Universität des Saarlandes

Didaktik der Mathematik in der Primarstufe III

Didaktik der Geometrie

05 - Ebene Figuren I

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Melanie Platz

Themenübersicht

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Datum	Nr.	Thema	Grundidee
11.04.23	**01**	Organisatorisches & Einführung	
18.04.23	**02**	Entwicklung räumlicher Fähigkeiten	
25.04.23	**03**	Geometrische Begriffe und Wissenserwerb	
02.05.23	**04**	Zeichnen und Konstruieren	Formen und ihre Konstruktion
09.05.23	**05**	Ebene Figuren I	
16.05.23	**06**	Ebene Figuren II & Räumliche Objekte	
23.05.23	**07**	Symmetrie I (Kongruenzabbildungen)	Operieren mit Formen
30.05.23	**08** (entfällt)	--	
06.06.23	**09**	Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette)	
13.06.23	**10**	Falten	
20.06.23	**11**	Längen, Flächen und Volumina I	Maße und Formeln
27.06.23	**12**	Längen, Flächen und Volumina II	Geom. Gesetzm. & Muster
04.07.23	**13**	Pläne & Maßstäbe, Wiederholung & Fragen I	Koordinaten
11.07.23	**14** (online)	Wiederholung & Fragen II	
18.07.23	**15**	**Klausur**	

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- In der Grundschule werden die Grundformen **Kreis, Dreieck, Viereck** und als spezielle Vierecke **Rechteck** und **Quadrat** behandelt.
- Kreis, Dreieck und Viereck sind den Kindern aus dem Alltag bekannt, sie finden in Analogie auch Fünfecke und Sechsecke.

Franke & Reinhold (2016), S. 241

Einstimmung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Der Lernprozess sollte von den vorschulischen Erfahrungen der Kinder ausgehen:

1. Geometrische Figuren in der Umgebung suchen
2. Erzeugen von Figuren
   → Erste Eigenschaften der Figuren werden erkannt
3. Zielgerichtetes Untersuchen der Figuren, Ordnen und Sortieren, Variieren, Verändern
4. Anwenden der Eigenschaften beim Herstellen, Identifizieren oder Überprüfen, ob eine Figur dazugehört oder nicht

Übung 5

Franke & Reinhold (2016), S. 242

Ebene Figuren I

	Ich kann…
☐	beschreiben, welche Stufen der Lernprozess zum Thema „Ebene Figuren“ beinhalten sollte und Lern-/ Spielsituationen ableiten, die ein Durchlaufen dieses Prozesses ermöglichen.
☐	Lernsituationen beschreiben, die Kinder beim ganzheitlichen Erfassen geometrischer Grundformen unterstützen.
☐	formulieren, was Kinder am Ende der 4. Klasse über den Kreis und das Dreieck wissen sollten.
☐	Lernsituationen beschreiben, die das Erzeugen von Kreisen und Dreiecken, das Entdecken charakteristischer Eigenschaften und das vertiefende Erkunden ermöglichen.
☐	„Kreis“ sowie wichtige Begriffe in diesem Zusammenhang (Sehne, Sekante, Tangente, Passante) definieren.
☐	„Dreieck“ definieren sowie wichtige Begriffe in diesem Zusammenhang (Winkel, Winkeltypen, Innenwinkel) und charakteristische Eigenschaften nennen (Innenwinkelsumme).
☐	Dreiecke nach Seitenlängen und Innenwinkeln klassifizieren.
☐	Begründen, dass jedes gleichseitige Dreieck gleichschenklig ist.
☐	Besondere Linien am Dreieck nennen, definieren und konstruieren (falten) (Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Höhe) und deren Schnittpunkte benennen (Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt)
☐	Umkreis und Inkreis eines Dreiecks konstruieren und begründen, warum die Konstruktion funktioniert.
☐	Lernsituationen mit Tangram beschreiben, die das Erzeugen von Vierecken, das Entdecken charakteristischer Eigenschaften und das vertiefende Erkunden ermöglichen.

ElMa
WiSe
21/22

Ebene Figuren I

- Ganzheitliches Erfassen geometrischer Grundformen
- Kreise
- Dreiecke
- Erzeugen von Vierecken
- Tangram

Ganzheitliches Erfassen geometrischer Grundformen

Ganzheitliches Erfassen geometrischer Grundformen

- Geometrische Grundformen sind abstrakte Gebilde.
- man kann sie aber in viele Dinge unserer Umgebung hineinsehen

Abbidlungsquelle: Helmerich & Lengnink (2016)

- Die Kinder erkennen noch nicht die Merkmale der Objekte, sondern nehmen die Figuren ganzheitlich wahr.

Niveaustufe 0
des Van-Hiele-Modells

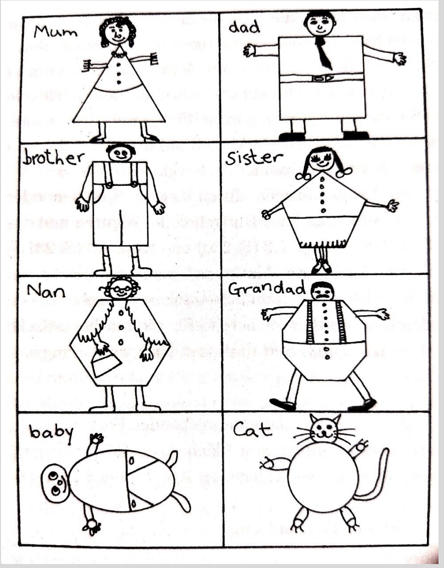
Franke & Reinhold (2016), S. 242f

Ganzheitliches Erfassen geometrischer Grundformen

Einbettung in Fantasieerzählungen

- Gespensteraufgaben (Keller, 1995)
- Bilderbuch „Paulas Reisen" (Maar, 2007)

Franke & Reinhold (2016), S. 243f



„Shape Family" (Brewer & Cranmer, 1988)

Maar, 2007

Ganzheitliches Erfassen geometrischer Grundformen

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Authentische Begegnungen mit Flächenformen

„Erst wenn Kinder Formen in der sie umgebenden Umwelt **entdecken**, diese **benennen, beschreiben und zueinander in Beziehung** setzen, wird es ihnen möglich, auch langfristig mathematische Konzepte mit Alltagserfahrungen zu verbinden.“ (Franke & Reinhold, 2016, S. 244)

- Flächenformen bewusst als Abgrenzung von Körpern erkennen, Umrisse räumlicher Objekte zeichnen
- Körpernetze
- Suche nach geometrischen Formen als Teil der (gestalteten) Umwelt

Franke & Reinhold (2016), S. 244f

Kreise

Kreise

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- Bei Kreisen haben die Kinder keine Probleme beim identifizieren

  → Denn: Alle Kreise sind ähnlich.

- Am Ende der 4. Klasse sollten die Kinder wissen:

Ein Kreis ist eine ebene Figur. Jeder Punkt der Kreislinie hat den gleichen Abstand vom Mittelpunkt. Diesen Abstand nennt man Radius.

Franke & Reinhold (2016), S. 245

Kreise

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Das Erzeugen von Kreisen

- Beispielsweise:
  - Zylinderförmige Dose mit Stift umfahren
  - Drucken mit Flaschenkorken
  - Zerschneiden einer Knetkugel

  → **ACHTUNG: Diese Verfahren liefern zwar Repräsentanten des Kreises, lassen aber kaum etwas über die Eigenschaften dieser Figur erkennen!**

Kinder erklären, warum ein Kreis entsteht.

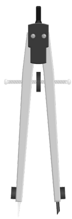
  - Gärtnerkonstruktion:

Franke & Reinhold (2016), S. 246

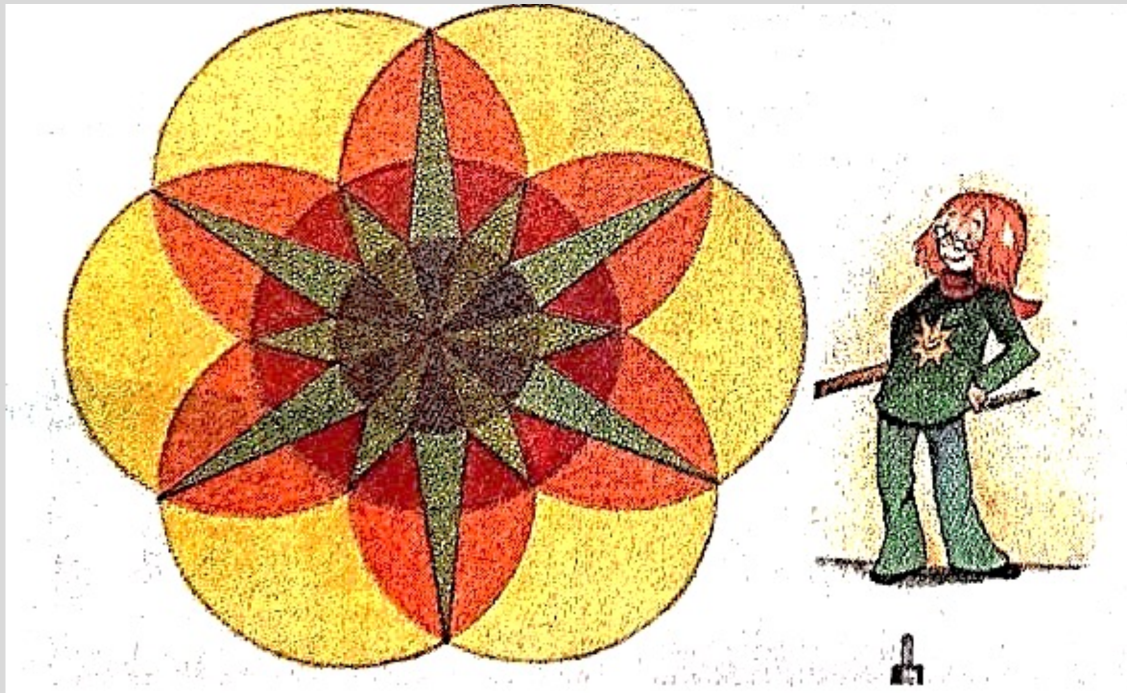
Zeichnen ebener Figuren

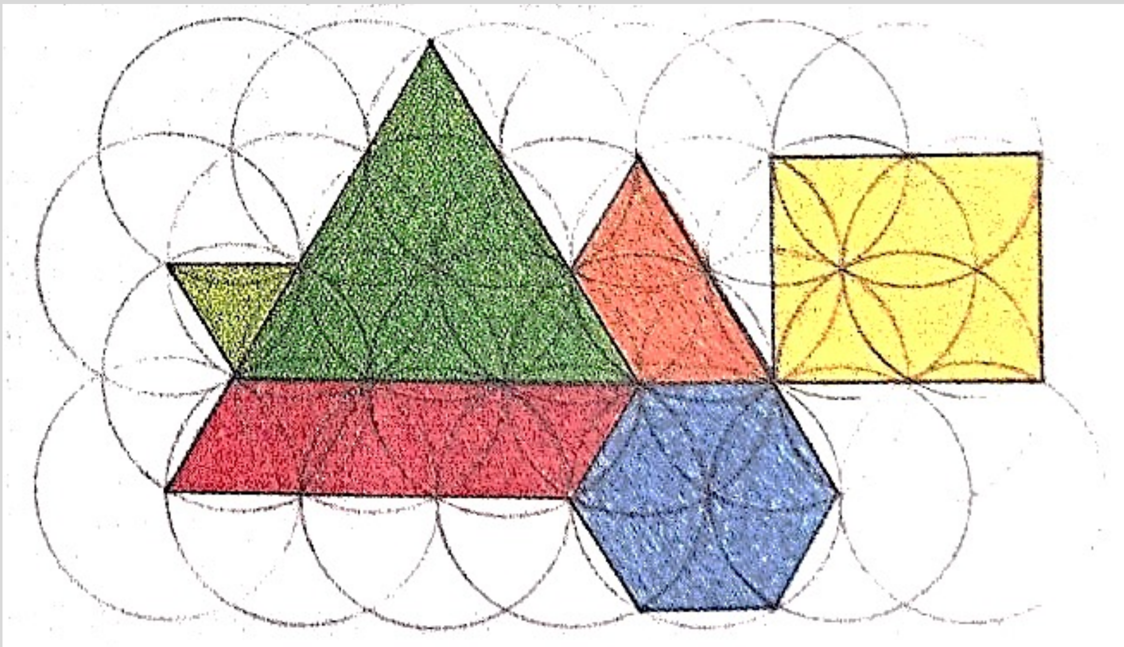
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Zeichnen mit Zeichengeräten

Zirkel 

- Wichtig: Qualität des Zirkels
- Mandalas





Matheprofis 4, S. 32f

Franke & Reinhold, 2016, S. 351f

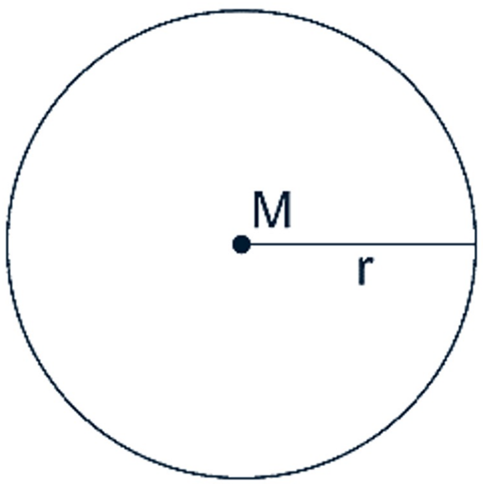
Kreise

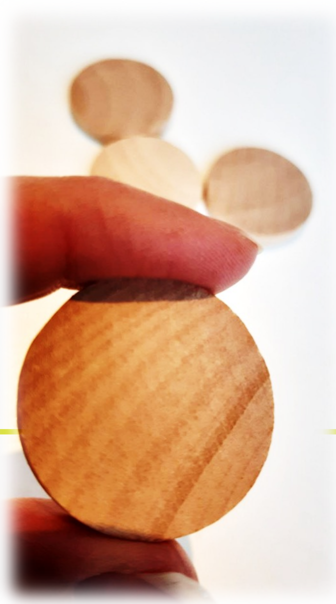
Nehmen Sie sich einen runden Gegenstand. Stellen oder legen Sie ihn so auf ein Papier, dass Sie seine kreisförmige Begrenzung auf das Papier übertragen können.
Schneiden Sie den Kreis aus. Finden Sie den Mittelpunkt Ihres Kreises.

ElMa WiSe 21/22

Definition: Kreis

Ein **Kreis $K_{M;r}$** ist die **Menge aller Punkte** einer Ebene, die einen **konstanten Abstand zu einem vorgegebenen Punkt** dieser Ebene, dem **Mittelpunkt M**, haben. Der Abstand der Kreispunkte zum Mittelpunkt ist der **Radius r** des Kreises, er ist eine positive reelle Zahl.





→ **Unser Ziel:** die exakte Lage des Mittelpunktes herausfinden.

Helmerich & Lengnink (2016), S. 72f

Kreise

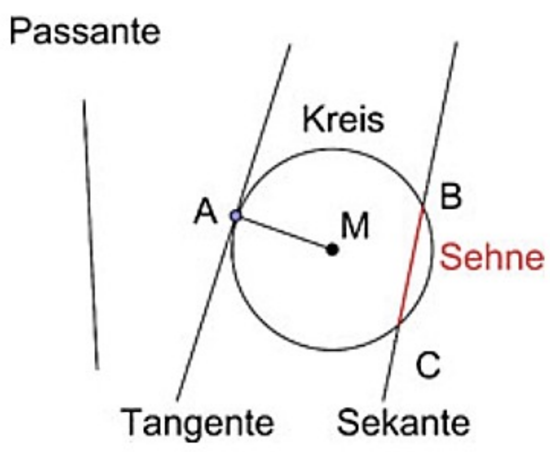
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 21/22

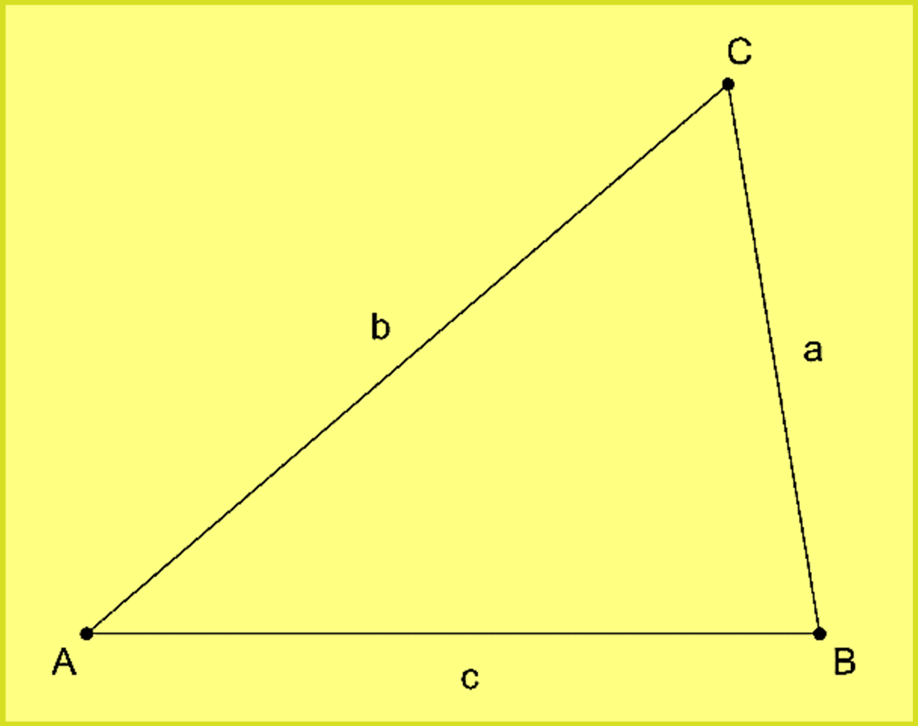
Definition: Sehne, Sekante, Tangente, Passante

Eine Gerade kann zum Kreis verschiedene Lagen einnehmen:

- Eine Gerade, die einen vorgegebenen Kreis nicht schneidet, wird **Passante** genannt.
- Eine Gerade, die einen vorgegebenen Kreis in genau einem Punkt schneidet, wird **Tangente** genannt.
- Eine Gerade, die einen vorgegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet, wird **Sekante** genannt, die Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten wird Sehne genannt.
- Eine **Sehne** (bzw. die auch dadurch bezeichnete Länge dieser Sehne) durch den Mittelpunkt wird Durchmesser des Kreises genannt.



Helmerich & Lengnink (2016), S. 74



Dreiecke

- Entdeckungen von Seitenlängen beim Legen mit Hölzchen
- Erfahrungen zu Winkelgrößen in kongruenten und ähnlichen Dreiecken
- Vertiefende Erkundungen mit dem Geobrett
- Falten zum Erkunden von Symmetrieeigenschaften des Dreiecks
- Zerlegungen von Vierecken und Dreiecken
- Stimmt das? – Aufgaben
- Klassifikation von Dreiecken

Dreiecke

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- Den Kindern aus der Arbeit mit Legematerial relativ vertraut.
- Das Merkmal „drei Ecken zu haben“ erfassen die Kinder selbständig

- Am Ende der 4. Klasse sollten die Kinder wissen:

Ein Dreieck ist eine ebene Figur mit drei Ecken und drei Seiten. Dreiecke gibt es in verschiedenen Formen, wobei alle Seiten gleich lang, zwei Seiten gleich lang oder alle Seiten unterschiedlich lang sein können.

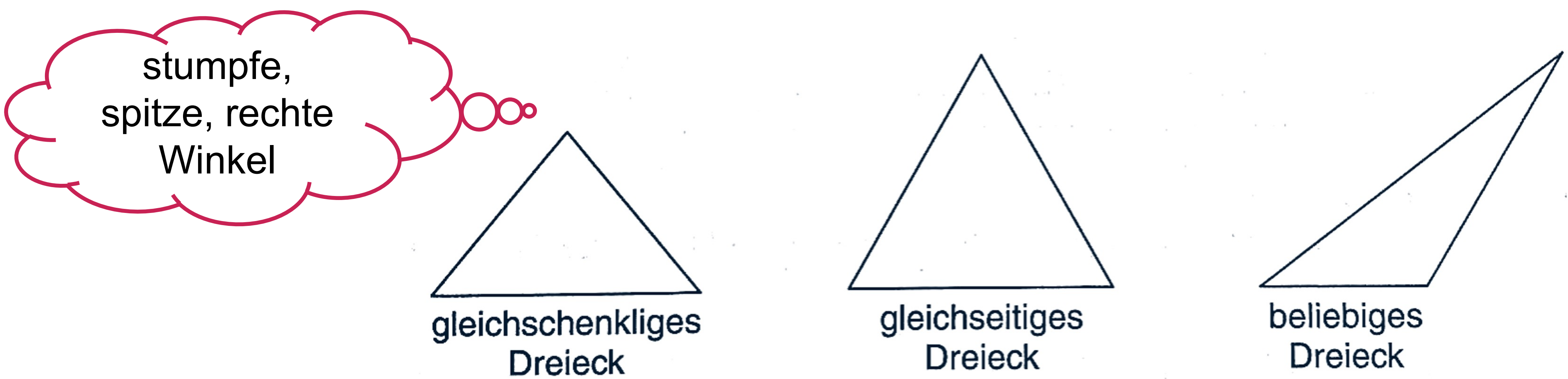
Franke & Reinhold (2016), S. 246f

Dreiecke

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Entdeckungen von Seitenlängen beim Legen mit Hölzchen

1. Die Kinder legen möglichst viele verschiedene Dreiecke mit unterschiedlich langen Holzstäbchen
2. Die gefundenen Dreiecke werden fixiert (z.B. aufgeklebt)
3. Die Kinder überlegen, was die Dreiecke gemeinsam haben und worin sie sich unterscheiden

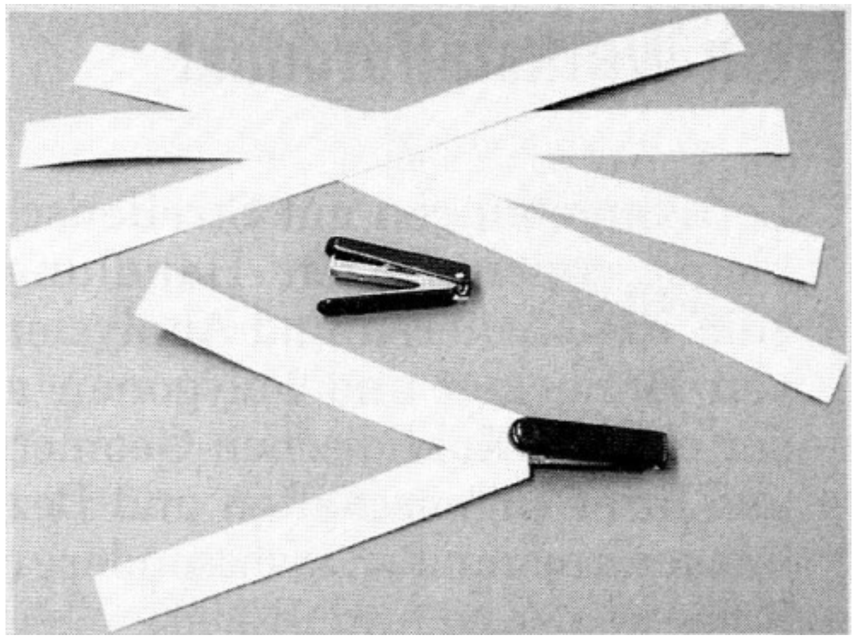


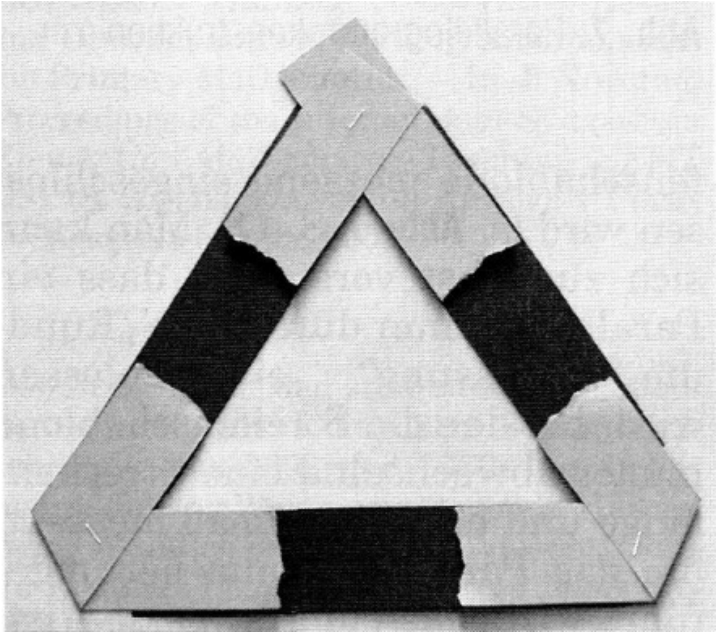
Franke & Reinhold (2016), S. 248f

Dreiecke

Erfahrungen zu Winkelgrößen in kongruenten und ähnlichen Dreiecken

- Streifenschablonen (Wollring, 2004)
  - Nutzung als Zeichenwerkzeug
  - Herstellung von kongruenten Kopien eines Dreiecks und ähnlicher Dreiecke (durch Übertrag des Winkels auf längere Pappstreifen)



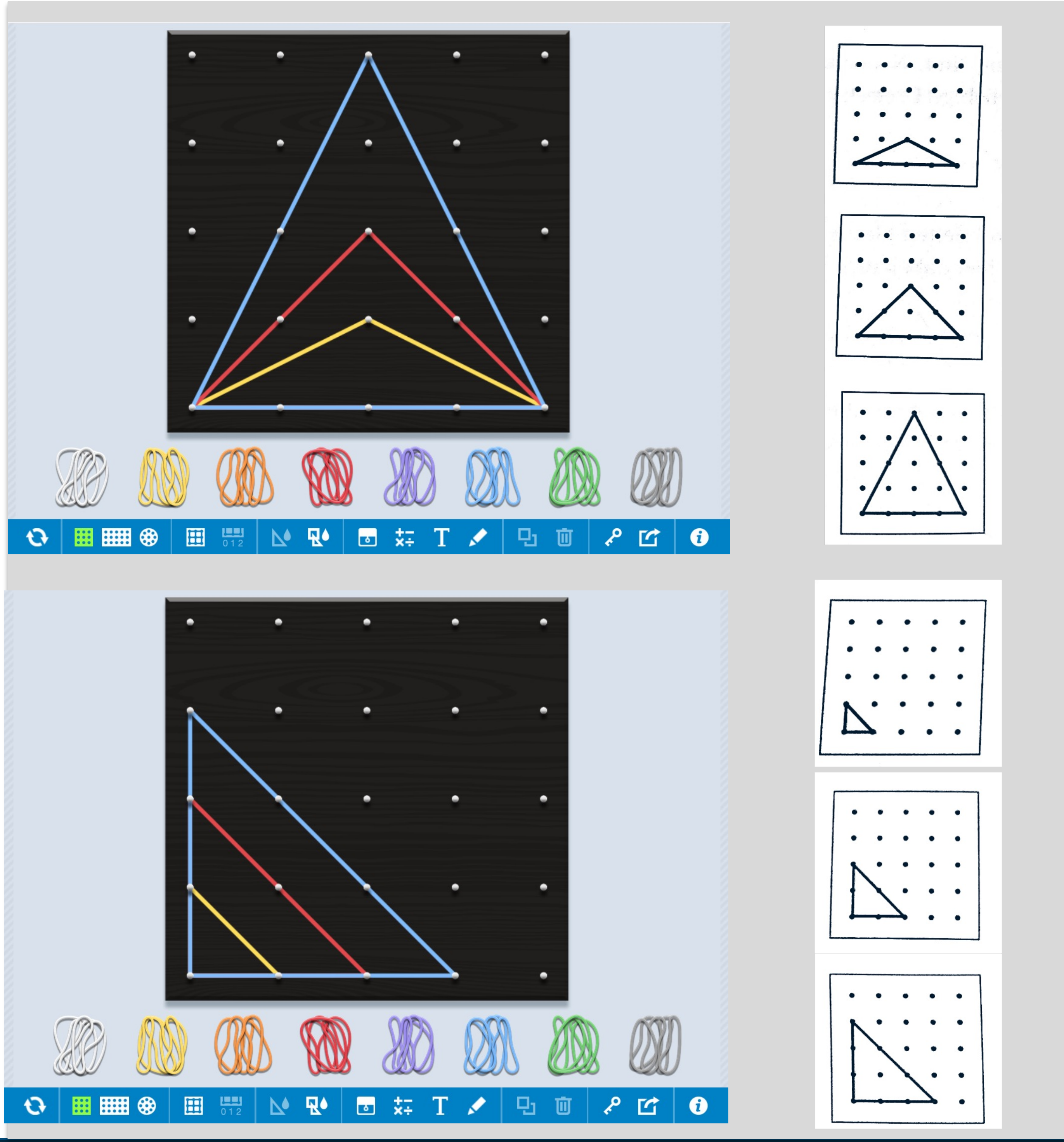


Franke & Reinhold (2016), S. 248f; Wollring (2004), S. 10 & 11

Dreiecke

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/



Vertiefende Erkundungen mit dem Geobrett

Ausgangspunkt:

gleichschenkliges Dreieck, das so verändert werden soll, dass auch die neu gespannte Figur gleichschenklig ist.

Franke & Reinhold (2016), S. 249f

Dreiecke

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Falten zum Erkunden von Symmetrieeigenschaften des Dreiecks

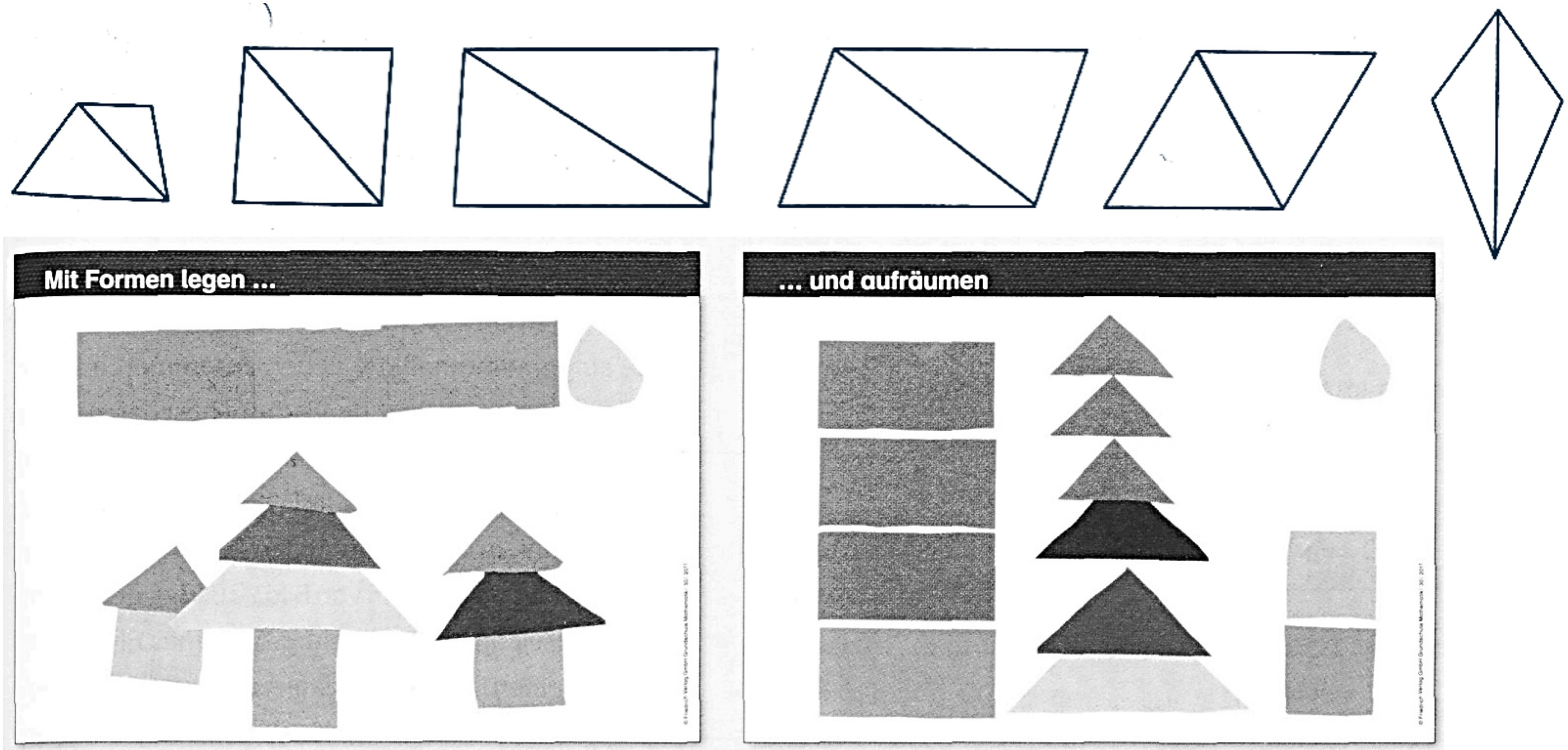
- Dreiecksformen auf Papier übertragen und so falten, dass die Teile deckungsgleich sind
  → Dreiecke mit mindestens zwei gleich langen Seiten sind deckungsgleich.

Franke & Reinhold (2016), S. 250

Dreiecke

Zerlegungen von Vierecken und Dreiecken

- Falten, schneiden und legen



Franke & Reinhold (2016), S. 251; Roos (2011), S. 7

Dreiecke

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Stimmt das?

- Gleichseitige Dreiecke haben zwei gleich große Winkel. Stimmt das?
- Ein Quadrat lässt sich in vier gleiche Dreiecke zerlegen. Zeige, dass die Behauptung stimmt.
- Gleichseitige Dreiecke sind immer auch gleichschenklig. Begründe.

Franke & Reinhold (2016), S. 251

Dreiecke

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 21/22

Klassifikation von Dreiecken

Definition: Dreieck

Ein Dreieck ist eine ebene Figur mit **drei Ecken** und **drei Seiten**.

Klassifikation von Dreiecken nach Seitenlänge:

- Alle drei Seiten des Dreiecks sind gleich lang: Dann nennen wir das Dreieck **gleichseitig**.
- Mindestens zwei Seiten des Dreiecks sind gleich lang: Dann nennen wir das Dreieck **gleichschenklig**.
- Über die Länge der Seiten des Dreiecks ist nichts ausgesagt. Hierfür gibt es keinen eigenen Namen, man könnte es ein **allgemeines Dreieck** nennen.

Satz: Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichschenklig.

Begründen Sie.

Helmerich & Lengnink (2016), S. 45

Dreiecke

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 21/22

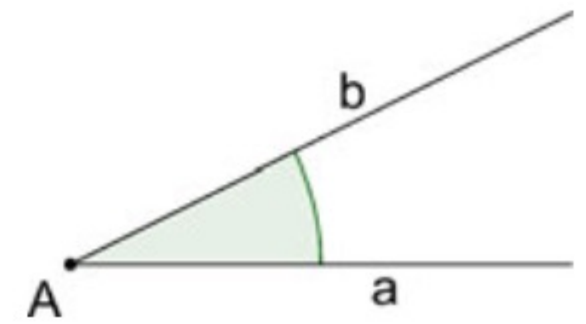
Klassifikation von Dreiecken

Klassifikation nach Innenwinkeln

Definition: Winkel

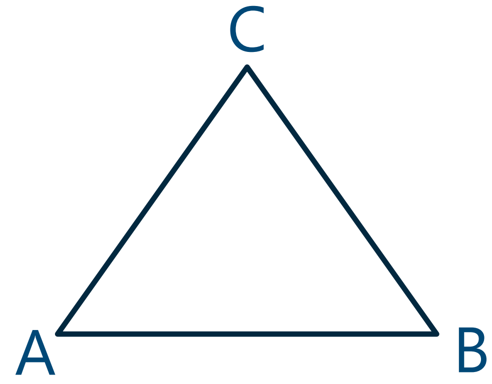
Ein Winkel ist ein Teil der Ebene, der von zwei in der Ebene liegenden **Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt** wird.

Dabei ist eine **Halbgerade** eine auf einer Seite durch ihren Anfangspunkt begrenzte gerade Linie, die in der anderen Richtung unendlich fortgesetzt ist. Der gemeinsame Anfangspunkt der beiden Halbgeraden wird **Scheitelpunkt des Winkels** genannt. Die Halbgeraden heißen **Schenkel des Winkels**.



Helmerich & Lengnink (2016), S. 45

Dreiecke



ElMa WiSe 21/22

Klassifikation von Dreiecken

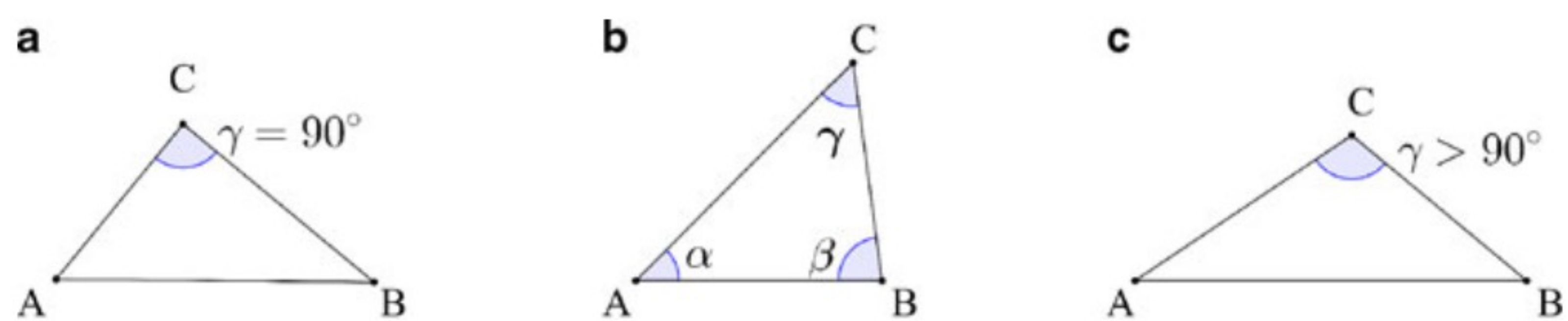
Im Dreieck ABC sind damit die Innenwinkel <BAC, <ACB und <CBA gemeint.

Klassifikation nach Innenwinkeln

Definition: Innenwinkel

In einem Dreieck heißen die **innerhalb des Dreiecks liegenden Winkel** Innenwinkel.

- Ein Dreieck heißt **spitzwinklig**, wenn es nur spitze Innenwinkel hat (siehe b).
- Ein Dreieck heißt **stumpfwinklig**, wenn ein Innenwinkel stumpf ist (siehe c).
- Ein Dreieck heißt **rechtwinklig**, wenn ein Innenwinkel ein rechter Winkel ist (siehe a).



Ist ein Dreieck, das nicht stumpfwinklig und nicht rechtwinklig ist, schon spitzwinklig?

Helmerich & Lengnink (2016), S. 48

Dreiecke

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 21/22

Klassifikation von Dreiecken

Klassifikation nach Innenwinkeln

Satz: Innenwinkelsumme im Dreieck

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks (in der Euklidischen Geometrie) beträgt **180°**.

Helmerich & Lengnink (2016), S. 50

→ **Unser Ziel:** die exakte Lage des Mittelpunktes eines Kreises herausfinden.

ElMa WiSe 21/22

Besondere Linien am Dreieck

Besondere Linien am Dreieck

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Falten besonderer Linien am Dreieck

- Schneiden Sie aus nicht zu dünnem Papier ein Dreieck aus.
  Die Form des Dreiecks ist im Prinzip beliebig, für die Erkundung empfiehlt es sich jedoch, ein „allgemeines“ Dreieck zu nehmen, z. B. ein Dreieck mit den Seitenlängen 8 cm, 7 cm und 6 cm.

- Führen Sie nun – abhängig von der Gruppe, in die sie eingeteilt sind, einen der folgenden vier Faltaufträge aus und notieren Sie Ihre Beobachtungen.

Helmerich & Lengnink (2016), S. 76

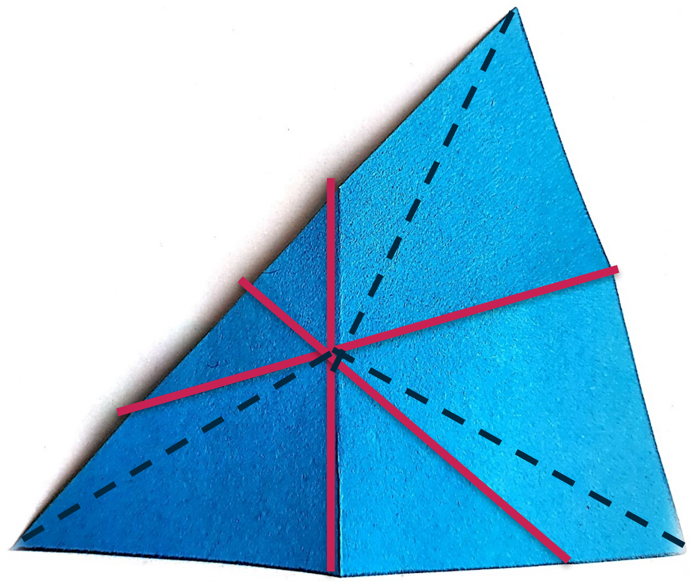
Besondere Linien am Dreieck

Falten besonderer Linien am Dreieck

Auftrag 1

Falten Sie die zwei Ecken des Dreiecks so aufeinander, dass die jeweilige Verbindungskante zur Deckung kommt. Falzen Sie die Faltkante sorgfältig glatt und falten dann das Dreieck wieder auf. Führen Sie diesen Vorgang für alle Eckenpaare nacheinander durch.

a) Wie lassen sich die dabei entstehenden Faltlinien beschreiben? Was zeichnet alle Punkte auf jeweils einer der Faltlinien aus? In welcher Beziehung stehen die Faltlinien zu den Seiten des Dreiecks? Was machen die Faltlinien mit den Seiten des Dreiecks?
b) Betrachten Sie nun die Lage der drei entstandenen Faltlinien zueinander. Was fällt Ihnen auf?
c) Welcher Punkt wird durch den gemeinsamen Schnittpunkt der Faltlinien beschrieben? In welchem Abstand liegen die Ecken des Dreiecks zum Schnittpunkt der Faltlinien?



- Mittelsenkrechten
- Schnittpunkt: Mittelpunkt des Umkreises

Helmerich & Lengnink (2016), S. 77

Besondere Linien am Dreieck

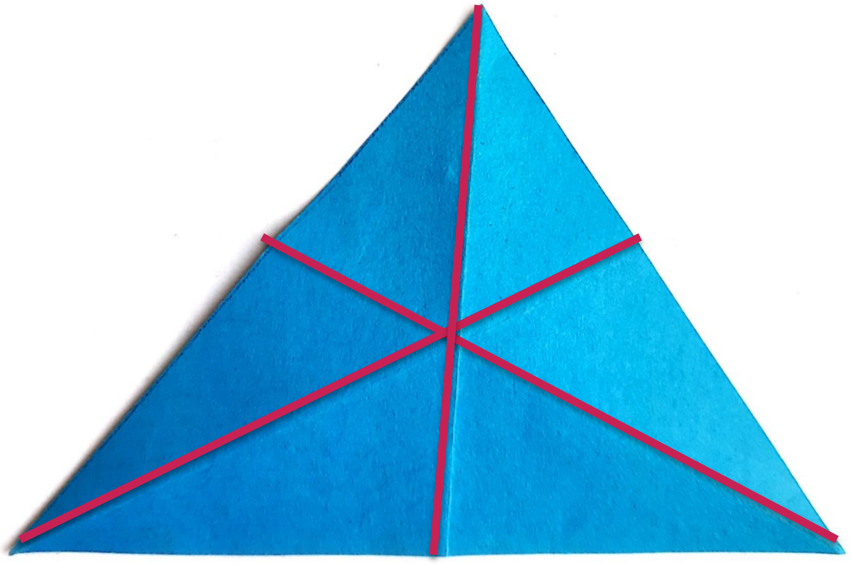
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Falten besonderer Linien am Dreieck

Auftrag 2

Falten Sie in Ihrem Dreieck zwei benachbarte Seiten so aufeinander, dass die Seiten exakt aufeinander zum Liegen kommen. Ziehen Sie den Falz dann sorgfältig glatt. Falten Sie das Dreieck wieder auf. Wiederholen Sie diesen Faltvorgang auch für die beiden anderen Seitenpaare.

a) Beschreiben Sie die Faltlinien. Was zeichnet alle Punkte auf jeweils einer der Faltlinien aus? Wie stehen die Faltlinien mit den Innenwinkeln des Dreiecks in Beziehung? Was machen die Faltlinien mit den Winkeln?
b) Betrachten Sie die Lage der drei Faltlinien zueinander. Was fällt Ihnen auf?
c) Welcher Punkt wird durch den gemeinsamen Schnittpunkt der Faltlinien beschrieben? Welchen Abstand hat der gemeinsame Schnittpunkt von allen drei Dreiecksseiten?



- Winkelhalbierende
- Schnittpunkt: Mittelpunkt des Inkreises

Helmerich & Lengnink (2016), S. 77

Besondere Linien am Dreieck

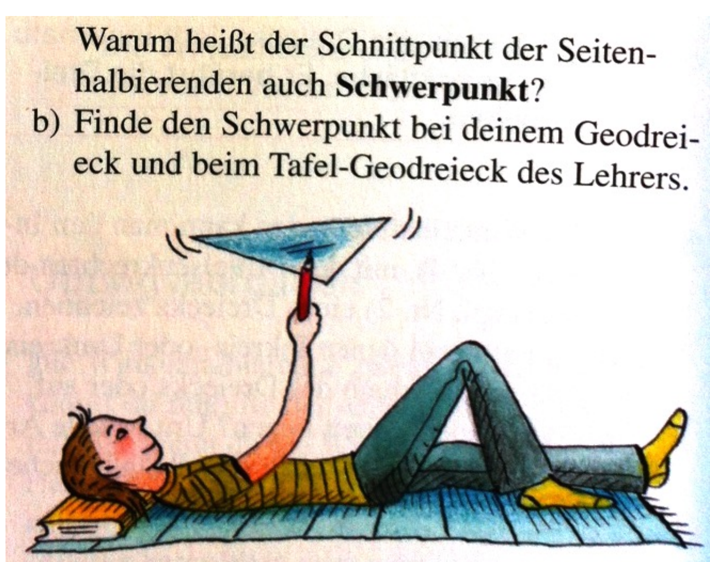
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Falten besonderer Linien am Dreieck

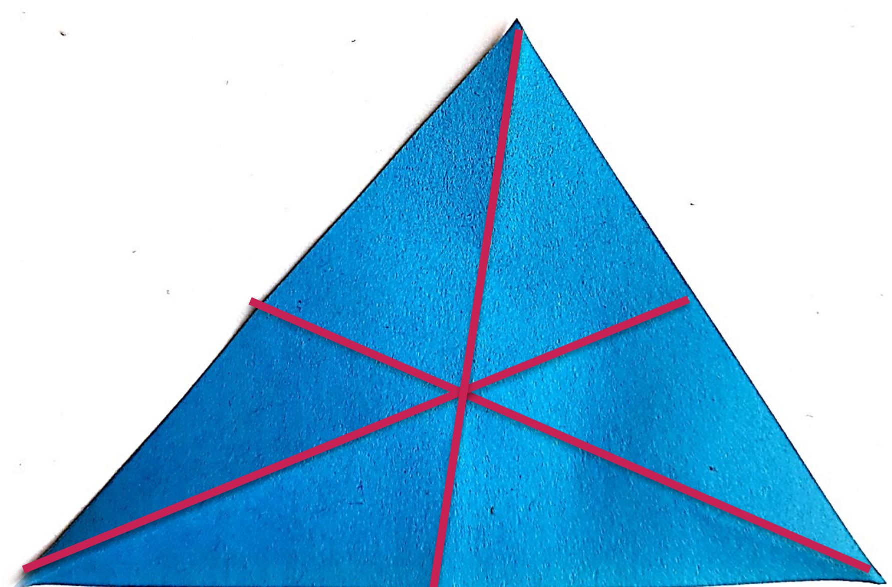
Auftrag 3

Halbieren Sie die Seitenlinien Ihres Dreiecks, indem Sie benachbarte Ecken aufeinanderfalten. Bestimmen so nacheinander die Seitenmitten von allen drei Dreiecksseiten. Machen Sie hierbei nur einen kleinen Knick auf der Dreiecksseite. Falten Sie nun entlang der Verbindungslinie von einer Seitenmitte zur gegenüberliegenden Ecke. Ziehen Sie den Falz dann sorgfältig glatt. Falten Sie zwischendurch Ihr Dreieck immer wieder auf und führen Sie diesen Faltvorgang für alle drei Seitenmitten durch.

a) Beschreiben Sie die Faltlinien. Was zeichnet alle Punkte auf jeweils einer der Faltlinien aus?
b) Stellen Sie sich vor, dass das Dreieck aus schwerer Pappe ist, die überall gleich viel wiegt. Jede Faltlinie teilt das Dreieck in zwei Teildreiecke. Können Sie sehen, dass sie gleich schwer sind?
c) Welcher Punkt wird also durch den gemeinsamen Schnittpunkt der Faltlinien hier beschrieben? Warum?


Warum heißt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden auch **Schwerpunkt**?
b) Finde den Schwerpunkt bei deinem Geodreieck und beim Tafel-Geodreieck des Lehrers.

Mathematik 3. XQuadrat.



- Seitenhalbierende
- Schnittpunkt: Schwerpunkt

Helmerich & Lengnink (2016), S. 77

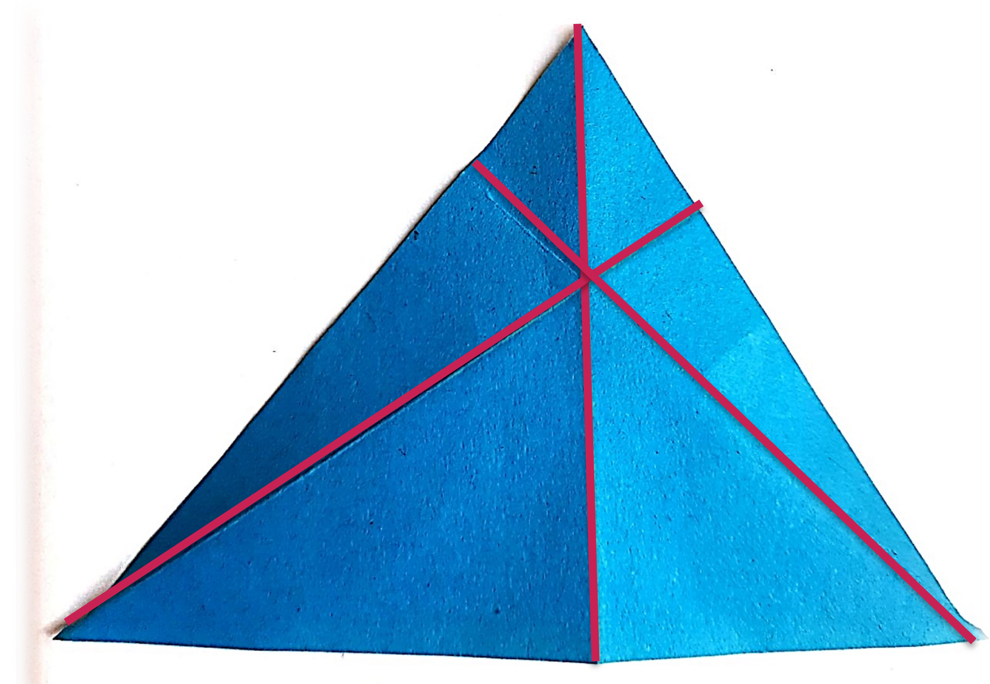
Besondere Linien am Dreieck

Falten besonderer Linien am Dreieck

Auftrag 4

Falten Sie nun Ihr Dreieck so, dass durch die Faltlinie von einer Ecke ausgehend ein Lot auf die gegenüberliegende Seite gefällt wird. (Falten Sie also eine Seite so aufeinander, dass die beiden Seitenstücke aufeinander zu liegen kommen und der Falz genau durch die der Seite gegenüberliegende Ecke verläuft.)

a) Beschreiben Sie die Faltlinien. Welche besondere Linie wird durch diesen Faltauftrag erzeugt?
b) Betrachten Sie die Faltlinien. Treffen sich auch diese Faltlinien wieder in einem Punkt? Begründen Sie Ihre Antwort.



- Höhen
- Schnittpunkt: Höhenschnittpunkt

Helmerich & Lengnink (2016), S. 77

Besondere Linien am Dreieck

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Falten besonderer Linien am Dreieck

Definition: Mittelsenkrechte

Gegeben sei eine Strecke AB mit Mittelpunkt M. Die Mittelsenkrechte zu AB ist diejenige **Gerade m_{AB}, die senkrecht auf AB steht und durch M geht**.

Definition: Winkelhalbierende

Gegeben seien drei Punkte A; B und C. Die Halbgerade $w_{<BAC}$ ist die Winkelhalbierende des Winkels $<BAC$, wenn $w_{<BAC}$ im Inneren von $<BAC$ liegt **und für jeden Punkt P auf $w_{<BAC}$ gilt: $<BAP \cong <PAC$**

Definition: Seitenhalbierende

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Die Seitenhalbierende s_C ist die **Gerade durch den Punkt C und den Mittelpunkt M_{AB}** der Strecke AB.

Definition: Höhe

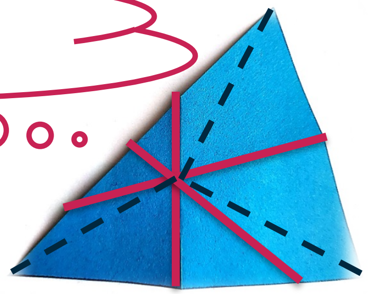
Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Die Höhe h_C ist die **Gerade durch den Punkt C senkrecht auf die Gerade AB.**

Helmerich & Lengnink (2016), S. 77

Besondere Linien am Dreieck

Die Mittelsenkrechten wurden durch Falten eines Eckpunktes
des Dreiecks auf einen anderen gewonnen. Die Punkte auf der so entstehenden
Faltlinie sind alle gleich weit von den beiden Eckpunkten entfernt.

Falten besonderer Linien am Dreieck



- Mittelsenkrechten
- Schnittpunkt: Mittelpunkt des Umkreises

Satz vom Mittellot

Ein Punkt liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten einer Strecke AB, wenn er von beiden Eckpunkten A und B den gleichen Abstand hat.

Satz vom Umkreismittelpunkt

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks. Der Umkreis ist der Kreis, auf dem alle drei Ecken des Dreiecks liegen.

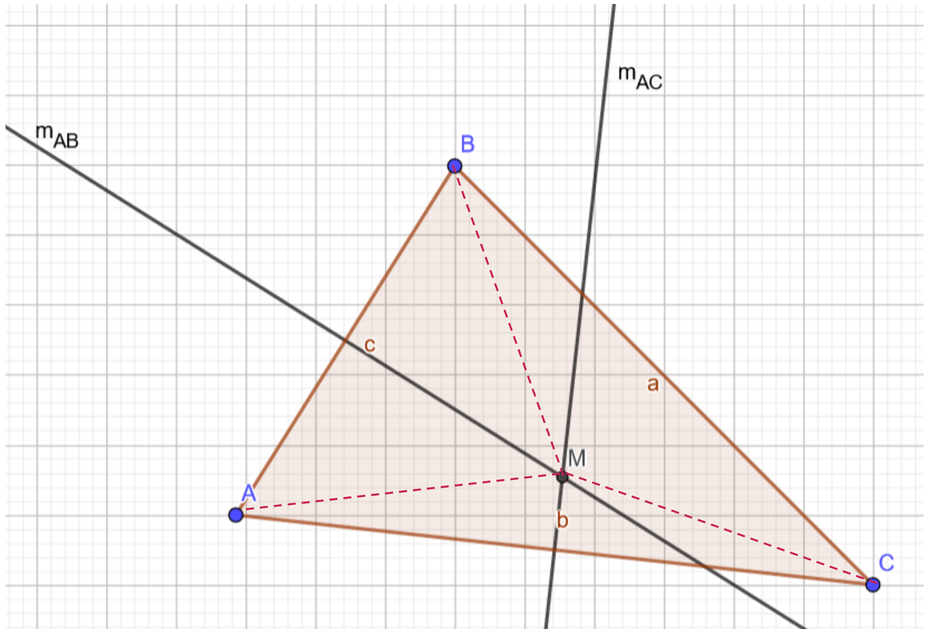
Beweis** (Satz vom Umkreismittelpunkt)**:

Sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{AC}, dann ist M von A und von B gleich weit entfernt, aber auch von A und von C (**Satz vom Mittellot**).

Damit gilt $|MA| = |MB| = |MC|$ und S liegt auf der Mittelsenkrechten m_{BC}.

Damit schneiden sich die drei Mittelsenkrechten im Punkt M und dieser ist der Umkreismittelpunkt.

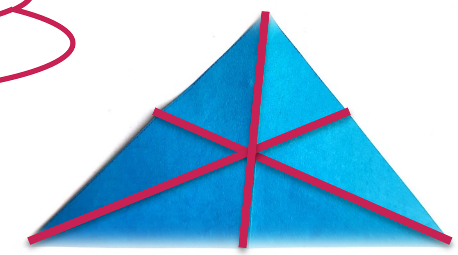
q.e.d.



Helmerich & Lengnink (2016), S. 79f

Besondere Linien am Dreieck

Beim Falten der Winkelhalbierenden wurden die Seiten des Dreiecks beim Falten aufeinander gelegt. Die so entstandene Faltlinie hat die Eigenschaft, dass ihre Punkte von den beiden Schenkeln des Winkels den gleichen Abstand haben. Damit ergibt sich als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks der Inkreismittelpunkt



- Winkelhalbierende
- Schnittpunkt: Mittelpunkt des Inkreises

Falten besonderer Linien am Dreieck

Satz von der Winkelhalbierenden

Ein Punkt liegt genau dann auf der Winkelhalbierenden eines Dreiecks, wenn er von beiden Schenkeln den gleichen Abstand hat.

Satz vom Inkreismittelpunkt

Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks. (Der Inkreis berührt alle drei Dreiecksseiten.)

***Beweis** (Satz vom Inkreismittelpunkt):*

Im Dreieck Δ ABC sei M der Schnittpunkt der Winkelhabierenden.

Analog zum **Beweis des Satzes des Umkreismittelpunkts** sind die Winkelhalbierenden gleich weit von allen Schenkeln entfernt und somit ist M der Inkreismittelpunkt.

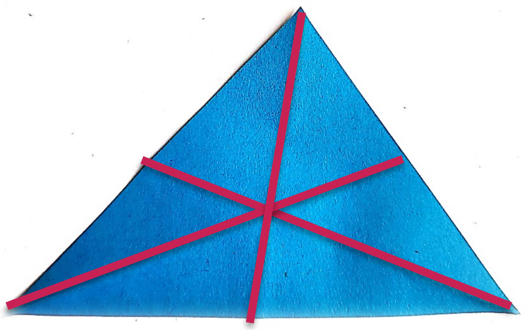
q.e.d.

Helmerich & Lengnink (2016), S. 80f

Falten besonderer Linien am Dreieck

Satz vom Schwerpunkt

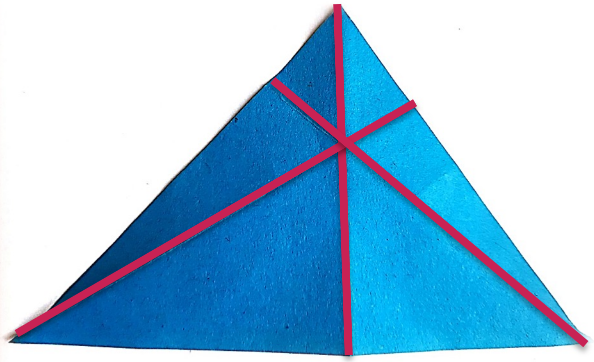
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks scheiden sich alle in einem Punkt und teilen sich im Verhältnis 1 : 2. Den gemeinsamen Schnittpunkt bezeichnet man als Schwerpunkt des Dreiecks.



- Seitenhalbierende
- Schnittpunkt: Schwerpunkt

Satz über die Höhen im Dreieck

Die Höhen eines Dreiecks scheiden sich alle in einem gemeinsamen Punkt.



- Höhen
- Schnittpunkt: Höhenschnittpunkt

Helmerich & Lengnink (2016), S. 80f

Besondere Linien am Dreieck

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

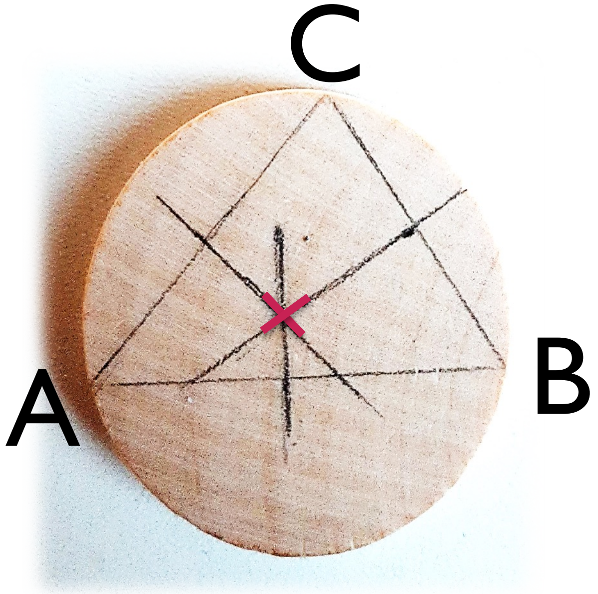
Falten besonderer Linien am Dreieck

→ **Unser Ziel:** die exakte Lage des Mittelpunktes eines Kreises herausfinden.

- Möchte man dies konstruktiv und ohne Schneiden und Falten nur durch Zeichnen lösen, markiert man drei verschiedene Punkte A, B und C auf dem Kreis und zeichnet das Dreieck ABC.
- Man konstruiert nun die Mittelsenkrechten auf zwei der Dreiecksseiten.
- Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises.

siehe Vorlesung 4 „Zeichnen und Konstruieren“

Warum ist das so?



Helmerich & Lengnink (2016), S. 80f

Erzeugen von Vierecken

Erzeugen von Vierecken

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- Vierecksbegriff wird im Alltag oft nicht im geometrischen Sinne, sondern im engeren Sinne zum Bezeichnen von Quadraten verwendet.
  → ACHTUNG: Quadrat als Prototyp des Vierecks (das „richtige Viereck“)
- Ganzheitlich können die unterschiedlichen Vierecksarten an Körpermodellen erkannt werden.

Franke & Reinhold (2016), S. 252

Erzeugen von Vierecken

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Vgl. das Legen von Dreiecken

Legen mit Stäbchen

- Die Kinder legen möglichst viele verschiedene Vierecke mit unterschiedlich langen Holzstäbchen
- Die gefundenen Vierecke werden fixiert (z.B. aufgeklebt)
- Die Kinder überlegen, was die Vierecke gemeinsam haben und worin sie sich unterscheiden

→ **Es wird erkannt, dass es Vierecke gibt, in denen**

1. **Alle vier Seiten gleich lang sind,**
2. **Drei Seiten gleich lang sind,**
3. **Zwei Seiten gleich lang sind oder**
4. **Alle Seiten unterschiedlich lang sind.**

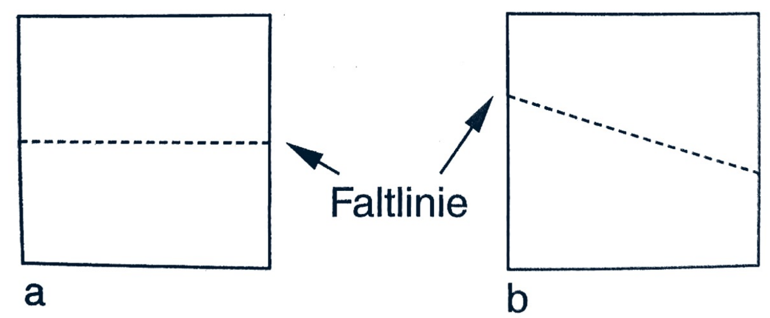
Franke & Reinhold (2016), S. 252

Erzeugen von Vierecken

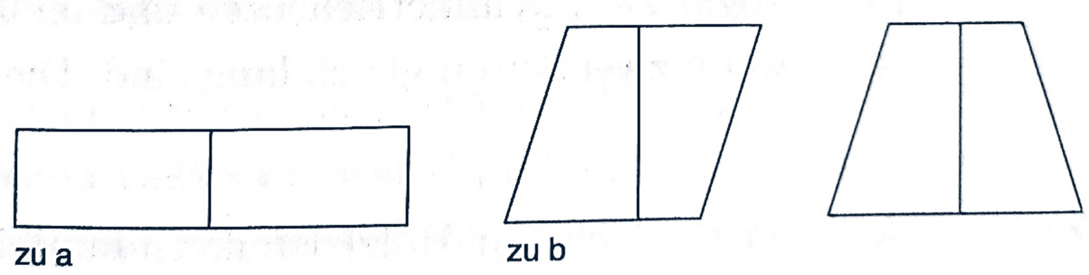
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Zerlegen von Papierquadraten

- Papierquadrate werden so gefaltet, dass dabei möglichst viele verschiedene Zerlegungen in jeweils zwei oder vier Vierecke entstehen.



- An der Faltlinie zerschneiden und aus den beiden Teilen neue Vierecke zusammensetzen.



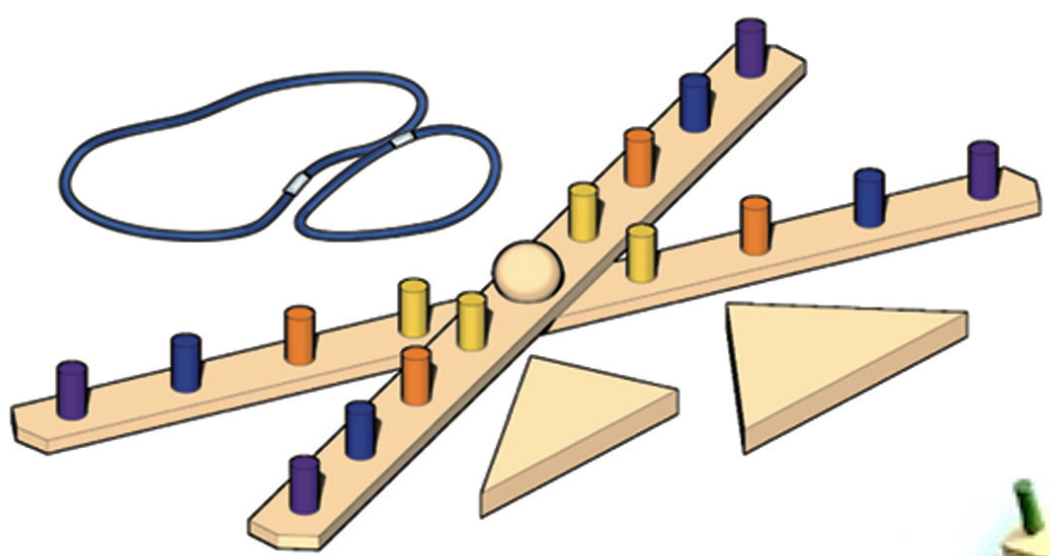
Franke & Reinhold (2016), S. 253

Erzeugen von Vierecken

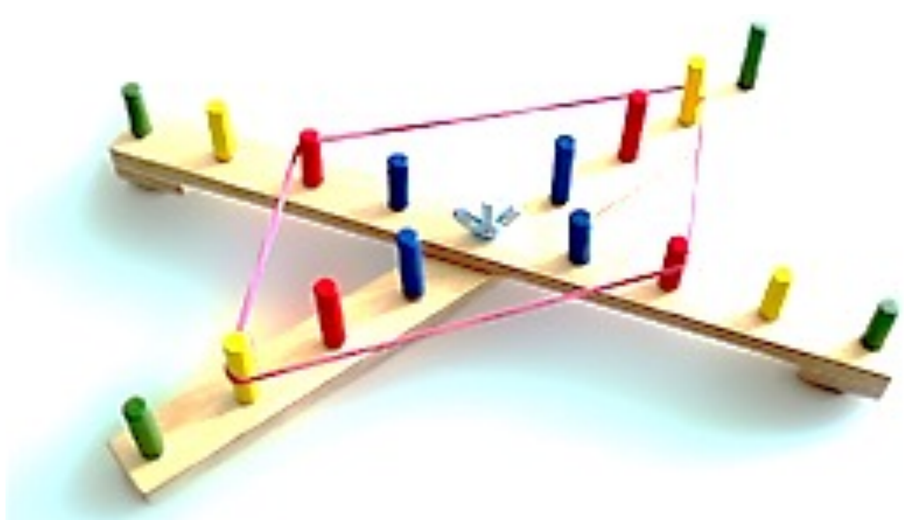
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Flexible Modelle zu Vierecken

- Heidelberger Winkelkreuz (http://heidelberger-winkelkreuz.org/)



Abbildungsquelle: http://heidelberger-winkelkreuz.de/



Abbildungsquelle: http://geometrie.zum.de/images/6/6d/Winkelkreuz_00_kl_Kopie.png

Franke & Reinhold (2016), S. 254

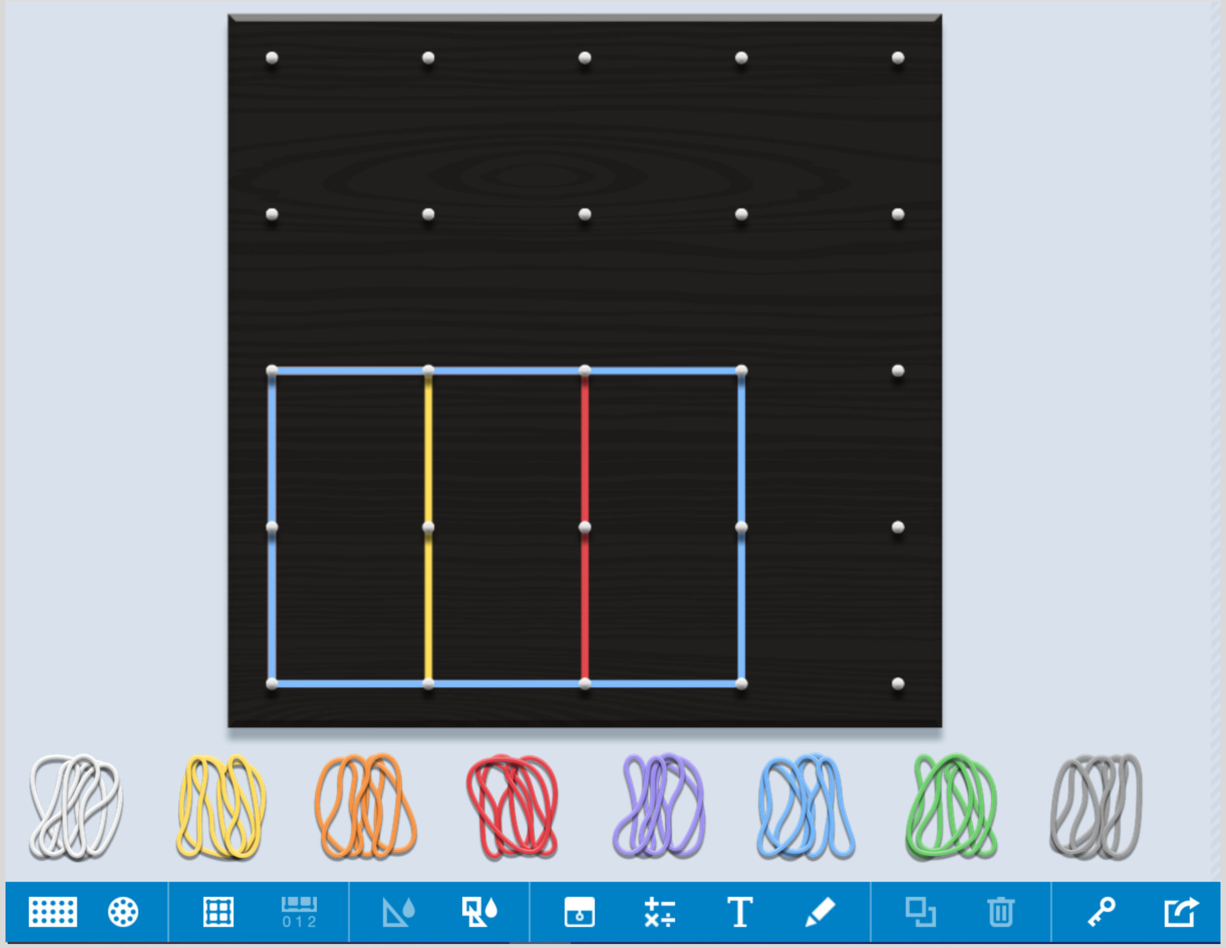
Erzeugen von Vierecken

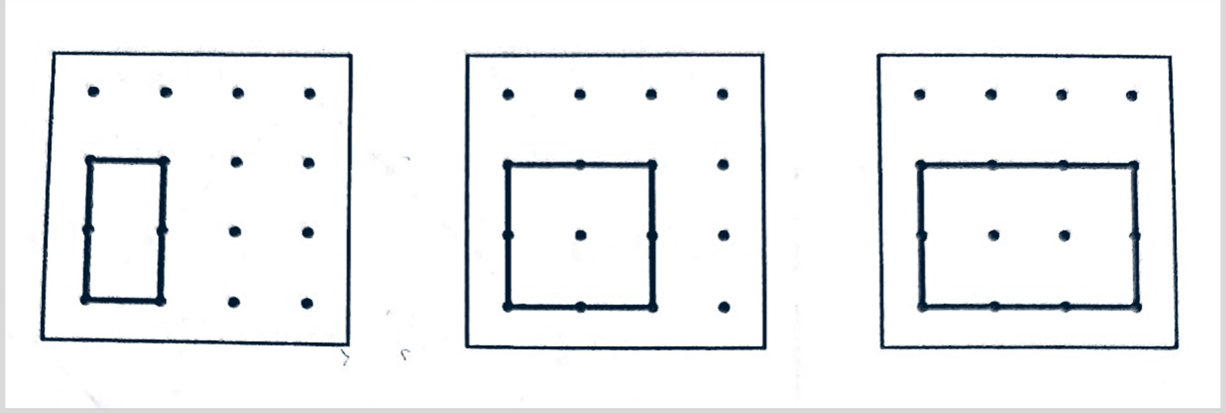
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

Veränderung von Vierecken am Geobrett

- Rechteck spannen und dieses durch Positionsveränderung von zwei Eckpunkten „wachsen“ zu lassen, indem das Gummi oben und unten immer um einen Nagel weitergerückt wird





Franke & Reinhold (2016), S. 255

Erzeugen von Vierecken

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Zeichnungen von Rechtecken und Quadraten

- Erfolgen im 1. und 2. Schuljahr freihändig oder mit Schablonen
- Im 3. Schuljahr meist auf Kästchenpapier (mit Lineal)
- Im 4. Schuljahr ggf. zeichnen verschiedener Vierecksformen auf unliniertes Papier erfordert:
  - Zeichnen von Strecken vorgegebener Länge
  - Zeichnen von Parallelen
  - Zeichnen von Senkrechten

Vorlesung 04 – Zeichnen und Konstruieren

Franke & Reinhold (2016), S. 255

Erzeugen von Vierecken

ElMa WiSe 22/23

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Führen Sie die folgende Faltanleitung zunächst nur im Kopf aus, machen Sie also eine Vorstellungsübung.

Faltfiguren

1. Vor Dir liegt ein quadratisches Papier auf dem Tisch.
2. Falte es gedanklich, indem Du eine Ecke auf die gegenüberliegende Ecke legst. Ziehe den Knick gut nach. Welche Figur ist entstanden?
3. Falte den Zettel wieder auf. Falte nun die anderen beiden Ecken aufeinander. Ziehe auch hier den Knick gut nach. Falte Dein Papier wieder auf. Siehst Du die Dreiecke? Wie viele sind es?
4. Achte auf die Faltlinien. Sie schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Quadrates. Wie stehen die Faltlinien zueinander?

Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

Erzeugen von Vierecken

ElMa WiSe 22/23

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Faltfiguren

5. Falte nun eine Ecke so um, dass sie auf dem Mittelpunkt Deines Papiers zum liegen kommt. Mache dies auch mit der dieser Ecke gegenüberliegenden Ecke. Ziehe die Knicke jeweils gut nach. Welche Figur ist entstanden?
6. Falte nun entlang der langen Diagonale, sodass die beiden abgeknickten Ecken innen liegen. Welche Figur ist entstanden?

Was haben Sie sich im Laufe der Vorstellungsübung vorgestellt? Notieren Sie zunächst Ihre Vorstellungen.
Sie können die Vorstellungsübung nun mit einem quadratischen Zettel in die Tat umsetzen, um Ihr Ergebnis zu kontrollieren.

Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

Erzeugen von Vierecken

ElMa WiSe 22/23

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Definition: Viereck

Eine ebene Figur mit **vier Ecken** und **vier Seiten** nennt man Viereck.

Definition: Parallel

Zwei Geraden g und h heißen genau dann parallel, wenn sie **identisch sind oder keinen gemeinsamen Punkt** haben.

Definition: Trapez

Ein Trapez ist ein Viereck, bei dem **zwei Seiten zueinander parallel** sind.

Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

Erzeugen von Vierecken

ElMa WiSe 22/23

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

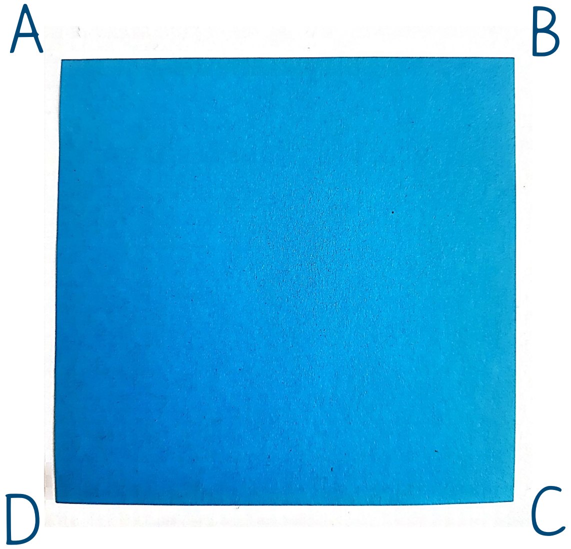
Satz: Bei der im Einstiegsauftrag dieses Abschnitts gefalteten Figur handelt es sich in der mathematischen Idealisierung um ein Trapez.

Beweis:

Wir müssen zwei Dinge zeigen:

1. Es handelt sich bei der gefalteten Figur um ein Viereck.
2. Es gibt in der Figur zwei zueinander parallele Seiten.

Die vier Ecken des Ausgangsquadrates seien mit A; B; C und D bezeichnet.



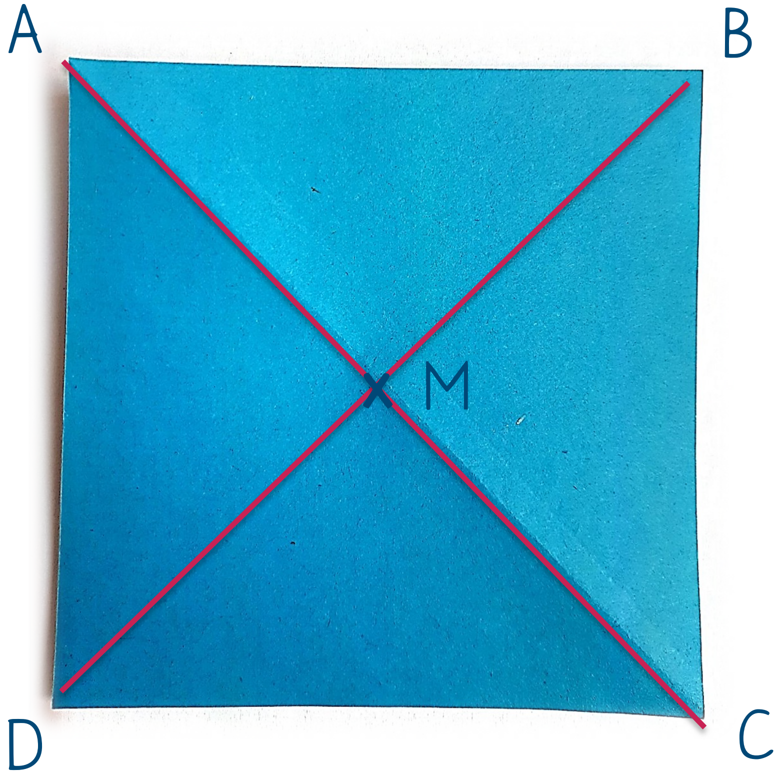
Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

Erzeugen von Vierecken

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Satz: Bei der im Einstiegsauftrag dieses Abschnitts gefalteten Figur handelt es sich in der mathematischen Idealisierung um ein Trapez.

Durch die ersten beiden Faltschritte entstehen die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Diese schneiden sich im Punkt M, der den Mittelpunkt des Quadrates darstellt.



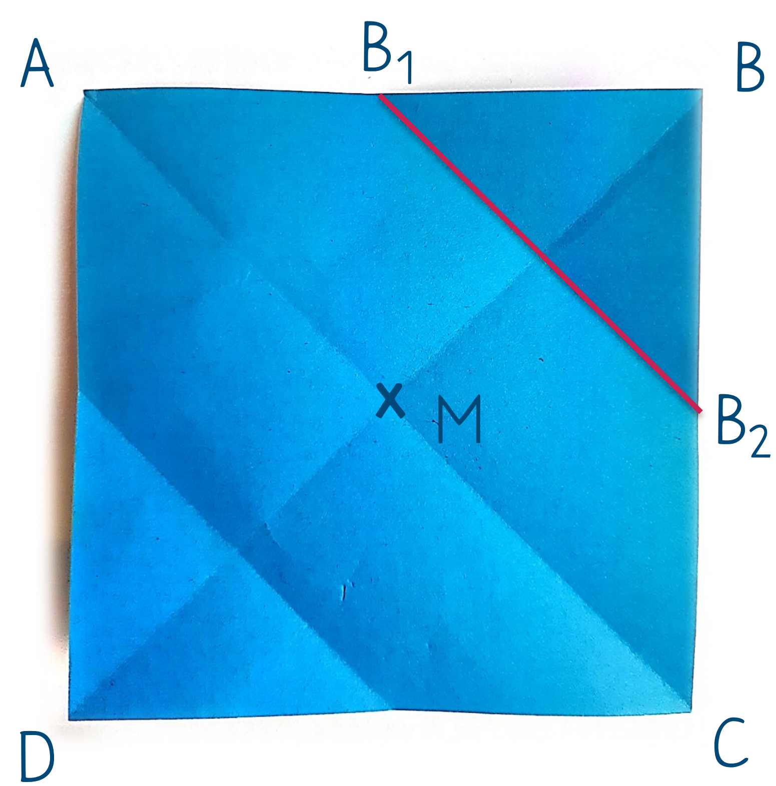
Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

Erzeugen von Vierecken

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Satz: Bei der im Einstiegsauftrag dieses Abschnitts gefalteten Figur handelt es sich in der mathematischen Idealisierung um ein Trapez.

Nun wird etwa der Punkt B auf M gefaltet. Es entsteht eine Faltlinie, die die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ jeweils halbiert. Die Schnittpunkte der Faltlinie mit den Seiten des Quadrats werden mit B_1 und B_2 bezeichnet. Die Strecke $\overline{B_1B_2}$ ist parallel zu $\overline{AC}$.



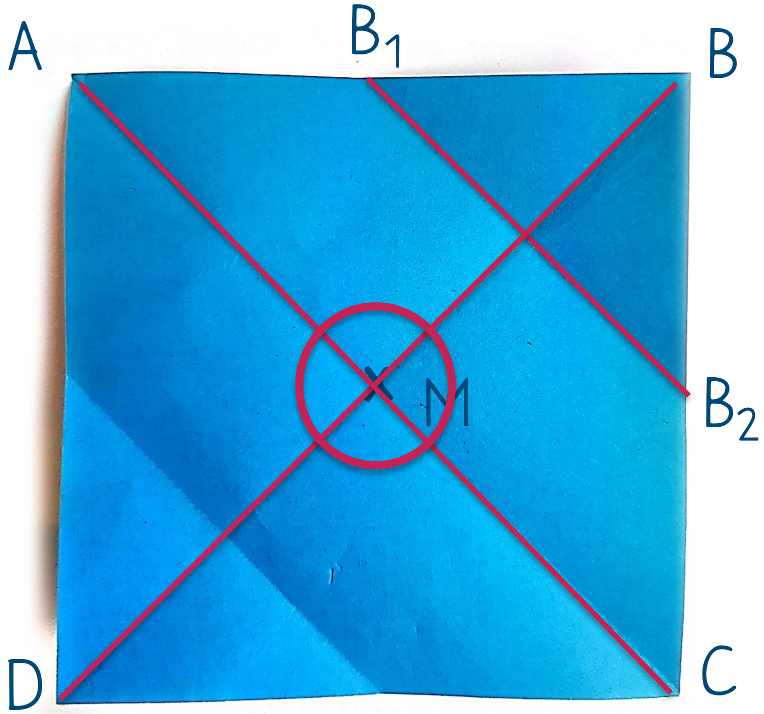
Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

Erzeugen von Vierecken

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Satz: Bei der im Einstiegsauftrag dieses Abschnitts gefalteten Figur handelt es sich in der mathematischen Idealisierung um ein Trapez.

Warum ist die Strecke $\overline{B_1B_2}$ parallel zu $\overline{AC}$?
Die beiden Diagonalen schneiden sich in der Mitte im Punkt M.
Die dort entstandene Faltlinienstruktur zeigt vier gleich große und damit rechte Winkel, dies liegt an der völligen Symmetrie des Quadrates.



Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

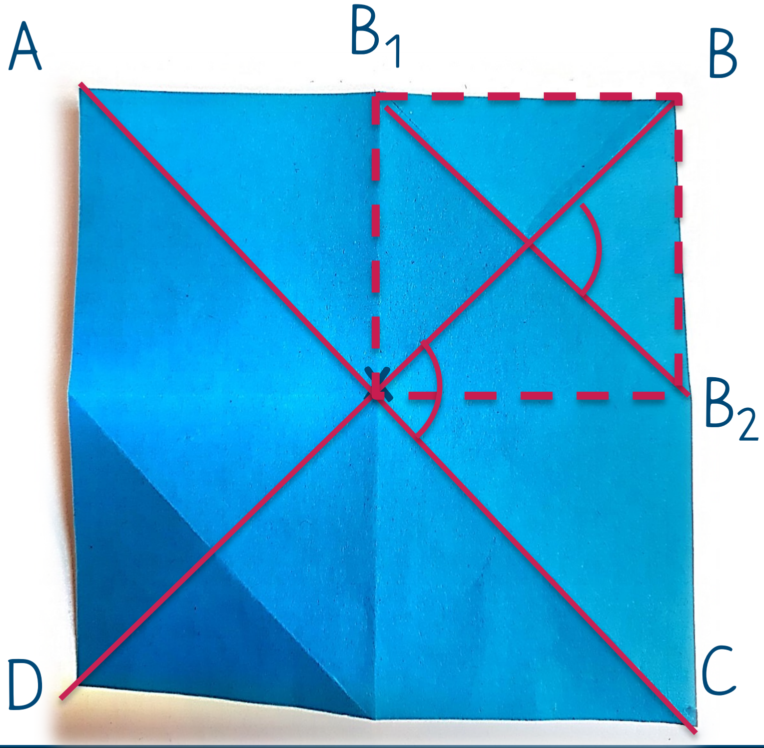
Erzeugen von Vierecken

ElMa WiSe 22/23

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Satz: Bei der im Einstiegsauftrag dieses Abschnitts gefalteten Figur handelt es sich in der mathematischen Idealisierung um ein Trapez.

Nun kann man durch jeweiliges Aufeinanderfalten der beiden gegenüberliegenden Seiten des Quadrates vier kleine Quadrate erhalten, von denen eins die Diagonale $\overline{B_1B_2}$ hat. Die andere Diagonale des kleinen Quadrates liegt auf $\overline{BD}$. Daher wird die Strecke $\overline{BD}$ von beiden Strecken $\overline{AC}$, $\overline{B_1B_2}$ im rechten Winkel geschnitten. Die Strecken sind damit parallel zueinander.



Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

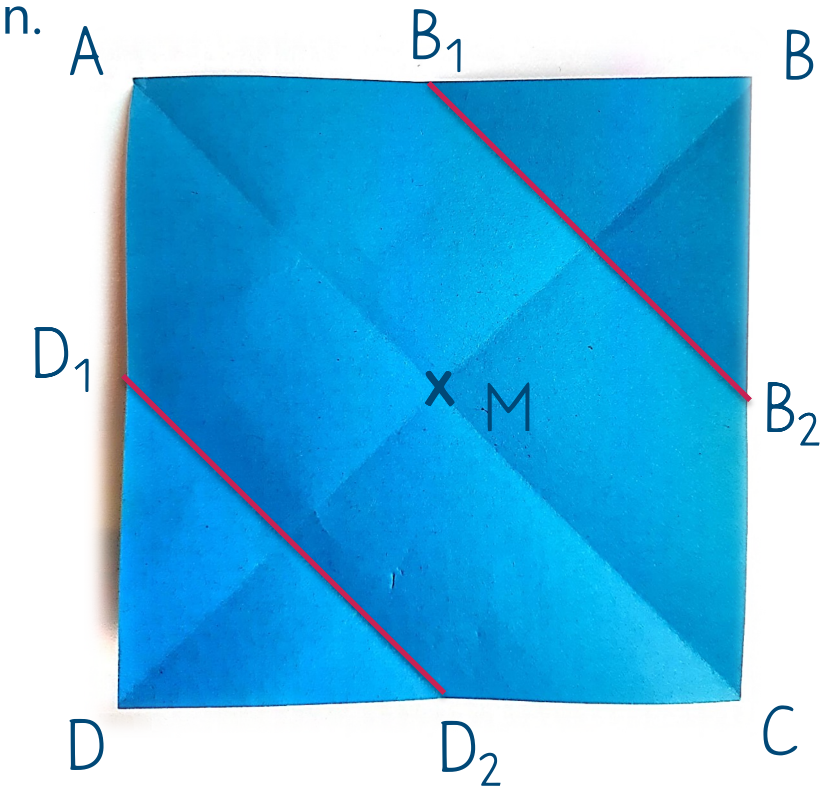
Erzeugen von Vierecken

ElMa WiSe 22/23

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Satz: Bei der im Einstiegsauftrag dieses Abschnitts gefalteten Figur handelt es sich in der mathematischen Idealisierung um ein Trapez.

Analog gilt dies für den Punkt D, der ebenso auf M gefaltet wird. Es entstehen die Punkte D_1 und D_2 als Schnittpunkte der Faltlinie mit $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$. Die Strecke $\overline{D_1D_2}$ ist ebenfalls parallel zu $\overline{AC}$ und damit auch zu $\overline{B_1B_2}$. Durch Falten an $\overline{AC}$ kommt B_1 auf D_1 und B_2 auf D_2 zum Liegen.



Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

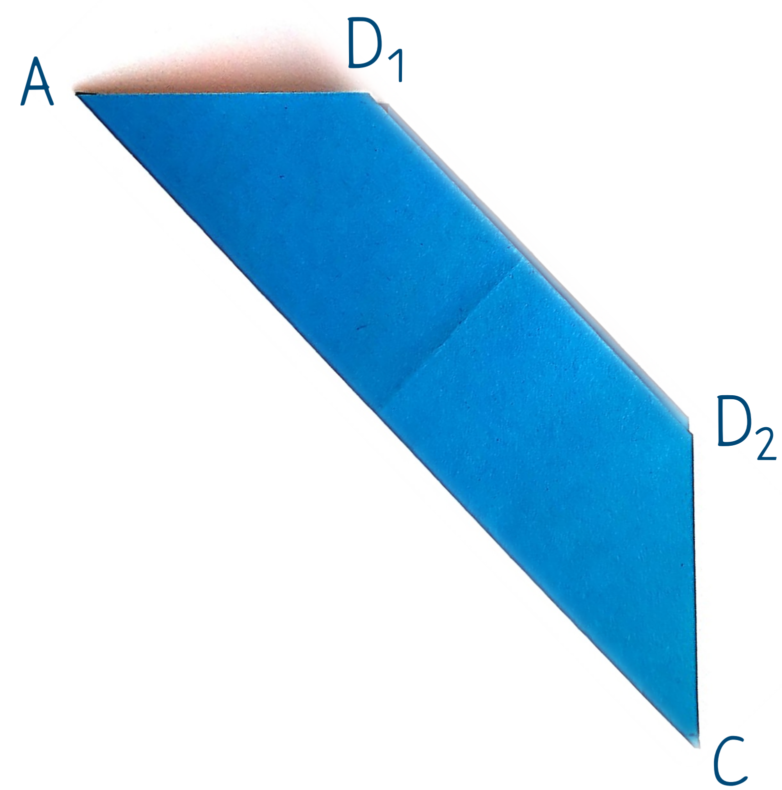
Erzeugen von Vierecken

ElMa WiSe 22/23

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Satz: Bei der im Einstiegsauftrag dieses Abschnitts gefalteten Figur handelt es sich in der mathematischen Idealisierung um ein Trapez.

Daher hat die Faltfigur die vier Ecken ACD_1D_2 und die Seite $\overline{D_1D_2}$ ist parallel zu $\overline{AC}$.



quod erat demonstrandum (lat. für „was zu beweisen war")

q.e.d.

Helmerich & Lengnink (2016), S. 38f

Das Tangram

Das Tangram

- altes, chinesisches Legespiel
- besteht aus sieben Teilen, die beim Legen nach Vorlage immer alle einzubeziehen sind

Franke & Reinhold (2016), S. 221f

Abbildungsquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Tangram#/media/Datei:Tangram_diagram.svg

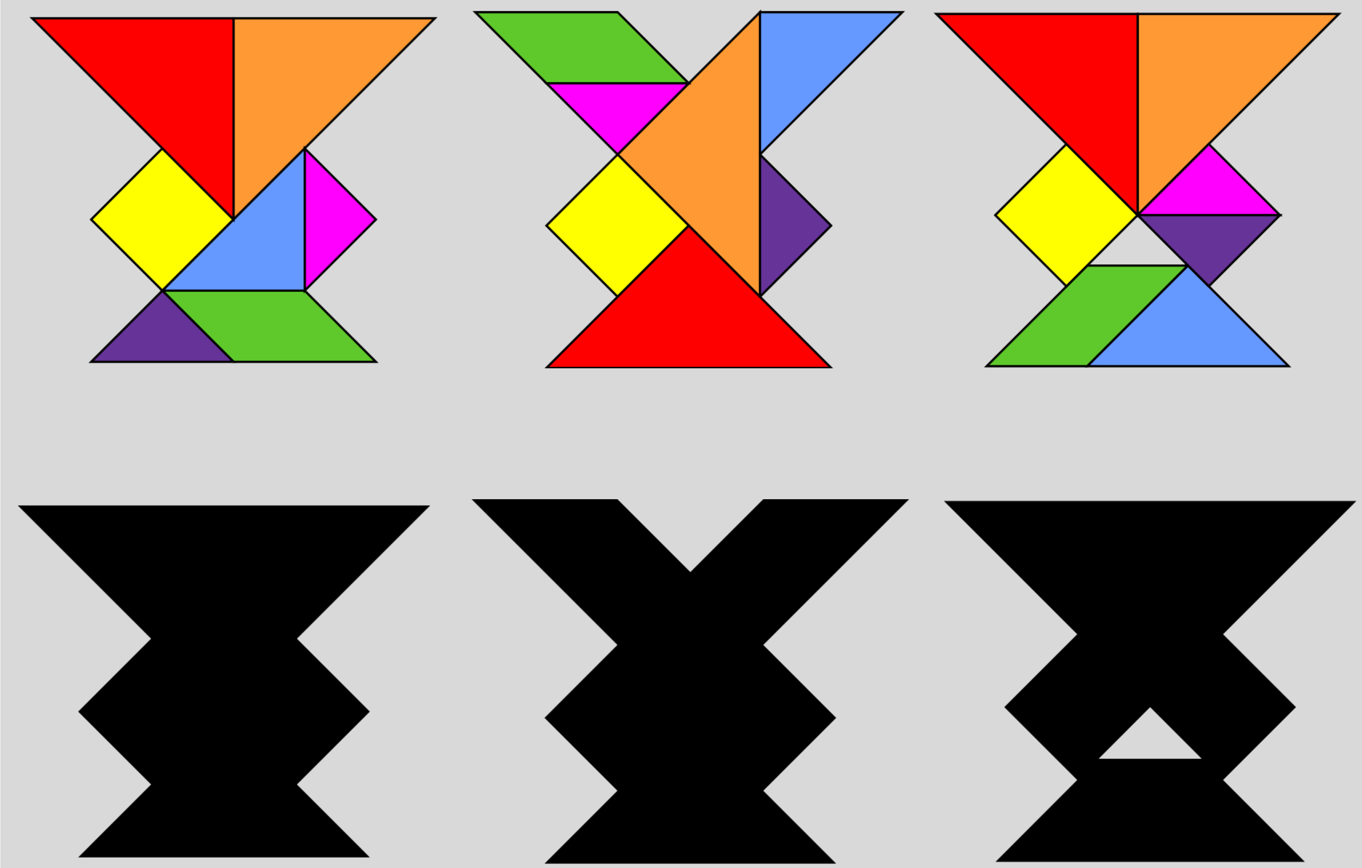
Das Tangram

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- Nachlegen von Figuren mit Sichtbarkeit der einzelnen Teile
- Nachlegen mit Figuren, die nur in Gesamtgestalt vorgegeben sind

Räumliches Vorstellungsvermögen

- Tipp-Karten, reflektierender Austausch von Strategien



Das Tangram-Paradoxon des magischen Würfelbechers - aus Sam Loyds Buch „The 8th Book of Tan“ (1903)

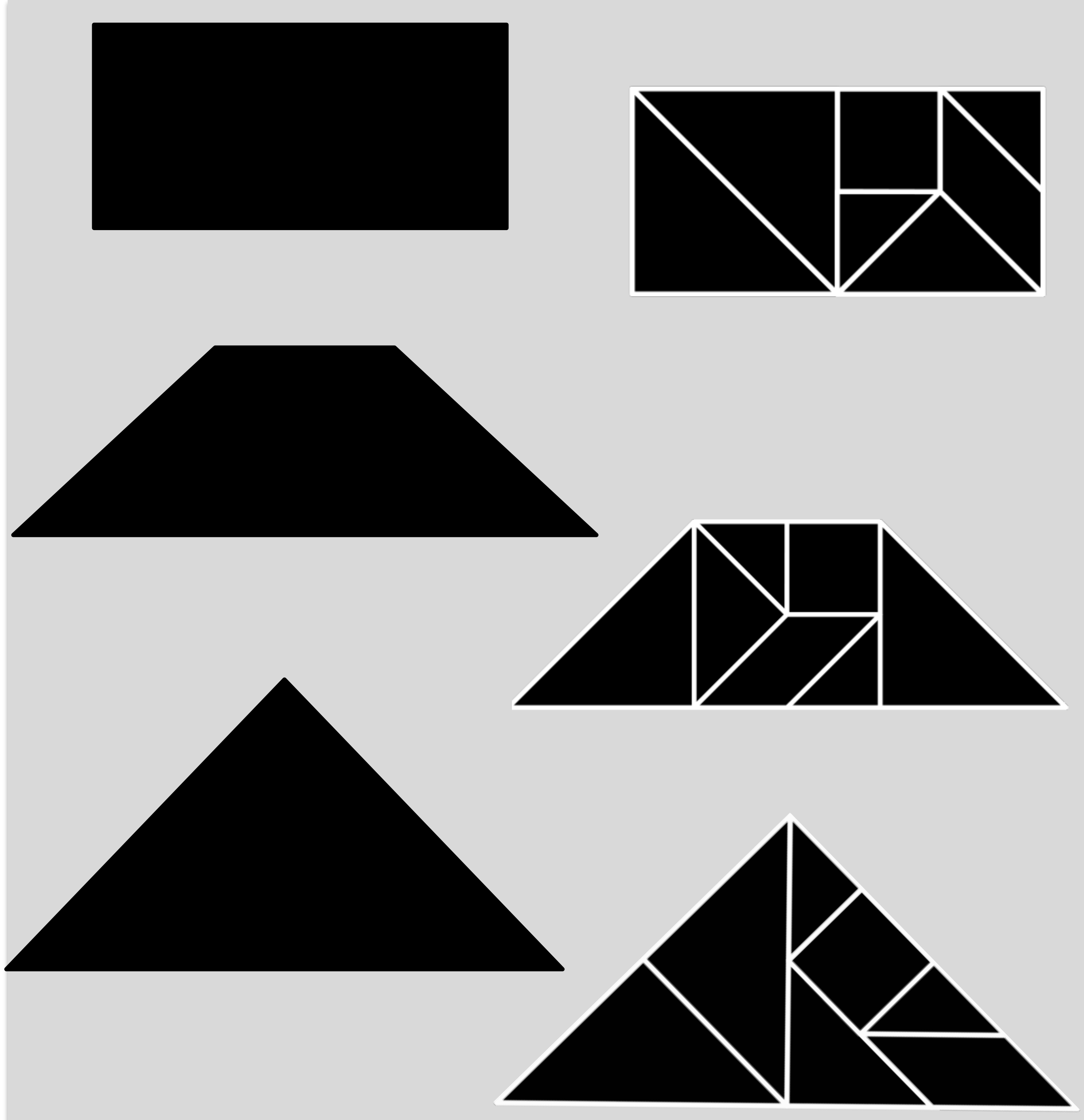
Franke & Reinhold (2016), S. 222f

Abbildungsquelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Tangram#/media/File:The_Magic_Dice_Cup_tangram_paradox.svg

Das Tangram

- Legen geometrischer Grundformen

Franke & Reinhold (2016), S. 223



Abbildungsquelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Tangram#/media/File:Convex_tangram_shapes.svg

Das Tangram

Übung 5

Übungen mit Tangramteilen

- frei mit den Teilen des Tangrams legen lassen,
- Beziehungen der Tangram-Teile untereinander untersuchen, sprachlich formulieren und begründen lassen,
- Abbildungen mit sichtbaren Teilen zum Nachlegen vorgeben,
- Umrissfiguren zum Auslegen vorgeben,
- Umrissfiguren – auch kleiner als im Original – zum Nachlegen vorgeben,
- verbal beschreiben, welche Figur gelegt werden soll („Lege ein Dreieck."),
- verschiedene Möglichkeiten zum Auslegen einer Figur suchen, vergleichen und sprachlich zu beschreiben,
- neu gefundene Formen aus Tangram-Teilen von den Kindern auf Papier übertragen lassen und anderen Kindern zum Nachlegen zur Verfügung stellen („Wir gestalten eine Tangram-Kartei.“).

Franke & Reinhold (2016), S. 224

Literatur

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule.* Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.

Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie.* Berlin Heidelberg: Springer.

Roos, S. (2011). Bilder mit Formen gestalten und aufräumen. *Grundschule Mathematik 30:* 6-9.

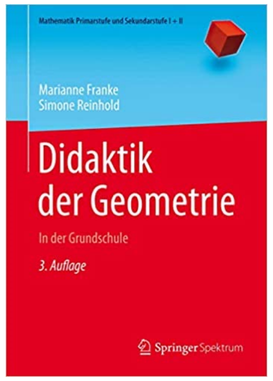
Wollring (2004). Streifenschablonen. Eine handlungsintensive Lernumgebung zu Kongruenz und Ähnlichkeit. *Mathematik lehren 122*, 9-14.

Ebene Figuren I

	Ich kann…
☐	beschreiben, welche Stufen der Lernprozess zum Thema „Ebene Figuren“ beinhalten sollte und Lern-/ Spielsituationen ableiten, die ein Durchlaufen dieses Prozesses ermöglichen.
☐	Lernsituationen beschreiben, die Kinder beim ganzheitlichen Erfassen geometrischer Grundformen unterstützen.
☐	formulieren, was Kinder am Ende der 4. Klasse über den Kreis und das Dreieck wissen sollten.
☐	Lernsituationen beschreiben, die das Erzeugen von Kreisen und Dreiecken, das Entdecken charakteristischer Eigenschaften und das vertiefende Erkunden ermöglichen.
☐	„Kreis“ sowie wichtige Begriffe in diesem Zusammenhang (Sehne, Sekante, Tangente, Passante) definieren.
☐	„Dreieck“ definieren sowie wichtige Begriffe in diesem Zusammenhang (Winkel, Winkeltypen, Innenwinkel) und charakteristische Eigenschaften nennen (Innenwinkelsumme).
☐ ElMa	Dreiecke nach Seitenlängen und Innenwinkeln klassifizieren.
☐ WiSe	Begründen, dass jedes gleichseitige Dreieck gleichschenklig ist.
21/22 ☐	Besondere Linien am Dreieck nennen, definieren und konstruieren (falten) (Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Höhe) und deren Schnittpunkte benennen (Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt)
☐	Umkreis und Inkreis eines Dreiecks konstruieren und begründen, warum die Konstruktion funktioniert.
☐	Lernsituationen mit Tangram beschreiben, die das Erzeugen von Vierecken, das Entdecken charakteristischer Eigenschaften und das vertiefende Erkunden ermöglichen.

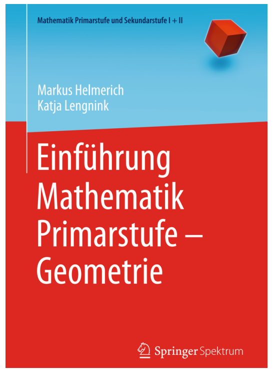
Zum Nach- und Weiterlesen

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES



Didaktischer Hintergrund (Primarstufe):

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule.* Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag. **Abschnitt 7.4 „Lernumgebungen zu ausgewählten Grundformen" & 7.1 „Legen – freies Legen, Auslegen, Umlegen"**



Fachlicher Hintergrund:

Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie.* Berlin Heidelberg: Springer. (https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-47206-4). **Abschnitt 3.2.1 „Klassifikation von Dreiecken" & Abschnitt 3.2.4 „Kreise, Dreiecke und besondere Linien"**

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Mitarbeit und bis nächsten Dienstag!