennen.
- Baupläne von Würfelgebäuden anfertigen, lesen und realisieren.

Zum Nach- und Weiterlesen

Didaktischer Hintergrund (Primarstufe):

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag. **Kapitel 11 „Zeichnen“**.

Projektionen:

Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie. Berlin Heidelberg: Springer. (<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-47206-4>). **Kapitel 6 „Realität abbilden, planen und entwerfen“**.

Zeichnen und Konstruieren:

Weigand, H.-G. (2014): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I, Heidelberg, Spektrum Verlag. (<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-37968-0>). **Kapitel III „Konstruieren“**.

Grund- und Standardkonstruktionen:

Benölken, R., Gorski, H. J., & Müller-Philipp, S. (2018). Leitfaden Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden. (<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-23378-5>). **Kapitel 5 „Geometrische Konstruktionen“**.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Mitarbeit
und bis nächsten Dienstag!

Bitte legen Sie beim nächsten Mal
Lineal/ Geodreieck, Zirkel,
Faltpapier und Schere bereit!

