UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Didaktik der Mathematik in der Primarstufe III

Didaktik der Geometrie

07 - Symmetrie I (Kongruenzabbildungen)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Melanie Platz

Themenübersicht

Geometrische Gebilde lassen sich bewegen (verschieben, drehen, spiegeln…), verkleinern, vergrößern, zerlegen, überlagern…, wodurch Beziehungen hergestellt werden.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Datum	Nr.	Thema	Grundidee
11.04.23	**01**	Organisatorisches & Einführung	
18.04.23	**02**	Entwicklung räumlicher Fähigkeiten	
25.04.23	**03**	Geometrische Begriffe und Wissenserwerb	
02.05.23	**04**	Zeichnen und Konstruieren	Formen und ihre Konstruktion
09.05.23	**05**	Ebene Figuren I	
16.05.23	**06**	Ebene Figuren II & Räumliche Objekte	
23.05.23	**07**	Symmetrie I (Kongruenzabbildungen)	Operieren mit Formen
30.05.23	**08** (entfällt)	--	
06.06.23	**09**	Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette)	
13.06.23	**10**	Falten	
20.06.23	**11**	Längen, Flächen und Volumina I	Maße und Formeln
27.06.23	**12**	Längen, Flächen und Volumina II	Geom. Gesetzm. & Muster
04.07.23	**13**	Pläne & Maßstäbe, Wiederholung & Fragen I	Koordinaten
11.07.23	**14** (online)	Wiederholung & Fragen II	
18.07.23	**15**	**Klausur**	

Einstimmung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- Symmetrie ist von großer Bedeutung für unser räumliches Auffassungs- und Gliederungsvermögen
- Symmetrische Figuren werden schneller vom Gehirn gespeichert und analysiert
- Symmetrische Figuren können detailgetreuer wiedergegeben werden
- Erkennen symmetrischer Eigenschaften ist Grundstein des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Symmetrie ‚mag' unser Gehirn

Franke & Reinhold (2016), S. 258ff

Symmetrie I (Kongruenzabbildungen, Haus der Vierecke)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

	Ich kann…
☐	Symmetrie im Alltag erkennen und Anknüpfungspunkte für den Unterricht ableiten.
☐	„Abbildung“, „Fixgerade“, „Fixpunkt“, „Fixpunktgerade“ definieren.
☐	„Achsenspiegelung“, „Verschiebung“, „Drehung“, „Punktspiegelung“ und „Identität“ definieren, Bildpunkte unter den jeweiligen Abbildungen konstruieren, Eigenschaften der Abbildungen nennen und begründen, warum bestimmte Eigenschaften erfüllt sind/ nicht erfüllt sind.
☐	„Kongruenzabbildung“ definieren und erkennen, ob es sich bei einer Abbildung um eine Kongruenzabbildung handelt oder nicht.
☐	Kongruenzabbildungen aus Achsenspiegelungen aufbauen.
☐	„symmetrisch“ und „Deckabbildung“ definieren und Deckabbildungen ebener Figuren erkennen und Verknüpfungstafeln erstellen.
☐	Zugänge zur Achsensymmetrie beschreiben und beurteilen und Lernsituationen mit einer Steigerung der Ansprüche in den bereitgestellten Aufgaben entwickeln.

Symmetrie und Kongruenz

- Symmetrie im Alltag und Unterricht
- Abbildungen
- Kongruenzabbildungen
- Zugänge zur Achsensymmetrie
- Aktivitäten zur Achsensymmetrie

Mit Inhalten von Dr. Anna-Marietha Vogler, Dr. Eva Hoffart, Prof. Dr. Andreas Obersteiner u.a.

Symmetrie im Alltag und Unterricht

Symmetrie im Alltag und Unterricht

Franke & Reinhold (2016), S. 257

Symmetrie im Alltag und Unterricht

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Stichwort (physikalische) Funktion

Abbildungsquelle: https://pixabay.com/photos/aircraft-sunset-silhouette-clouds-1362586/

Franke & Reinhold (2016), S. 258

Symmetrie im Alltag und Unterricht

Symmetrie im Alltag und Unterricht

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Stichwort Ästhetik

Franke & Reinhold (2016), S. 257

Symmetrie im Alltag und Unterricht

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- Die Erfahrungen der Kinder zur Symmetrie sind intuitiv
- Sie sehen symmetrische Gleichheit zuerst an sich selbst und ihrer Umgebung
  - an ihrem Körper
  - an Tieren
  - an Pflanzen
  - an Bauwerken
  - an Gebrauchsgegenständen

- Alltagserfahrungen aufgreifen
- mit Phänomenen aus der Umwelt beginnen und diese auf die Bildebene projizieren (z.B. Schmetterlinge)

Franke & Reinhold (2016), S. 258f

Abbildungen

- Grundbegriffe

Abbildungen

Was sind Abbildungen?
Welche Abbildungen kennen Sie?

Abbildungen

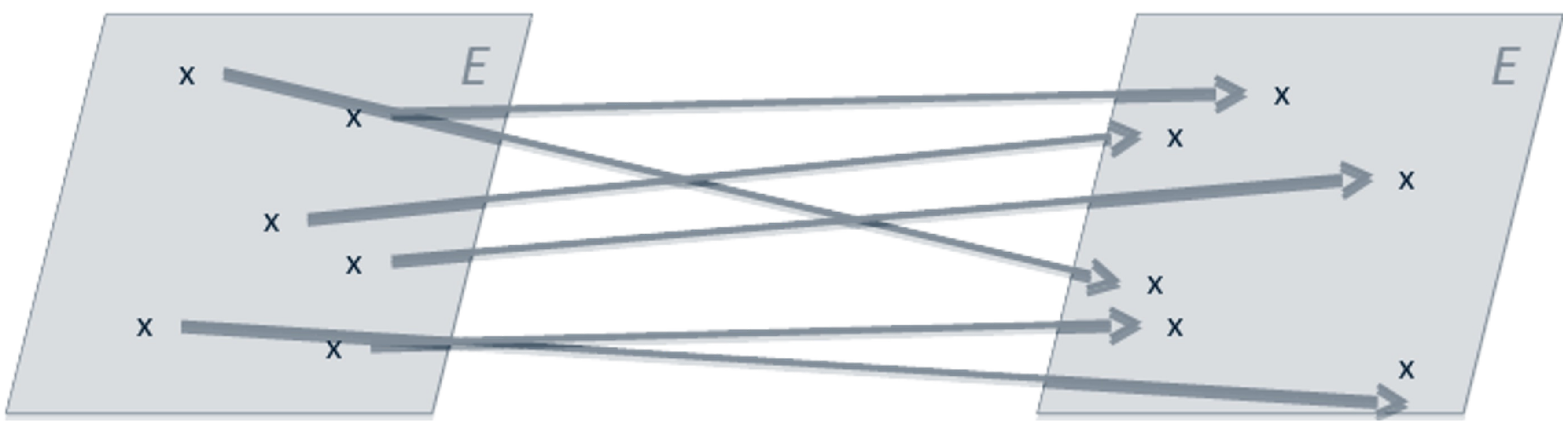
Was sind Abbildungen?
Welche Abbildungen kennen Sie?

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Definition: Abbildung

Eine Zuordnung f, die jedem Punkt P der Ebene E genau einen Punkt P‘ derselben Ebene zuordnet, heißt **Abbildung**.

Kurzschreibweise: $f : E \to E, P \mapsto P'$

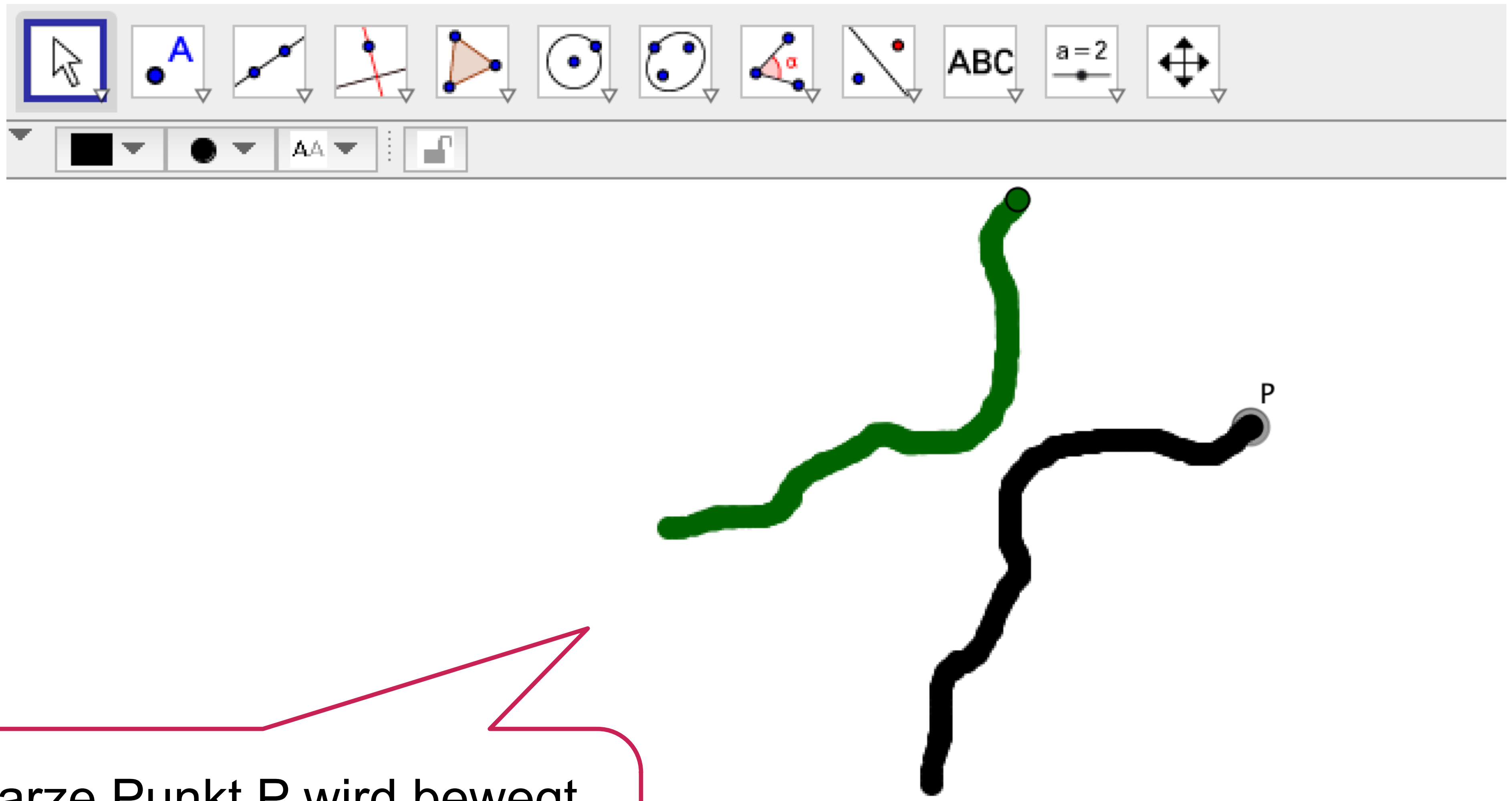


(stellen Sie sich die „beiden“ Ebenen übereinandergelegt vor)

Krauter & Bescherer (2013), S. 18

Abbildungen

Black Box



Der schwarze Punkt P wird bewegt.
Wie entsteht der grüne Punkt?
Beschreiben Sie Ihre Beobachtung.

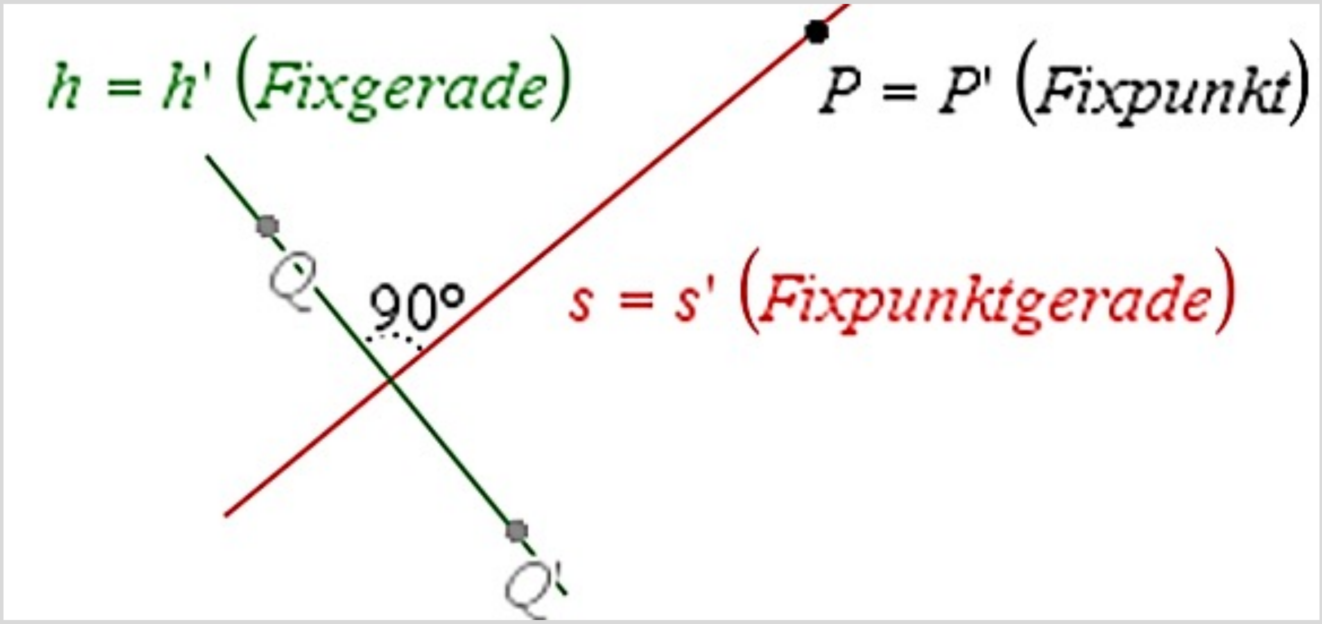
Abbildungen

Grundbegriffe

- Einen Punkt P, der bei einer Abbildung auf sich selbst abgebildet wird, nennt man **Fixpunkt**. Formal: P = f(P) = P′.
- Eine Gerade g heißt **Fixgerade** einer Abbildung f, wenn Urbild g und Bild g′ zusammenfallen, also wenn gilt: g = f(g) = g′.
- Eine Gerade g heißt **Fixpunktgerade** einer Abbildung f, wenn alle Punkte der Geraden mit ihrem Bild zusammenfallen, also

wenn für alle P ∈ g gilt: P = P′.

Beispiel: Achsenspiegelung an s



Jede Fixpunktgerade ist eine Fixgerade, aber nicht jede Fixgerade ist eine Fixpunktgerade.

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 116

Abbildungen

bijektive Abbildungen

Im Folgenden werden wir uns auf Abbildungen beschränken, bei denen jeder Ausgangspunkt einen eindeutig bestimmten Bildpunkt hat und umgekehrt. Jeder Punkt der Ebene ist also gleichzeitig Original- und Bildpunkt.

Wir werden uns zunächst einen Überblick über Abbildungen machen, die Form und Größe von Figuren unverändert lassen. Alle diese Abbildungen lassen sich auf einen einzigen Abbildungstyp, nämlich die **Achsenspiegelung,** zurückführen.

Kongruenzabbildungen

- Achsenspiegelung
- Verschiebung
- Drehung
- Punktspiegelung
- Identität
- Symmetrie und Deckabbildungen ebener Figuren

Achsenspiegelung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Achsenspiegelung als Kongruenzabbildung in der Ebene

- Symmetrie als Eigenschaft, bei der eine Figur durch Kongruenzabbildung auf sich selbst abgebildet wird oder
- In der Grundschule wird die Spiegelung als Kongruenzabbildung der Ebene behandelt
- jede Kongruenzabbildung der Ebene kann aus Achsenspiegelungen aufgebaut werden (Drehung, Punktspiegelung, Verschiebung, Schubspiegelung)
- Auch Begriffe wie Drehung, Bandornamente und Parkette mit einbeziehen

Franke & Reinhold (2016), S. 262f

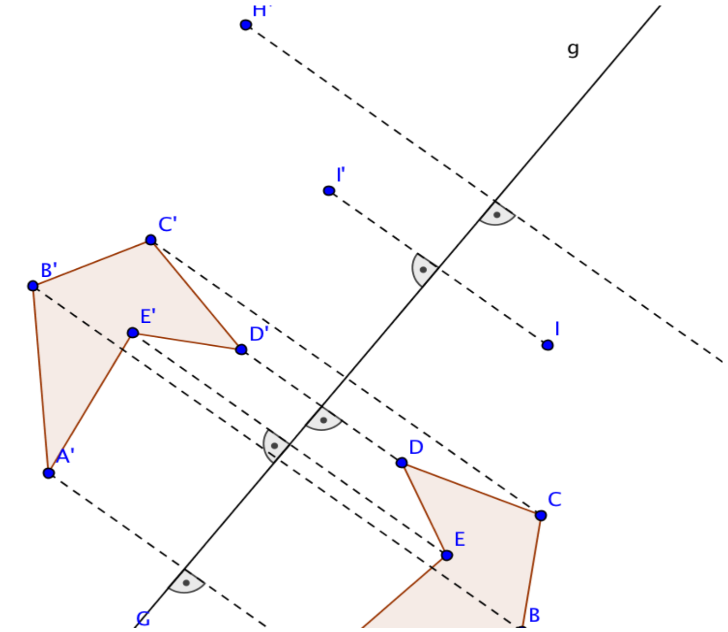
Achsenspiegelung

Definition: Achsenspiegelung

Gegeben sei eine Gerade g der Ebene. Eine Abbildung S_g: E → E heißt **Achsenspiegelung** oder **Geradenspiegelung**, wenn jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P' so zugeordnet ist, dass die Verbindungsstrecke $\overline{PP'}$ auf g (der Spiegelachse) senkrecht steht und von ihr halbiert wird.

Formal: Wenn P ∈ g, dann P' = P. Wenn P ∉ g, dann P' ≠ P, $g \perp \overline{PP'}$ und d(P, g) = d(P', g).

Auch wenn wir häufig nur bestimmte Figuren betrachten, so bildet die Abbildung grundsätzlich jeden Punkt der Ebene ab!



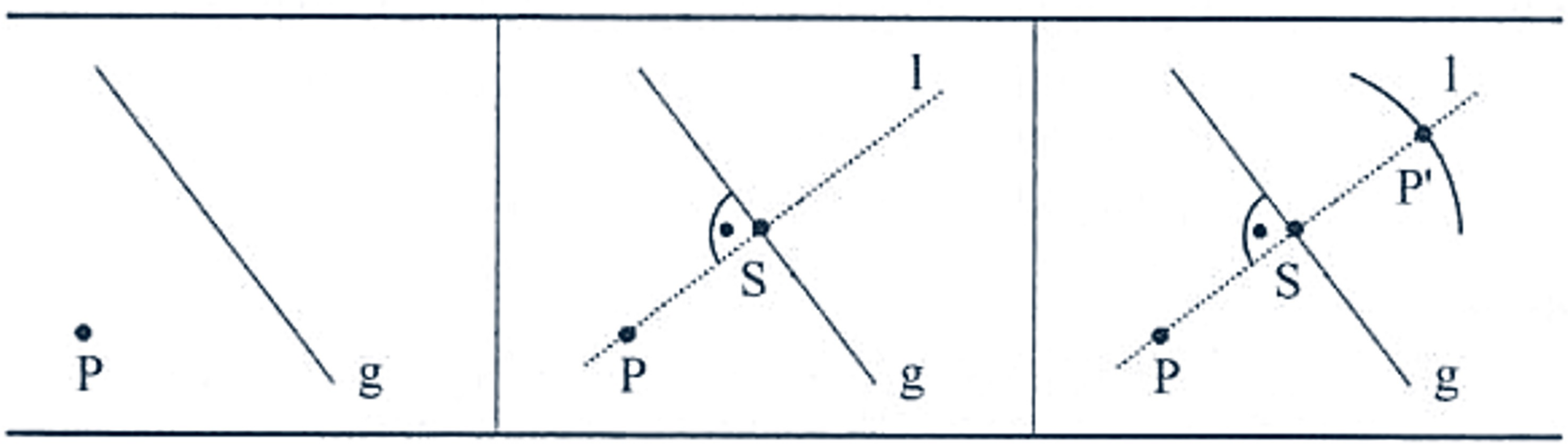
Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 116

Achsenspiegelung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Konstruktion

Wie konstruiert man das Bild P' eines Punktes P $\notin$ g bei Spiegelung an der Geraden g?

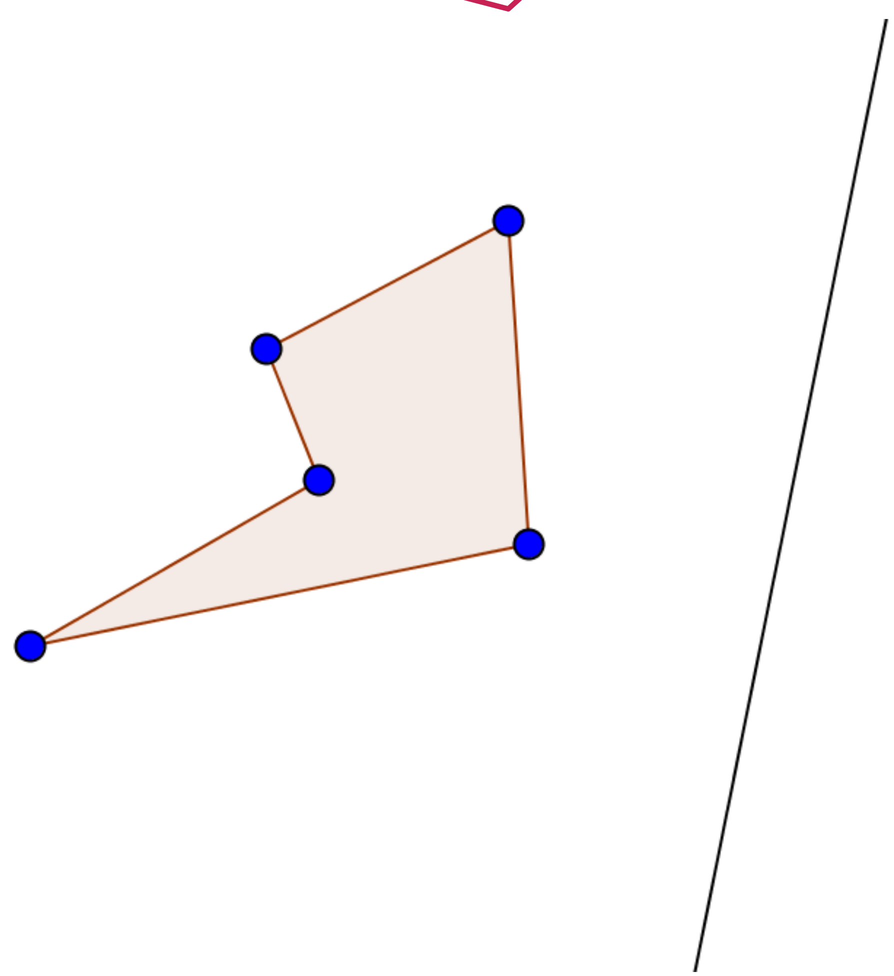


Konstruktionsbeschreibung:
- Lotgerade l zu g durch P. {S} = l ∩ g.
- {P'} = l ∩ k(S; $|\overline{PS}|$)

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 117

Achsenspiegelung

Zeichnen Sie ein beliebiges Vieleck und eine Gerade und spiegeln Sie das Vieleck an der Geraden.
Welche Eigenschaften der Achsenspiegelung vermuten Sie?



Achsenspiegelung

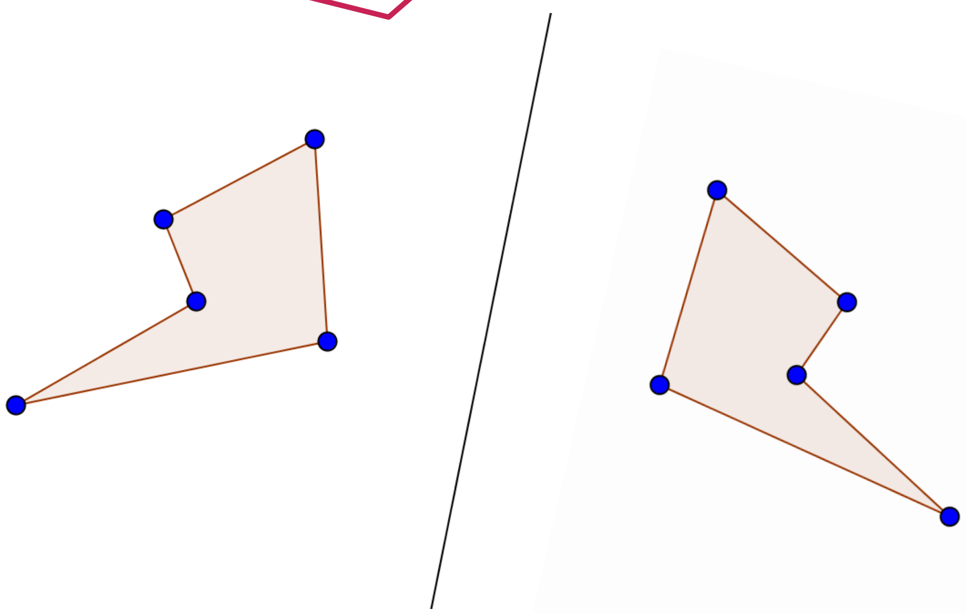
Eine Abbildung ist genau dann…	*, wenn…*
längentreu	… die Streckenlängen aller Bildfiguren gleich entsprechenden Streckenlängen der Originalfiguren sind.
winkeltreu	… die Winkelmaße aller Bildfiguren gleich entsprechenden Winkelmaßen der Originalfiguren sind.
geradentreu	… Geraden immer auf Geraden abgebildet werden.
parallelentreu	… zueinander parallele Geraden immer in zueinander parallele Geraden abgebildet werden.
flächeninhaltstreu	… Flächen immer in Flächen gleichen Flächeninhaltes abgebildet werden.
orientierungstreu (umlaufsinntreu)	… der Umlaufsinn jeder Figur (z.B. eines Dreiecks) erhalten bleibt.

Vorsicht: „parallelentreu" bedeutet: Parallele Geraden g und h (g||h) werden auf zueinander parallele Bildgeraden g' und h' (g'||h') abgebildet.
Es bedeutet NICHT, dass jede Gerade auf eine parallele Gerade abgebildet wird (also g||g'). Parallelentreue ist eine Eigenschaft einer Abbildung, nicht einer Geraden!
Zu sagen „die Gerade g ist parallelentreu" oder „g und h sind parallelentreu" macht also keinen Sinn. Analoges gilt für die übrigen Eigenschaften (z. B. macht es keinen Sinn zu sagen, dass zwei Strecken längentreu sind).

Achsenspiegelung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Zeichnen Sie ein beliebiges Vieleck und eine Gerade und spiegeln Sie das Vieleck an der Geraden.
Welche Eigenschaften der Achsenspiegelung vermuten Sie?

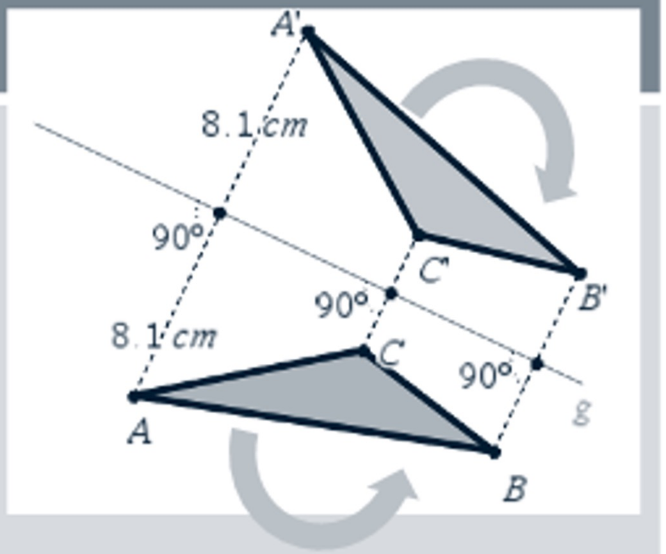


Eine Abbildung ist genau dann…	*, wenn…*
längentreu	… die Streckenlängen aller Bildfiguren gleich entsprechenden Streckenlängen der Originalfiguren sind.
winkeltreu	… die Winkelmaße aller Bildfiguren gleich entsprechenden Winkelmaßen der Originalfiguren sind.
geradentreu	… Geraden immer auf Geraden abgebildet werden.
parallelentreu	… zueinander parallele Geraden immer in zueinander parallele Geraden abgebildet werden.
flächeninhaltstreu	… Flächen immer in Flächen gleichen Flächeninhaltes abgebildet werden.
orientierungstreu (umlaufsinntreu)	… der Umlaufsinn jeder Figur (z.B. eines Dreiecks) erhalten bleibt.

Achsenspiegelung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Eigenschaft	Geradenspiegelung
Invarianten	winkeltreu längentreu geradentreu parallelentreu flächeninhaltstreu
„Bestimmende Elemente“	Gerade (die Spiegelachse)
Orientierung	nicht umlaufsinntreu (= nicht orientierungstreu)
Fixelemente	Fixpunkte: Alle Punkte von g Fixpunktgerade: g Fixgeraden: g und alle Senkrechen zu g
Umkehrabbildung S_g^{-1}	S_g



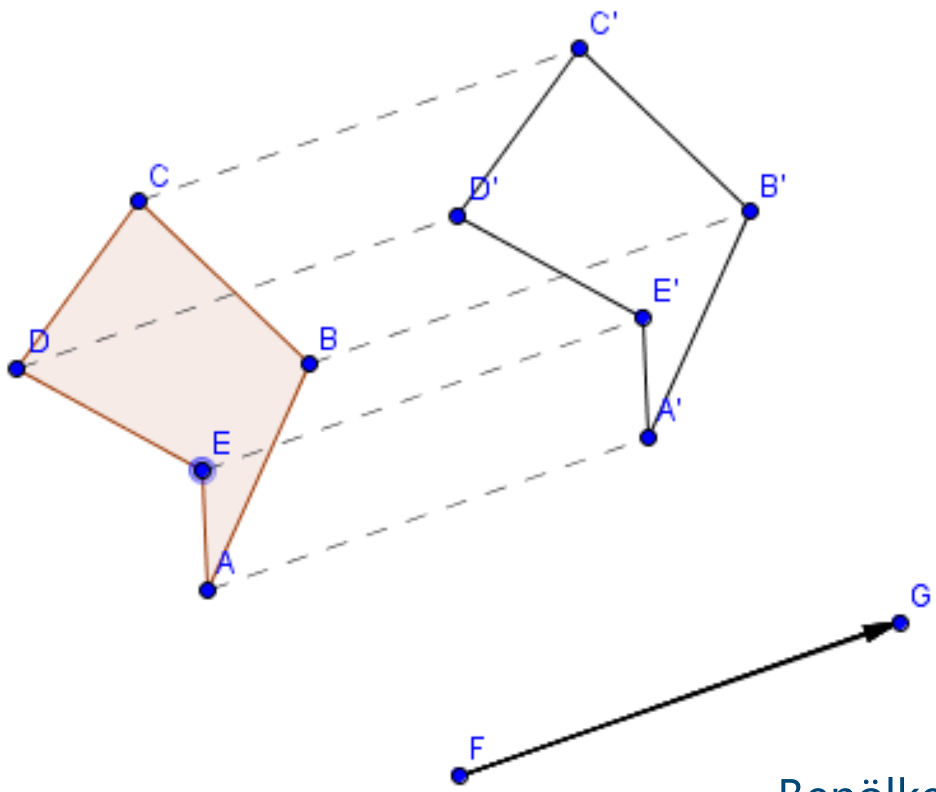
Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 118ff

Verschiebung

Definition: Verschiebung

Eine Abbildung $V_{\vec{v}}$ heißt (Parallel-)Verschiebung (oder Translation), wenn jedem Punkt P ein Bildpunkt P′ zugeordnet ist, der von P aus in konstanter Richtung konstante Entfernung hat (Verschiebungsvektor $\vec{v}$).

Formal: $\overrightarrow{PP'}$ ist richtungsgleich zu $\vec{v}$ und $|\overrightarrow{PP'}| = |\vec{v}|$.

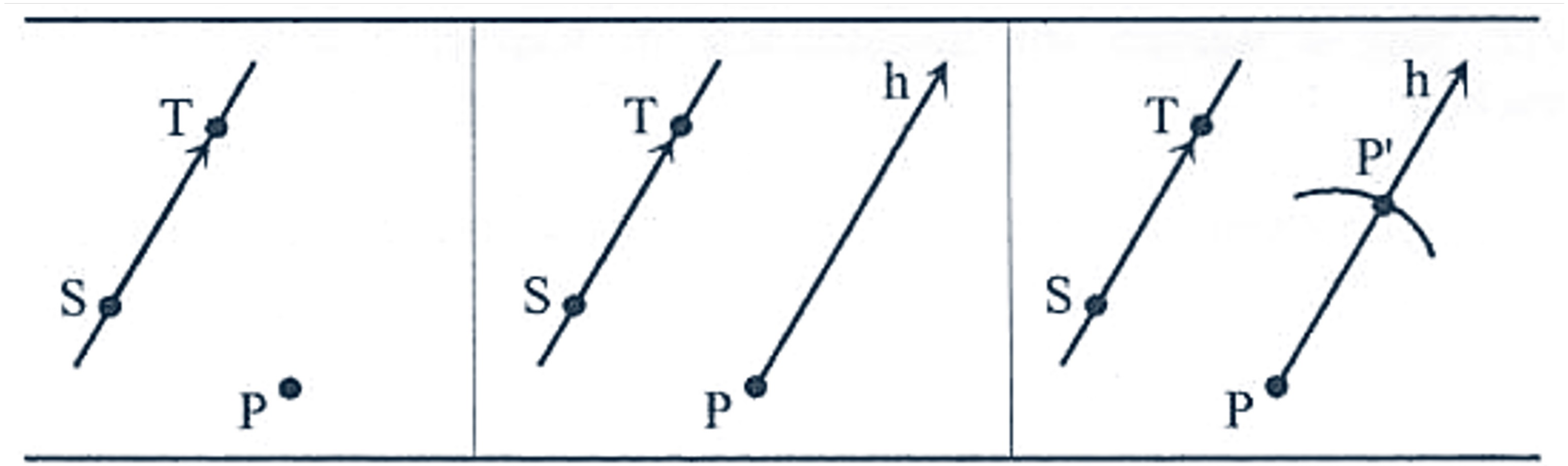


Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 124

Verschiebung

Konstruktion

Der Verschiebevektor sei durch zwei Punkte S und T gegeben.



Konstruktionsbeschreibung:

- Parallele h zu $\overline{ST}$ durch P.
- $\{P'\} = h \cap k(P; |\overline{ST}|)$

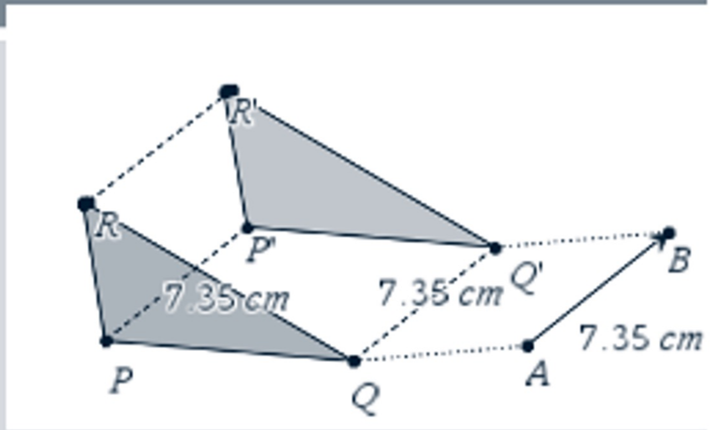
Welche Eigenschaften hat die Verschiebung?

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 124

Verschiebung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Eigenschaft	Verschiebung um $\overrightarrow{AB}$
Invarianten	winkeltreu längentreu geradentreu parallelentreu flächeninhaltstreu
„Bestimmende Elemente“	Verschiebungsvektor $\overrightarrow{AB}$
Orientierung	umlaufsinntreu (= orientierungstreu)
Fixelemente	Fixpunkte: – Fixpunktgerade: – Fixgeraden: alle Geraden parallel zur Geraden durch A und B
Umkehrabbildung $V_{A,B}^{-1}$	Verschiebung um $\overrightarrow{BA}$: $V_{B,A}$



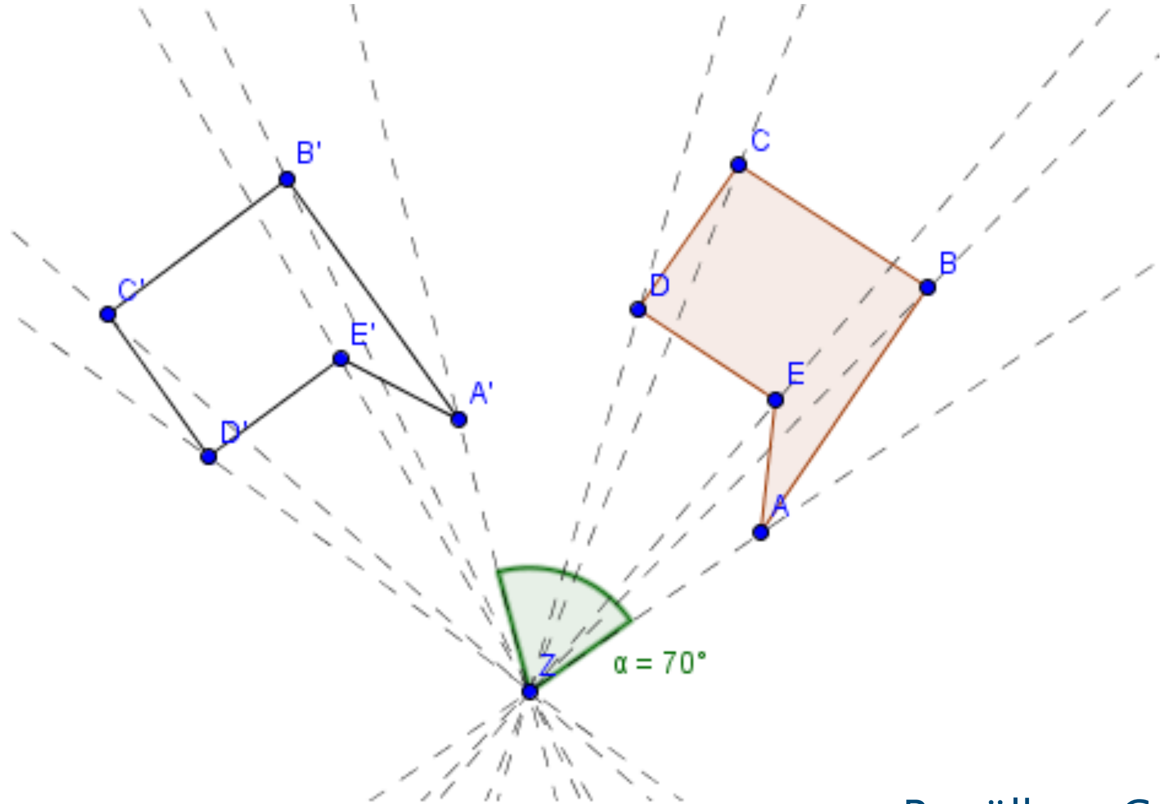
Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 125f

Drehung

Definition: Drehung

Gegeben sei ein Punkt Z der Ebene und ein Winkel α. Eine Abbildung $D_{Z,\alpha}$ heißt **Drehung**, wenn jedem Punkt P ein Bildpunkt P′ so zugeordnet ist, dass beide gleichweit von Z (dem **Drehzentrum**) entfernt sind und $\measuredangle$PZP′ = α (**Drehwinkel**) gilt.

Formal: Wenn P = Z, dann P′ = P. Wenn P ≠ Z, dann ist $|\overline{PZ}| = |\overline{P'Z}|$ und $\measuredangle PZP' = \alpha$.



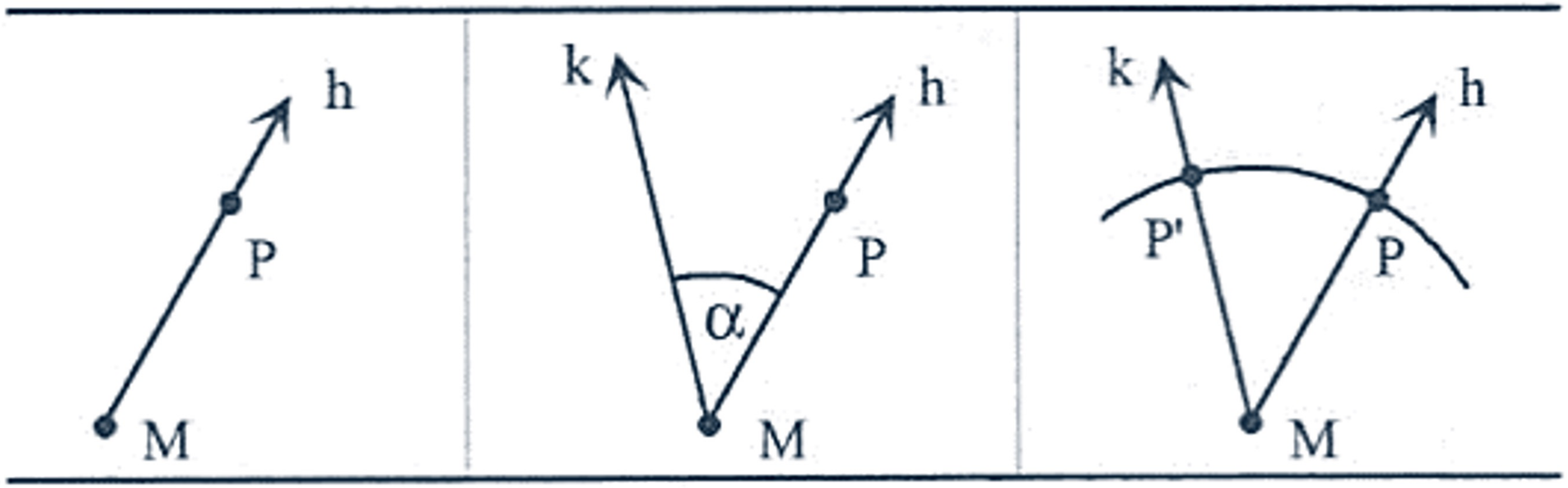
Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 126

Drehung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Konstruktion

Der Seien der Punkt M und der Winkel α gegeben.



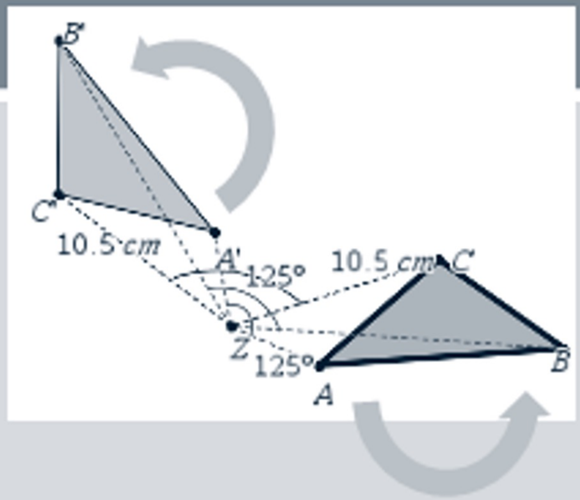
Konstruktionsbeschreibung:

- Die Halbgerade $\overrightarrow{MP}$ zeichnen und h nennen.
- Die Halbgerade k mit Anfangspunkt M zeichnen, für die gilt: w(h,k) = w(α)
- Denjenigen Punkt auf k mit P' bezeichnen, für den gilt:
- $l(\overrightarrow{MP}) = l(\overrightarrow{MP'})$

Welche Eigenschaften hat die Drehung?

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 127

Drehung



Eigenschaft	Drehung
Invarianten	winkeltreu längentreu geradentreu parallelentreu flächeninhaltstreu
„Bestimmende Elemente“	Drehzentrum Z und Drehwinkel α
Orientierung	umlaufsinntreu (= orientierungstreu)
Fixelemente	Fixpunkte: Z Fixpunktgerade: – Fixgeraden: – (Ausnahme: 180°-Drehung, s.u. Sonderfall)
Umkehrabbildung $D_{z,\alpha}^{-1}$	Drehung um Z mit Winkel 360°-α, also $D_{Z,360°-\alpha}$
Sonderfall	Ist α = 180°, so erhält die Drehung den Namen „Punktspiegelung“.

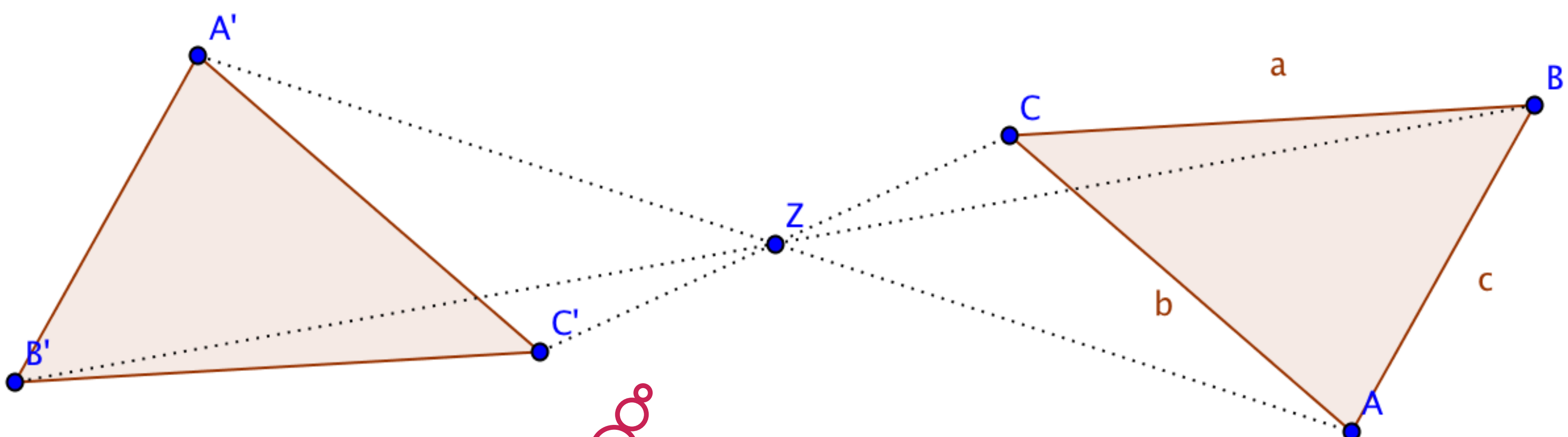
Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 127f

Punktspiegelung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Definition: Punktspiegelung

Gegeben sei ein Punkt Z der Ebene. Eine Abbildung PZ heißt **Punktspiegelung** am Zentrum Z, wenn jedem Punkt P sein Bildpunkt P′ nach folgender Vorschrift zuordnet wird: Wenn P = Z, dann P′ = P. Wenn P≠ Z, dann liegt P′ auf der Halbegraden $\overrightarrow{PZ}$ und es gilt $|\overline{ZP}|=|\overline{ZP'}|$



Eine Punktspiegelung an Z entspricht einer **Drehung** um Z um 180°. Wir werden deshalb die Punktspiegelung nicht gesondert behandeln.

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 128

Die Identität

Definition: Identität

Eine Abbildung f einer Menge M auf sich selbst, bei der jedes Element von M auf sich selbst abgebildet wird, also f(x) = x für alle x $\in$ M gilt, heißt **Identität**.

Bezeichnung: id (also z. B. id(P) = P).

Beispiele

- Drehung um 0°
- Verschiebung um den Nullvektor

Wir können die Identität sowohl als **Drehung** als auch als **Verschiebung** auffassen. Es gilt: $D_{Z;0^o} = V_{\vec{0}} = id$

Wir haben diese Sonderfälle bei der vorherigen Auflistung der Eigenschaften nicht berücksichtigt!
Für die Identität ist beispielsweise jeder Punkt der Ebene Fixpunkt, jede Gerade Fixpunktgerade.

Kongruenzabbildung

Achsenspiegelung, Drehung und Verschiebung sind

- **bijektiv**, d.h. sie sind umkehrbar
- **geradentreu**, d.h. sie bilden Geraden auf Geraden ab (und daher auch halbgeradentreu und streckentreu)
- **längentreu**, d.h. Streckenlängen bleiben unverändert (und daher auch flächentreu)
- **winkeltreu**, d.h. Winkelgrößen bleiben unverändert (und daher auch parallelentreu, d.h. zueinander parallele Geraden werden auf zueinander parallele Geraden abgebildet)

Abbildungen mit diesen Eigenschaften nennt man

Kongruenzabbildungen (von lat. congruens = übereinstimmend, passend).

Sie lassen Form und Größe einer Figur unverändert.

Achsenspiegelung

Übung 7

Achsenspiegelung als Kongruenzabbildung in der Ebene

- **Drehung:** Darstellung als Verkettung von zwei Achsenspiegelungen, deren Spiegelachsen sich im Drehzentrum schneiden
- **Punktspiegelung:** Drehung um 180° oder Verkettung zweier Achsenspiegelungen, bei der die Achsen senkrecht zueinander stehen
- **Verschiebung:** Verkettung zweier Achsenspiegelungen, bei der die Achsen parallel zueinander und senkrecht zur Verschieberichtung stehen
- **Schubspiegelung:** Verkettung einer Achsenspiegelung mit einer Verschiebung mit Spiegelachse in Richtung Verschiebung

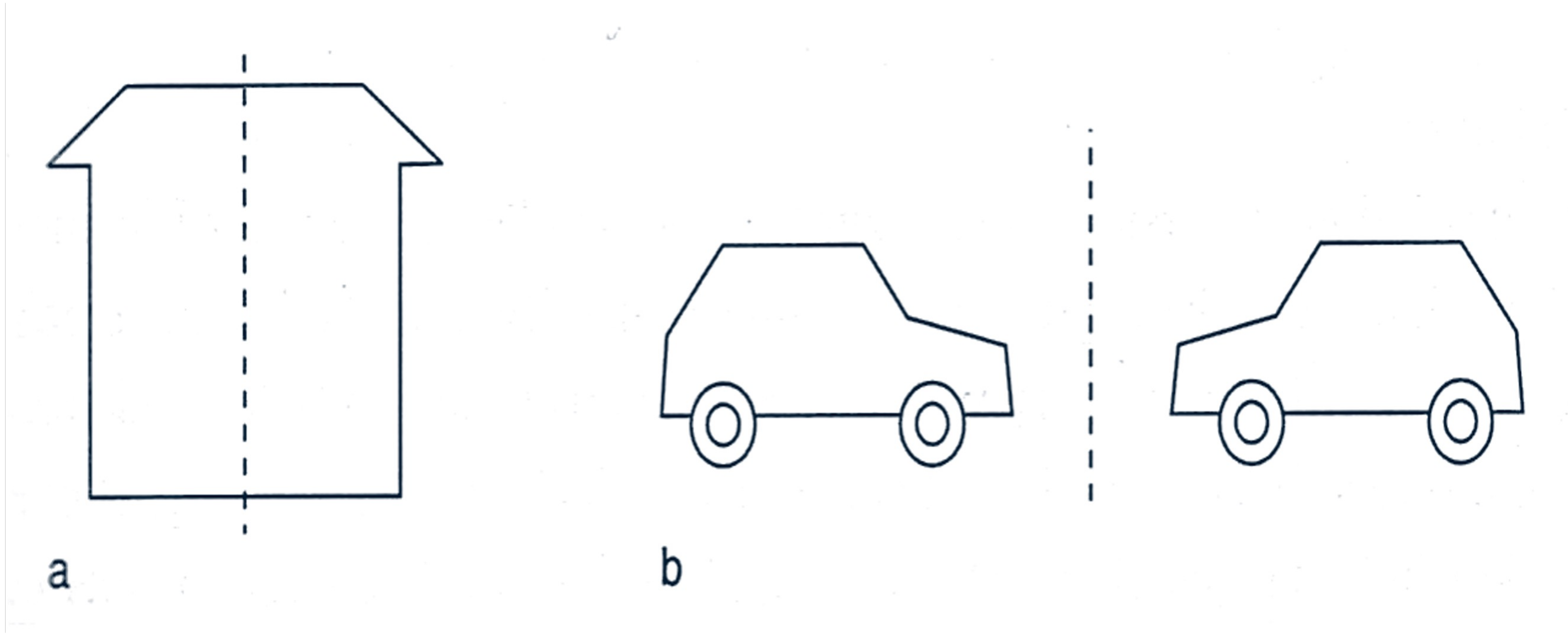
Franke & Reinhold (2016), S. 262

Achsenspiegelung

Achsenspiegelung als Kongruenzabbildung in der Ebene

Es wird prinzipiell unterschieden zwischen

- einer symmetrischen Figur (a), d.h. innerhalb der Figur gibt es mind. 1 Spiegelachse und
- zwei Figuren (b), die zueinander symmetrisch sind.



Franke & Reinhold (2016), S. 269

Symmetrie und Deckabbildungen ebener Figuren

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 22/23

Was ist eine symmetrische Figur?

Definition: symmetrisch, Deckabbildung

Eine Figur F heißt **symmetrisch**, wenn es eine nichttriviale Kongruenzabbildung (also eine Kongruenzabbildung, die nicht die Identität ist) gibt, die F auf sich selbst abbildet.

Jede Kongruenzabbildung, die F auf sich selbst abbildet, heißt **Deckabbildung** von F.

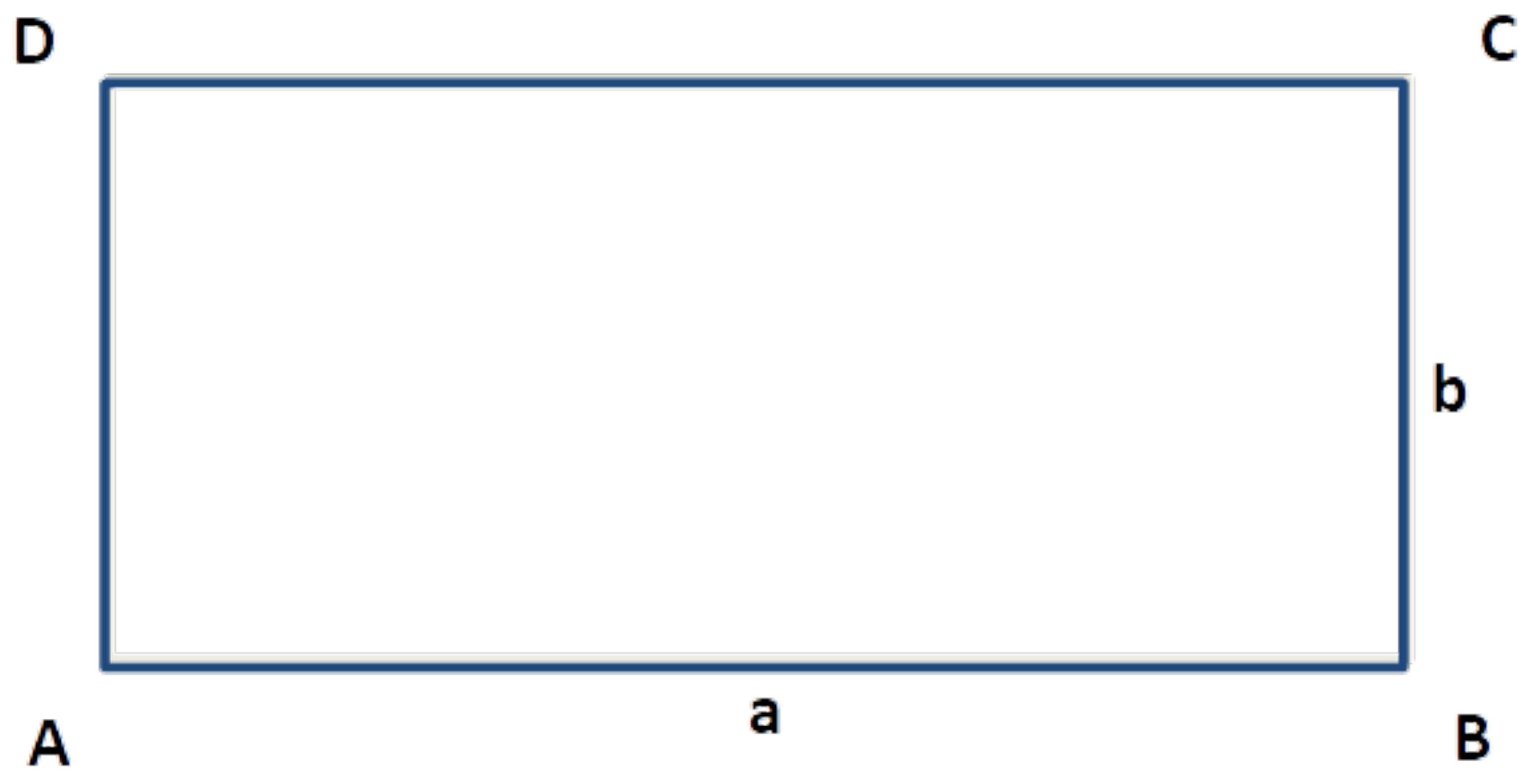
Also auch die Identität.

Deckabbildungen des Rechtecks

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 22/23

Welche Deckabbildungen hat das Rechteck?



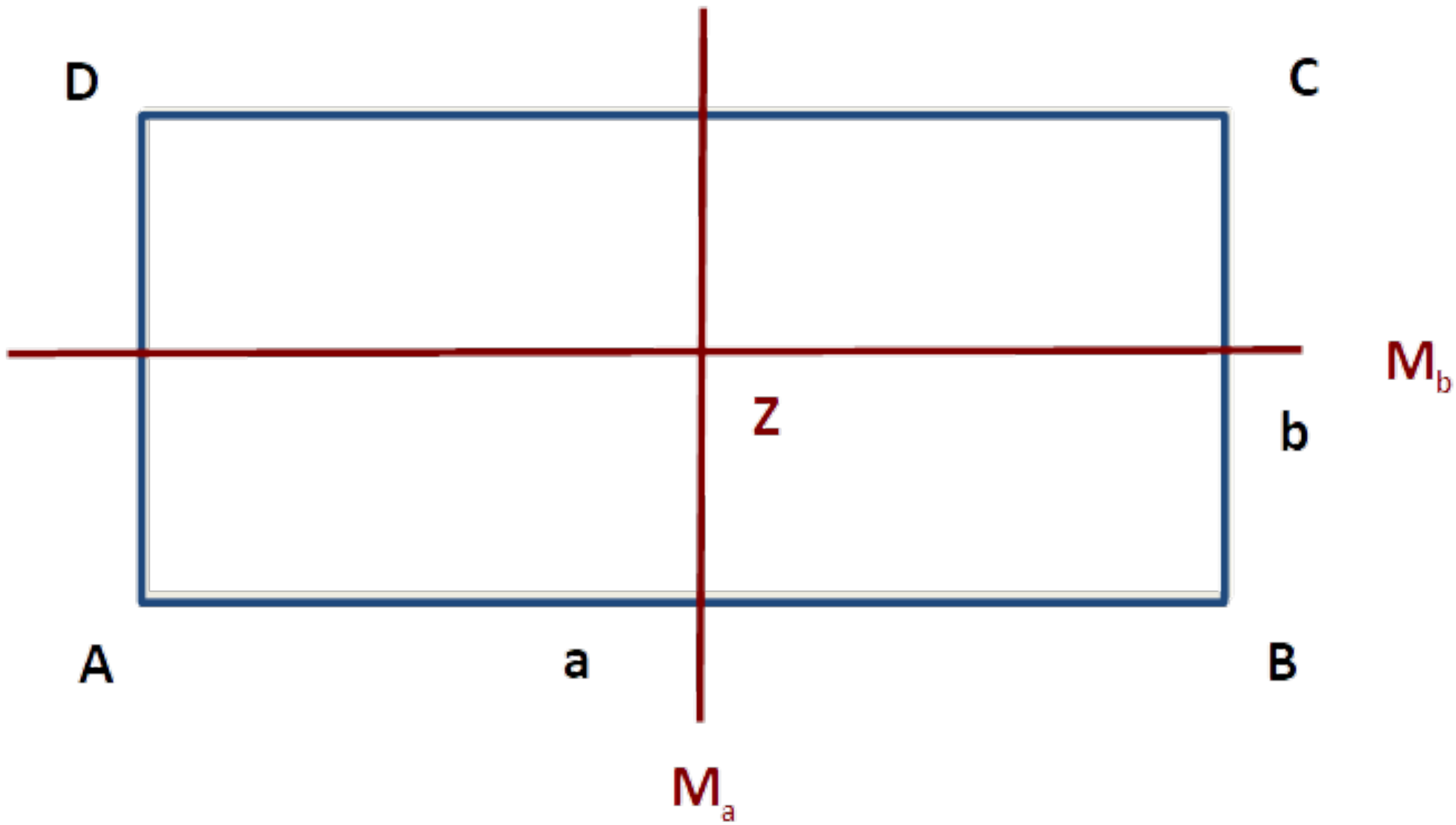
Deckabbildungen des Rechtecks

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Welche Deckabbildungen hat das Rechteck?

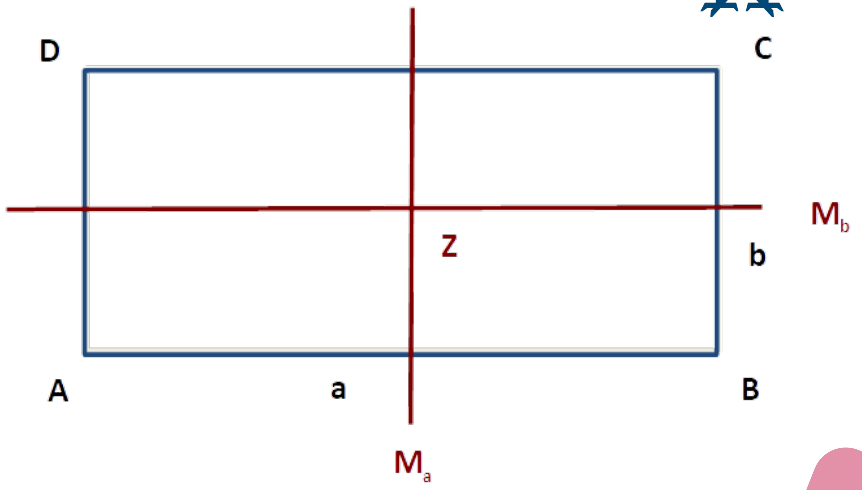
1. Id = Identität
2. $D_{Z;180}$ = Drehung um Z um 180°
3. S_{Ma} = Spiegelung an M_a
4. S_{Mb} = Spiegelung an M_b

ElMa WiSe 22/23



Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 220

Deckabbildungen des Rechtecks
Verknüpfungstafel



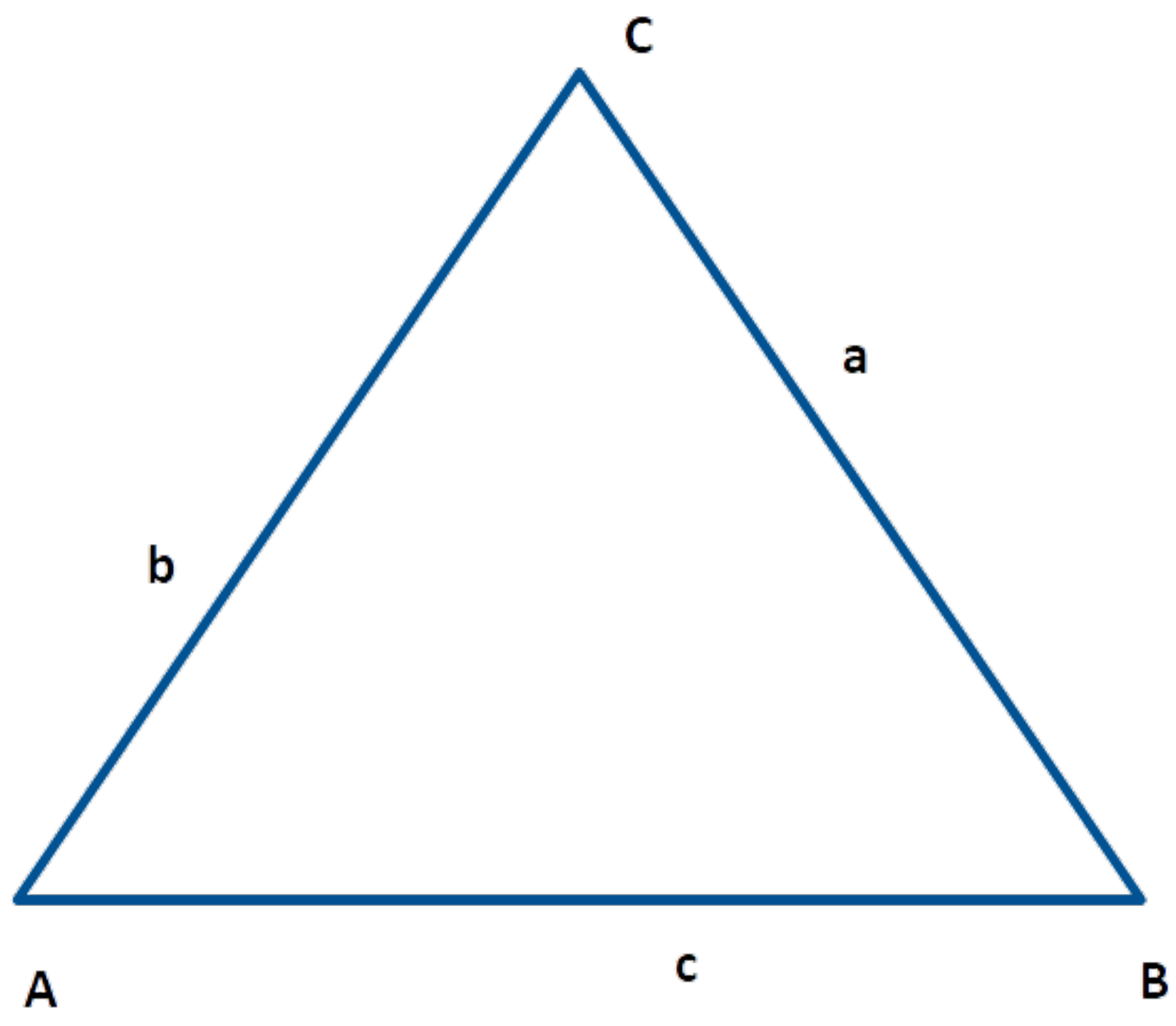
∘ (erst → , dann ↓)	**Id**	**$D_{Z;180}$**	**S_{Ma}**	**S_{Mb}**
Id	Id	$D_{Z;180}$	S_{Ma}	S_{Mb}
$D_{Z;180}$	$D_{Z;180}$	Id	S_{Mb}	S_{Ma}
S_{Ma}	S_{Ma}	S_{Mb}	Id	$D_{Z;180}$
S_{Mb}	S_{Mb}	S_{Ma}	$D_{Z;180}$	Id

Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 22/23

Welche Deckabbildungen hat das gleichseitige Dreieck?

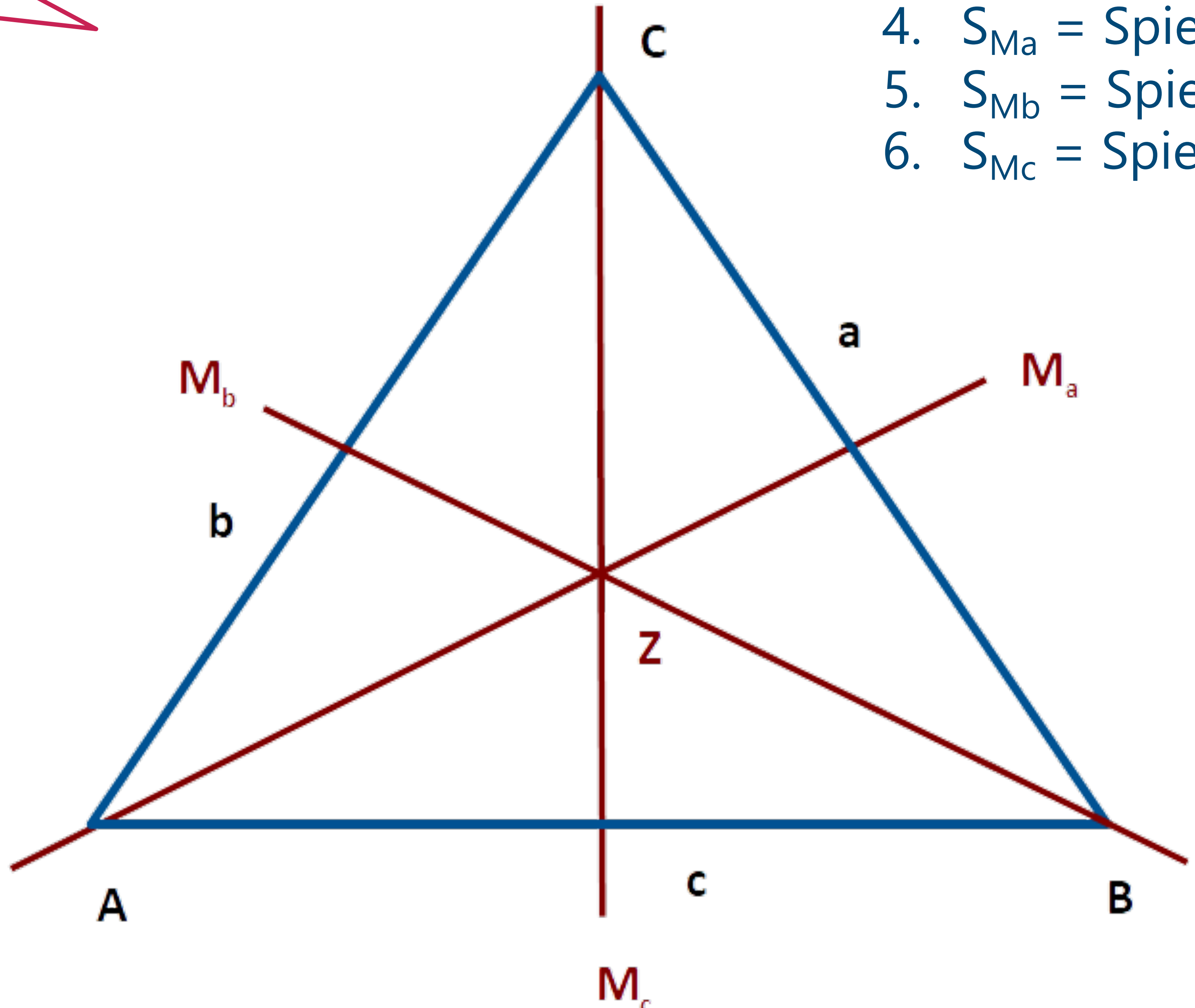


Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Welche Deckabbildungen hat das gleichseitige Dreieck?

1. Id = Identität
2. $D_{Z;120}$ = Drehung um Z um 120°
3. $D_{Z;240}$ = Drehung um Z um 240°
4. S_{Ma} = Spiegelung an M_a
5. S_{Mb} = Spiegelung an M_b
6. S_{Mc} = Spiegelung an M_c



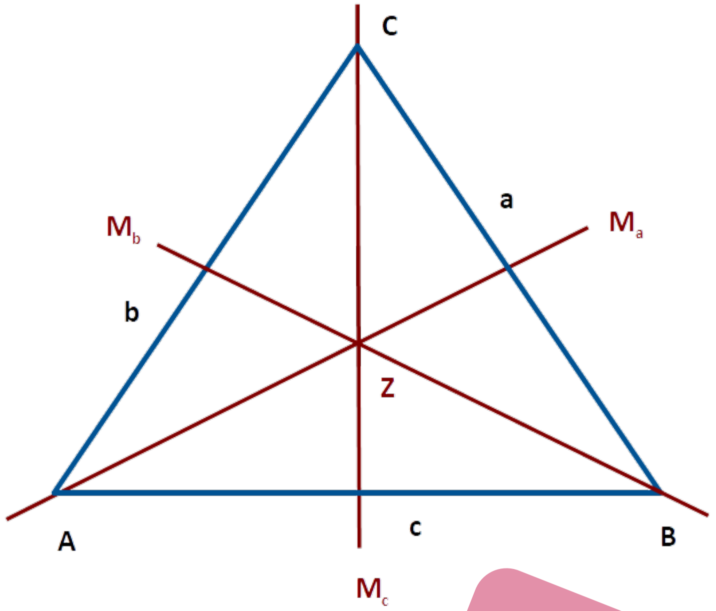
ElMa WiSe 22/23

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 220

Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks

Verknüpfungstafel

∘ (erst →, dann ↓)	**Id**	**$D_{Z;120}$**	**$D_{Z;240}$**	**S_{Mc}**	**S_{Mb}**	**S_{Ma}**
Id	Id	$D_{Z;120}$	$D_{Z;240}$	S_{Mc}	S_{Mb}	S_{Ma}
$D_{Z;120}$	$D_{Z;120}$	$D_{Z;240}$	Id	S_{Mb}	S_{Ma}	S_{Mc}
$D_{Z;240}$	$D_{Z;240}$	Id	$D_{Z;120}$	S_{Ma}	S_{Mc}	S_{Mb}
S_{Mc}	S_{Mc}	S_{Mb}	S_{Ma}	Id	$D_{Z;120}$	$D_{Z;240}$
S_{Mb}	S_{Mb}	S_{Ma}	S_{Mc}	$D_{Z;240}$	Id	$D_{Z;120}$
S_{Ma}	S_{Ma}	S_{Mc}	S_{Mb}	$D_{Z;120}$	$D_{Z;240}$	Id



ElMa WiSe 22/23

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 223

Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Satz: Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks

Die Menge der Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks bildet mit der Verknüpfung „Zusammensetzung" eine Gruppe (die „**Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks**").

Definition: Gruppe

Eine Menge (G) zusammen mit einer Verknüpfung ($\circ$) heißt **Gruppe**, wenn gilt

(1) **Abgeschlossenheit:** Für alle $a, b \in G$ gilt: $a \circ b \in G$

(2) **Neutrales Element:** Es gibt ein Element $e \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt: $a \circ e = e \circ a = a$

(3) **Inverses Element:** Für jedes $a \in G$ existiert ein $a^{-1} \in G$, so dass gilt: $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$

(4) **Assoziativität:** Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Gilt zusätzlich die folgende Eigenschaft, heißt die Gruppe abelsch oder kommutativ.

(5) **Kommutativität:** Für alle $a, b \in G$ gilt $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: Die ganzen Zahlen bilden zusammen mit der Addition eine Gruppe. Die ganzen Zahlen bilden zusammen mit der Multiplikation keine Gruppe.

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 223f

Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 22/23

Satz: Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks

Die Menge der Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks bildet mit der Verknüpfung „Zusammensetzung“ eine Gruppe (die „**Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks**“).

(1) **Abgeschlossenheit:** Seien f und g zwei Deckabbildungen von F, dann gilt wegen f(F) = F und g(F) = F auch $(f \circ g)F=F$.

(2) **Neutrales Element:** Mit $e = id \in M$ gibt es ein Neutrales Element, so dass für alle $f \in M$ gilt: $f \circ e = e \circ f = f$

(3) **Inverses Element:** Jede Kongruenzabbildung ist umkehrbar. Da für jedes $f^{-1} \in M$ gilt, folgt auch f(F)=F. Für jedes $f \in M$ existiert also ein $f^{-1} \in M$, so dass gilt: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id = e$.

(4) **Assoziativität:** Für Da die Assoziativität für alle Kongruenzabbildungen gilt, gilt sie insbesondere auch für die Elemente von M.

∘ (erst →, dann ↓)	Id	$D_{Z;120}$	$D_{Z;240}$	S_{Mc}	S_{Mb}	S_{Ma}
Id	Id	$D_{Z;120}$	$D_{Z;240}$	S_{Mc}	S_{Mb}	S_{Ma}
$D_{Z;120}$	$D_{Z;120}$	$D_{Z;240}$	Id	S_{Mb}	S_{Ma}	S_{Mc}
$D_{Z;240}$	$D_{Z;240}$	Id	$D_{Z;120}$	S_{Ma}	S_{Mc}	S_{Mb}
S_{Mc}	S_{Mc}	S_{Mb}	S_{Ma}	Id	$D_{Z;120}$	$D_{Z;240}$
S_{Mb}	S_{Mb}	S_{Ma}	S_{Mc}	$D_{Z;240}$	Id	$D_{Z;120}$
S_{Ma}	S_{Ma}	S_{Mc}	S_{Mb}	$D_{Z;120}$	$D_{Z;240}$	Id

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 223f

Symmetriegruppe von F

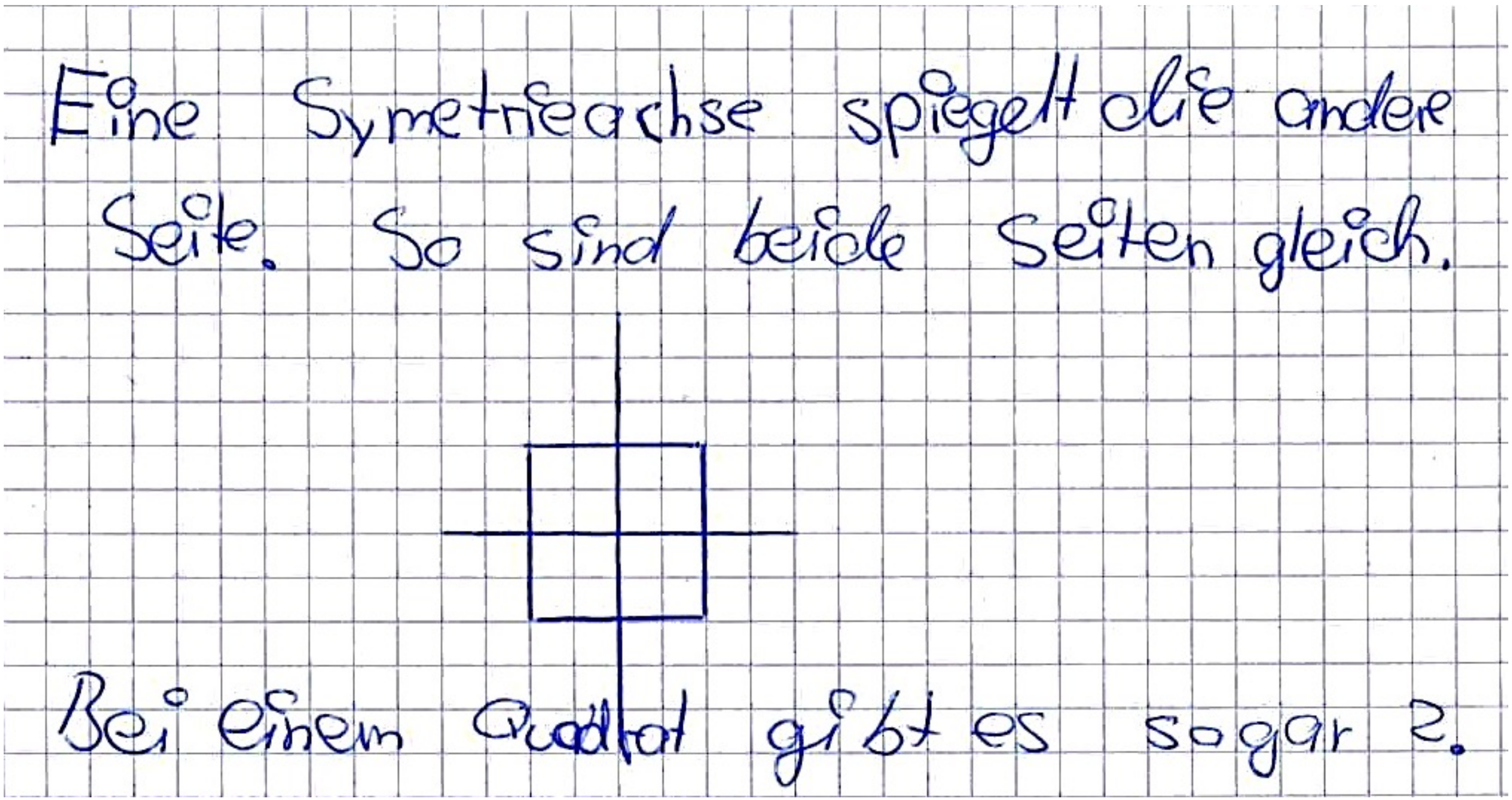
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 22/23

Satz: Symmetriegruppe von F

Die Menge der Deckabbildungen einer Figur F bildet mit der Verknüpfung „Zusammensetzung“ eine Gruppe, die **Symmetriegruppe von F**.

Symmetrie und Deckabbildungen ebener Figuren



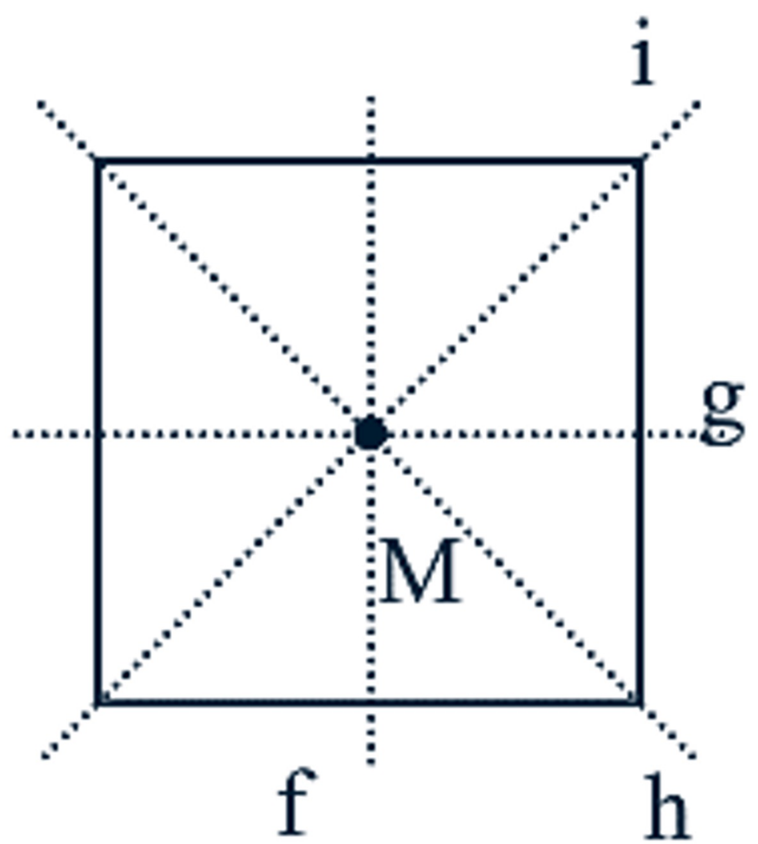
Deckabbildungen des Quadrats

Welche Deckabbildungen hat das Quadrat?

Die Menge der Deckabbildungen des Quadrates umfasst acht Elemente:

- die vier Drehungen $D_{M,0^\circ}$, $D_{M,90^\circ}$, $D_{M,180^\circ}$, $D_{M,270^\circ}$ um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und
- die vier Geradenspiegelungen S_f, S_g, S_h, S_i an den beiden Mittelsenkrechten bzw. den beiden Diagonalen.

ElMa WiSe 22/23



Übung 8

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 226

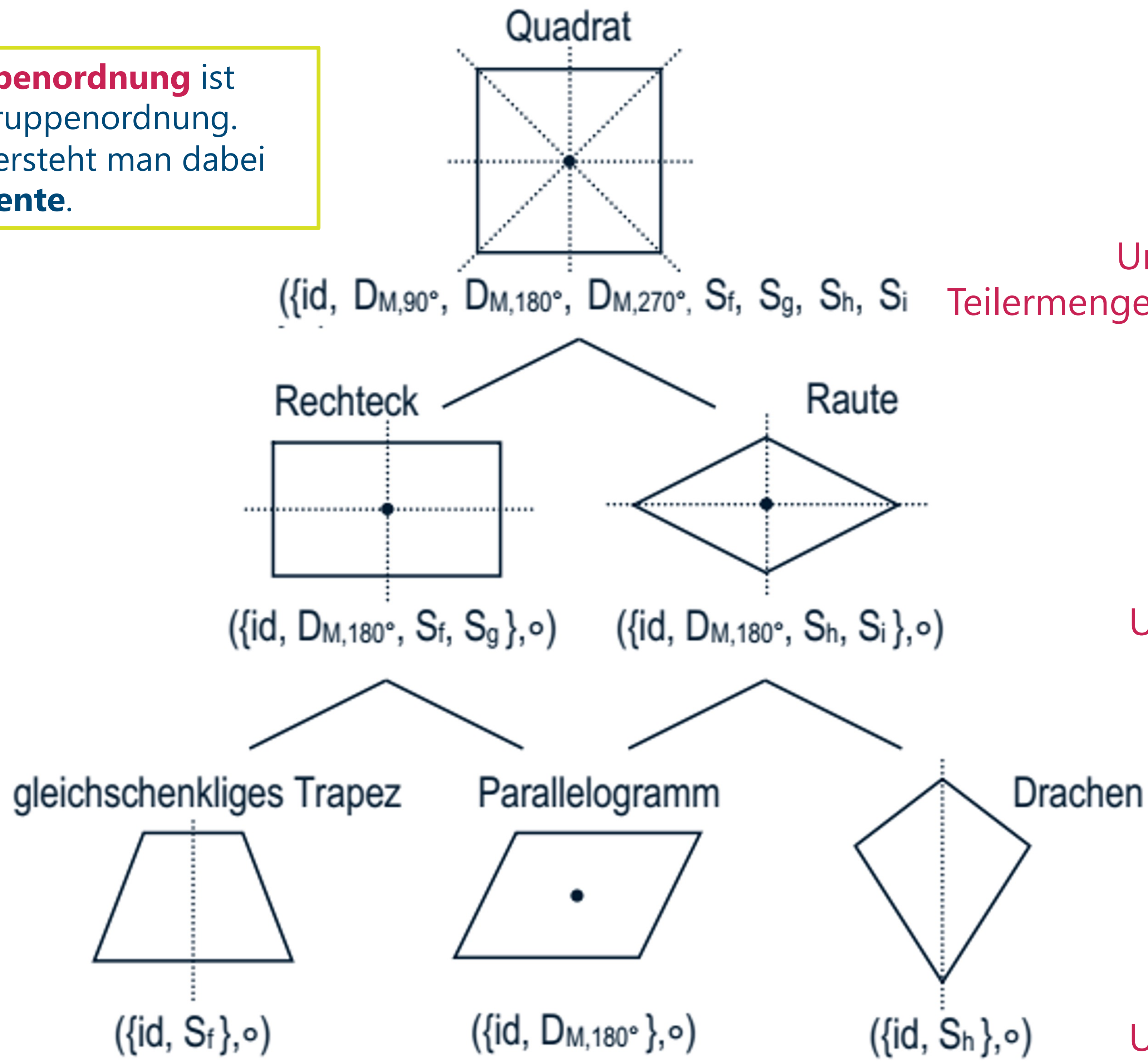
Haus der Vierecke

Ausgehend von der Deckabbildungsgruppe des Quadrats

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

ElMa WiSe 22/23

Satz: Die **Untergruppenordnung** ist stets ein **Teiler** der Gruppenordnung. Unter der Ordnung versteht man dabei die **Anzahl der Elemente**.



Untergruppenordnung: 8;
Teilermenge von 8: T(8) = {1, 2, 4, 8}

Untergruppenordnung: 4

Untergruppenordnung: 2

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 225ff

Zugänge zur Achsensymmetrie

- Legen
- Falten
- Falten & Schneiden
- Spiegeln mit einem Spiegel
- Zeichnen mit Hilfe von Gitterpapier

Achsensymmetrie

Durch Behandlung von Achsensymmetrie können:

- Symmetrien in der Umwelt entdeckt & verstanden werden
- die Eigenschaften symmetrischer Figuren erkannt werden
- selbst achsensymmetrische Figuren hergestellt werden

Fächerübergreifende Elemente

- Im Kunstunterricht (bspw. beim Gestalten eines Kunstwerkes)
- Im Sachunterricht (bspw. Wirkungsweise eines Spiegels)
- Im Deutschunterricht (bspw. Spiegelschrift, Palindrome)
- Im Sportunterricht (bspw. Übungen wie z.B. Hampelmann)

Franke & Reinhold (2016), S. 260f

Zugänge zur Achsensymmetrie

Vorlesung 5 & 6

Legen

- Aufforderung, eine Figur spiegelbildlich zu ergänzen
- „auf der einen Seite ist dasselbe zu legen wie auf der anderen Seite“, bspw. Haushälfte mit Fenster
- zur Überprüfung kann der Spiegel eingesetzt werden
- Begriffe:
  - spiegelgleich, spiegelverkehrt, spiegelbildlich
  - Spiegelachse, Spiegelgerade, Symmetrieachse

Spiegelbilder von HABA

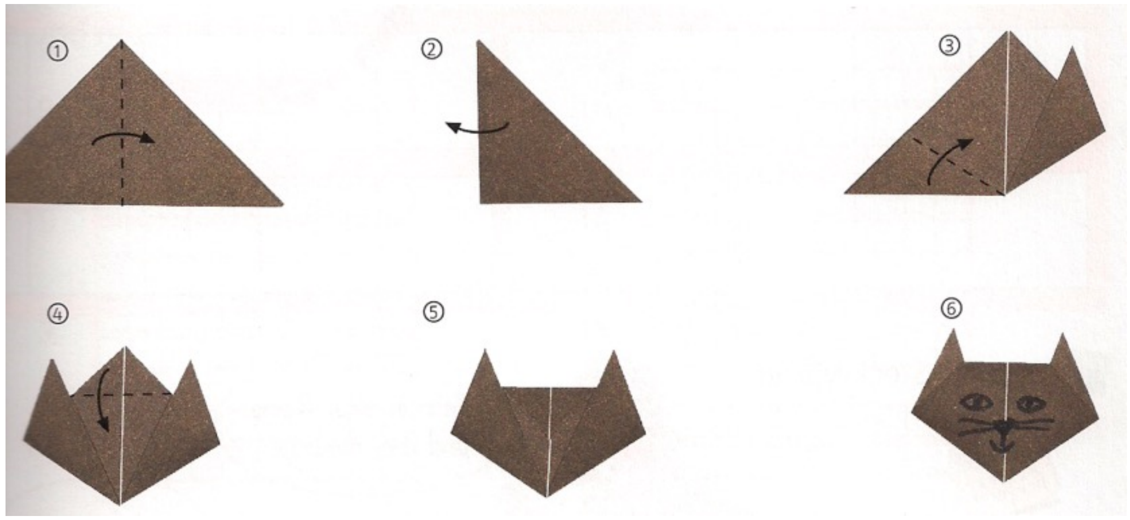
Franke & Reinhold (2016), S. 270

Zugänge zur Achsensymmetrie

Vorlesung 10

Falten

- Falten einfacher Objekte aus Rechtecken und Quadraten
- Endprodukte entfalten und Faltlinien betrachten
- deckungsgleiche Teile
- gleichlange Gegenseiten
- handelndes Lernen, soziales Lernen, sprachliche Kommunikation, fachlicher Aspekt



Franke & Reinhold (2016), S. 271

Denken und Rechnen 1, S. 53

Zugänge zur Achsensymmetrie

Falten und Schneiden

- Herstellung achsensymmetrischer Figuren aus Halbfiguren
- Deckungsgleichheit beider Figurenhälften
- Kennzeichnung der Faltlinie
- durch erneutes Falten die Deckungsgleichheit bewusst machen
- Faltlinie = Symmetrieachse

Franke & Reinhold (2016), S. 272f

Zugänge zur Achsensymmetrie

Spiegeln mit einem Spiegel

- knüpft an die Erfahrung der Kinder an
- Problemlösen durch „ausprobieren“
- Erzeugen symmetrischer Figuren als auch das Bild einer Figur

1. Mache ganz

2. Mache lang, mache kurz

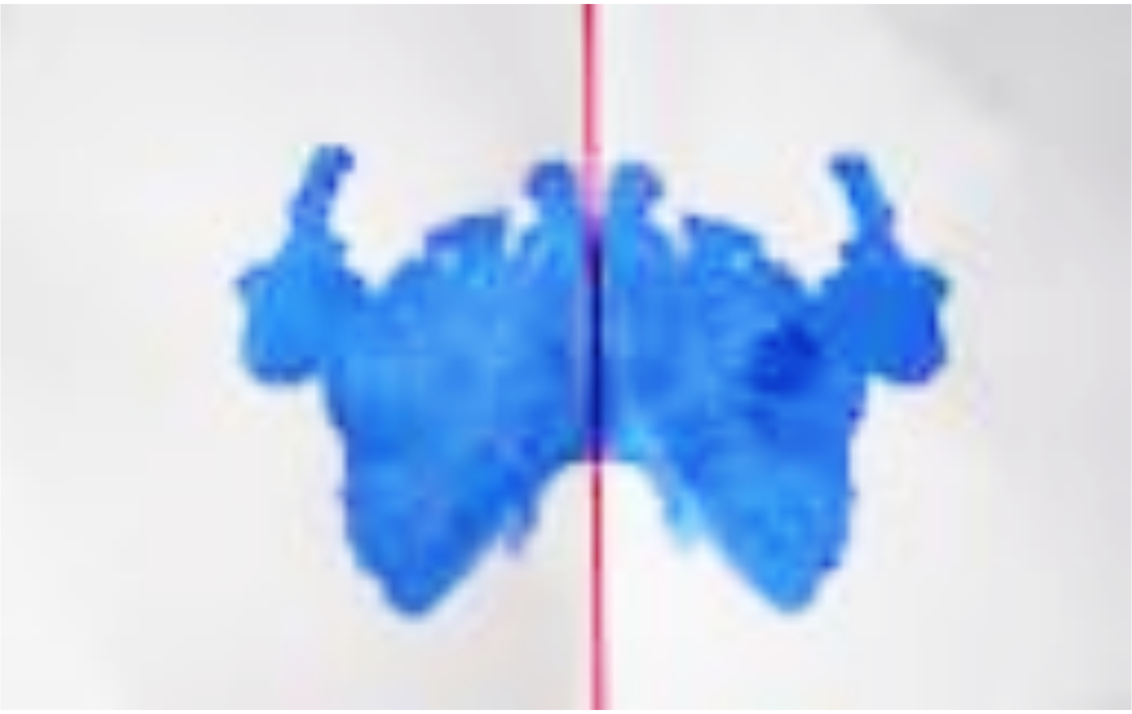
Franke & Reinhold (2016), S. 274

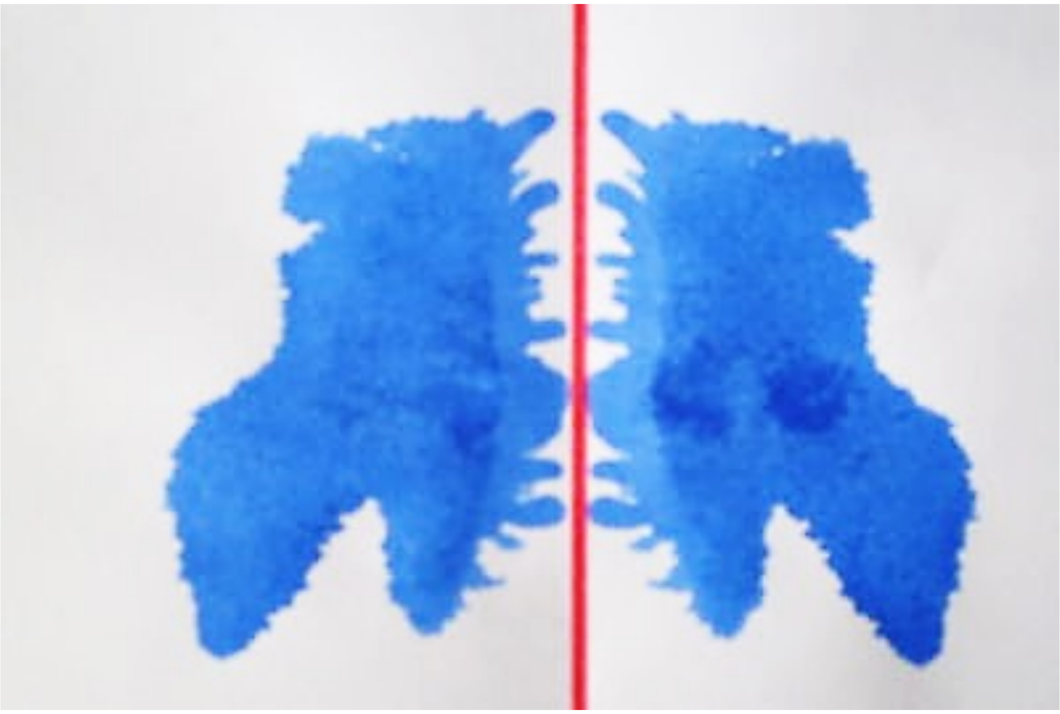
Zugänge zur Achsensymmetrie

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Kleckbilder

- auf Papierhälfte wird mit Wasserfarbe „gekleckst“, gefaltet und das Papier wieder geöffnet
- es entstehen Figuren, die Spiegelbilder von sich sind und Figuren, in denen es eine Spiegelachse gibt



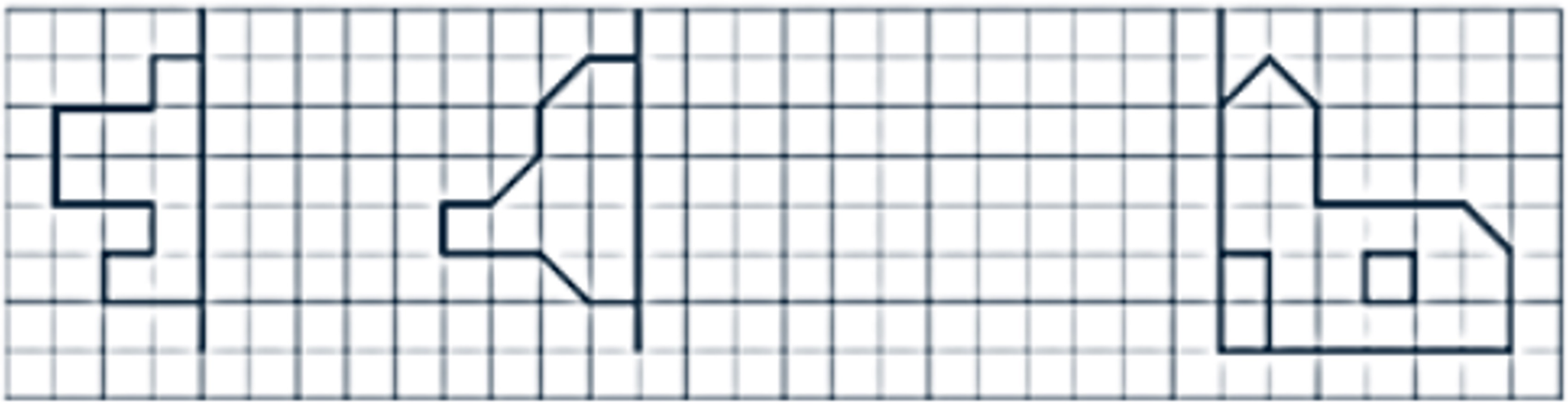


Franke & Reinhold (2016), S. 278

Zugänge zur Achsensymmetrie

Zeichnen mit Hilfe von Gitterpapier

- Ergänzen von Figuren auf Gitterpapier
- Ähnlich dem Legen
- Gitterpapier häufig Unterstützung beim Ergänzen und Zeichnen von Figuren



Franke & Reinhold (2016), S. 279

Zugänge zur Achsensymmetrie

Steigerung der Ansprüche in den bereitgestellten Aufgaben

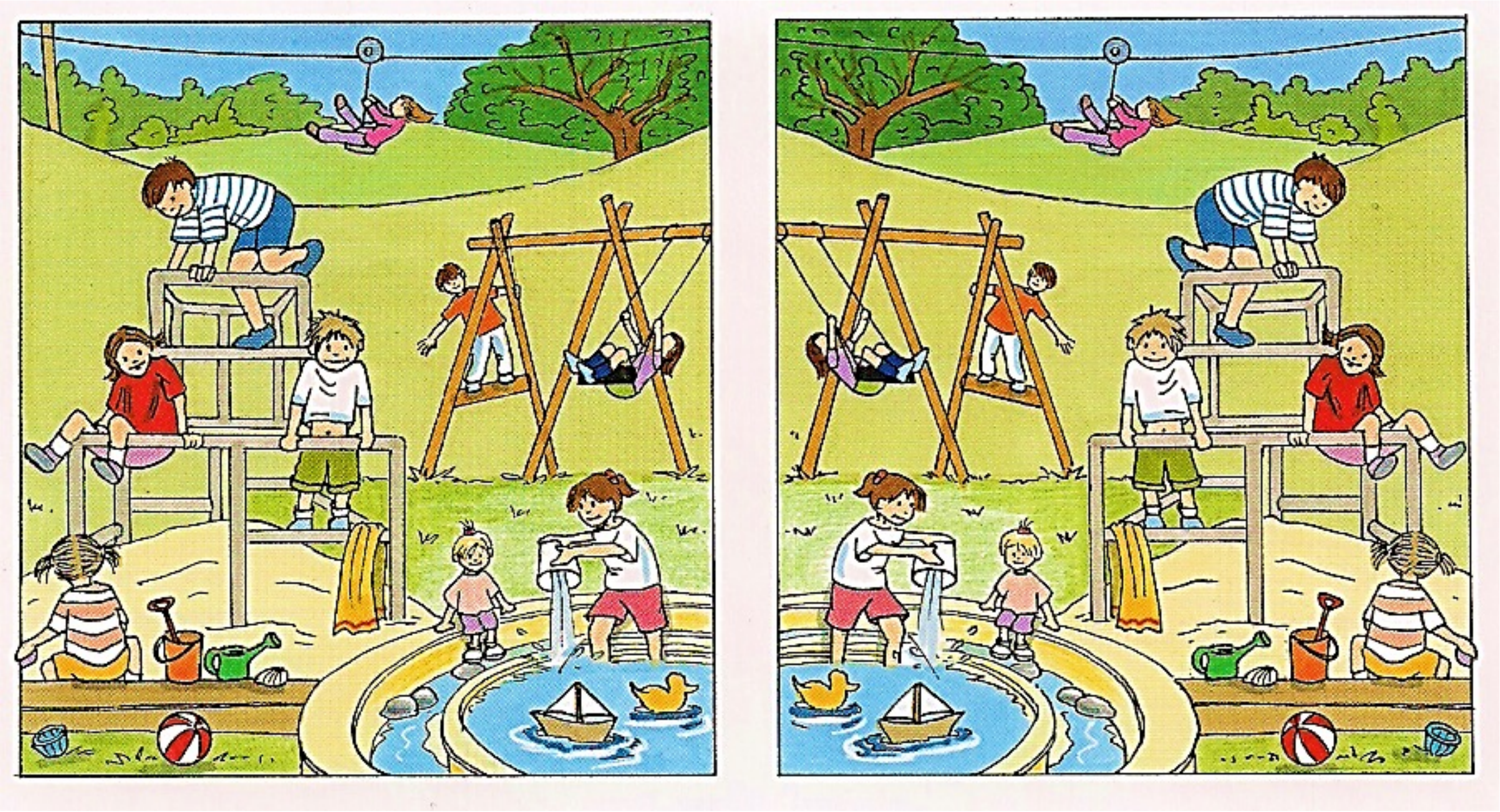
- **Lage der Symmetrieachse:** innerhalb → außerhalb
- **Ausrichtung der Symmetrieachse:** vertikal → horizontal → diagonal
- **Ergänzungen auf beiden Seiten der Symmetrieachse:** eine Hälfte der symmetrischen Figur gegeben → auf beiden Seiten der Symmetrieachse sind Ergänzungen vorzunehmen
- **Steigerung der Anzahl von Symmetrieachsen:** verschiedenste Figuren zu einem bestimmten Thema auf ihre (Mehrfach-)Symmetrie untersuchen

Übung 7

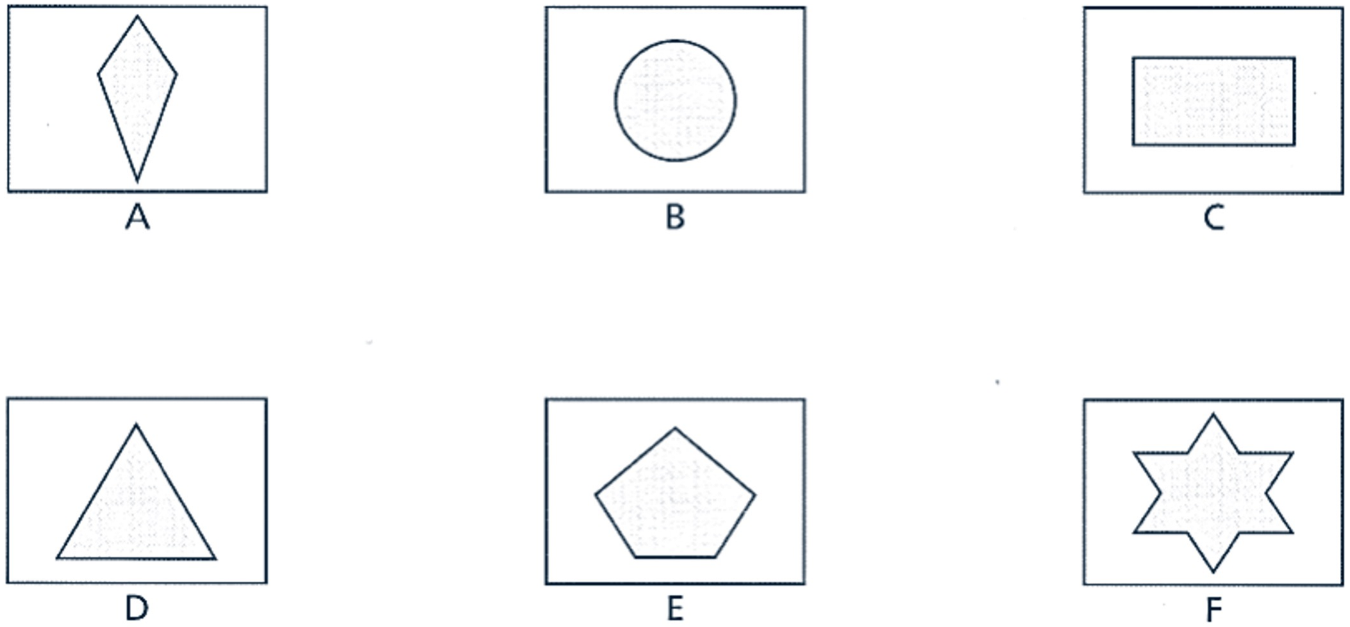
Franke & Reinhold (2016), S. 269f

Aktivitäten zur Achsensymmetrie

Aktivitäten zur Achsensymmetrie



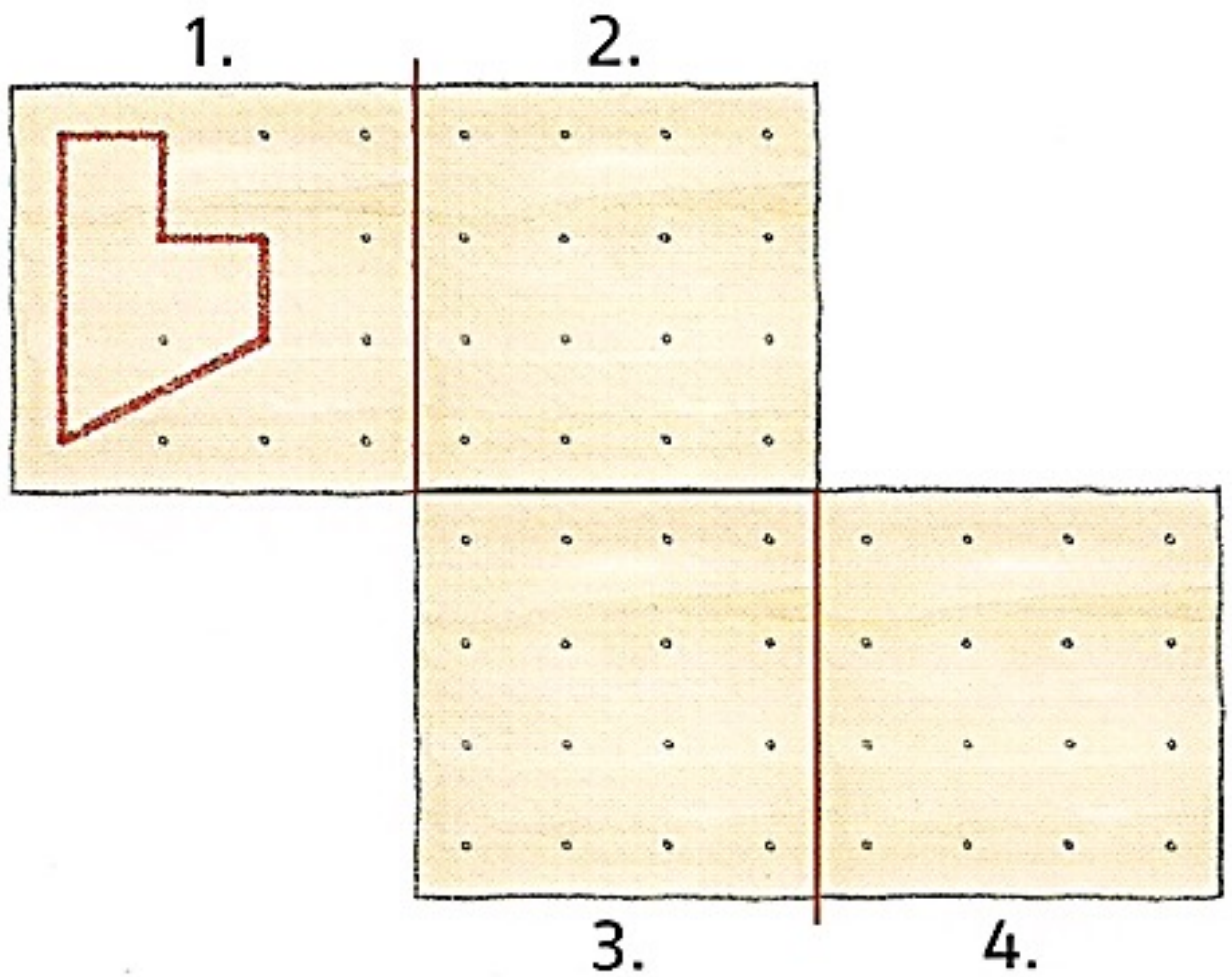
Finde die sechs Fehler im Spiegelbild rechts!

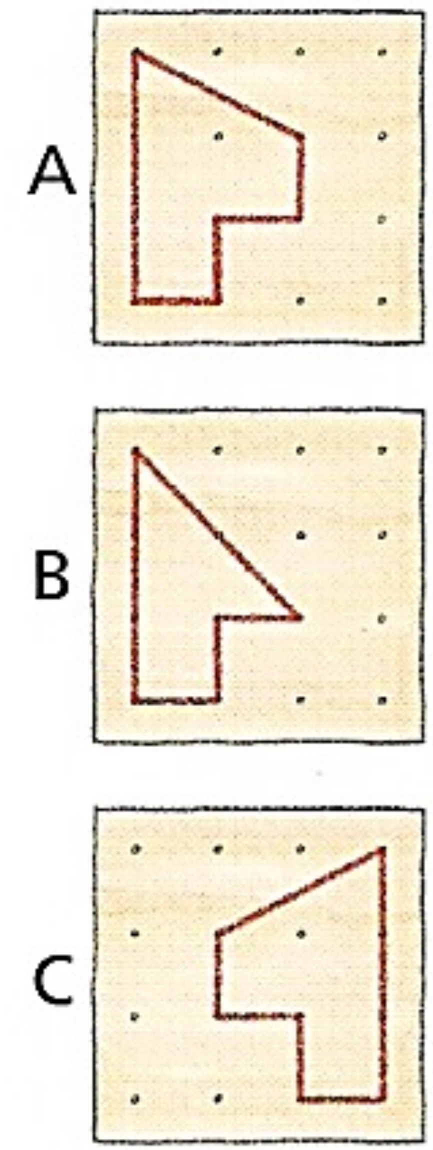


Wie viele Spiegelachsen?

Aktivitäten zur Achsensymmetrie

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES





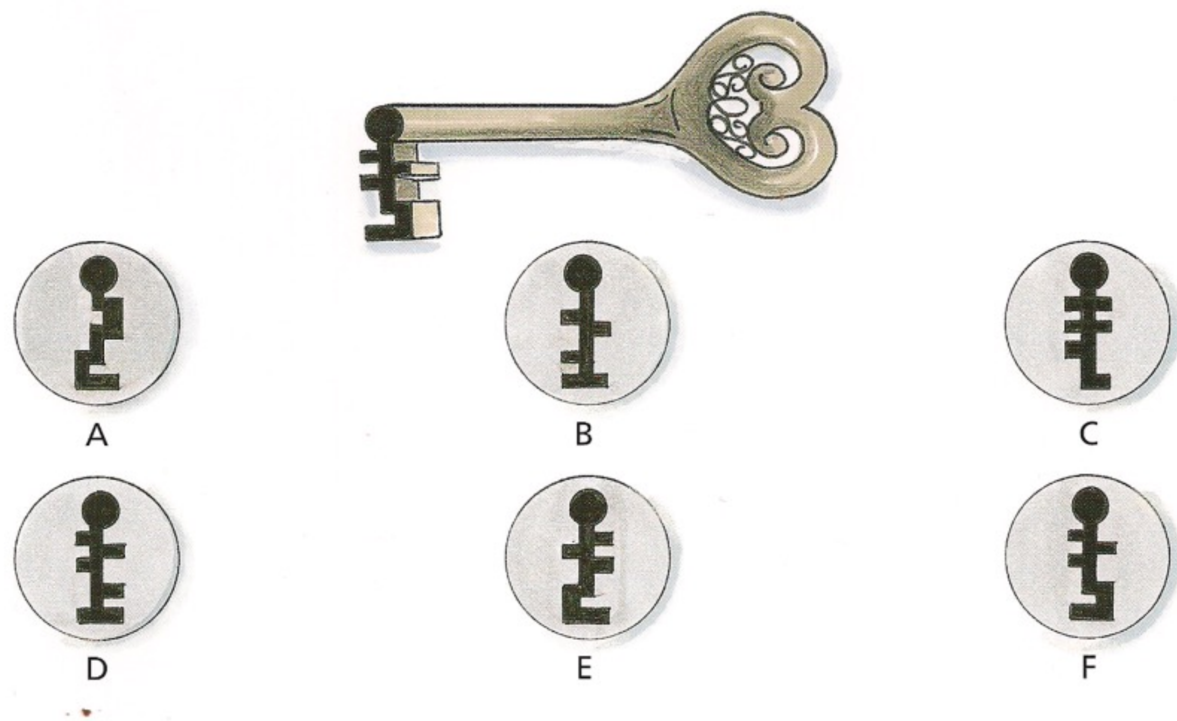
Spiegle diese Figuren nacheinander im Kopf!
Wie sieht die Figur auf dem vierten Geobrett aus?

Bearbeiten Sie die Aufgabe.

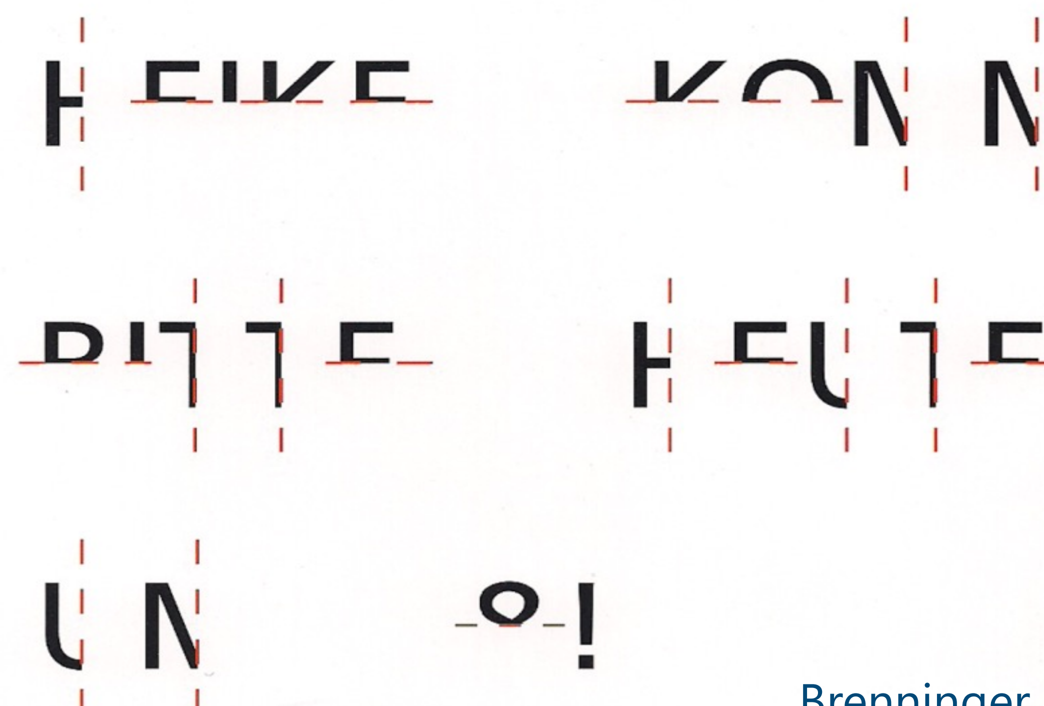
Brenninger & Studeny (2011)

Aktivitäten zur Achsensymmetrie

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES



Zu welchem Schloss passt der Schlüssel?



Geheime Botschaften

Brenninger & Studeny (2011)

Literatur

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Benölken, R., Gorski, H. J., & Müller-Philipp, S. (2018). Leitfaden Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden.

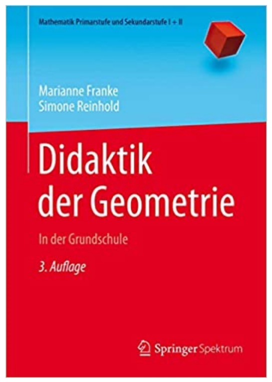
Brenninger, A. & Studeny, G. (2011). Kartei zur Kopfgeometrie. Braunschweig: Westermann.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.

Krauter, S., & Bescherer, C. (2013). Erlebnis Elementargeometrie: ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken. Springer-Verlag.

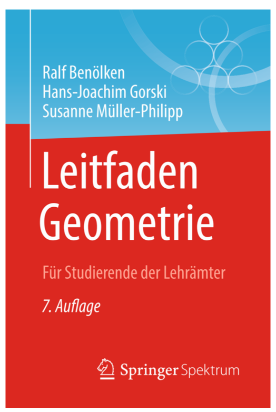
Zum Nach- und Weiterlesen

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES



Didaktischer Hintergrund (Primarstufe):

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule.* Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag. **Kapitel 8 „Symmetrie in der Ebene und im Raum“**



Fachlicher Hintergrund:

Benölken, R., Gorski, H. J., & Müller-Philipp, S. (2018). Leitfaden Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden, (https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-23378-5). **Abschnitt 4.2 „Kongruenzabbildungen“**

Symmetrie I (Kongruenzabbildungen, Haus der Vierecke)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

	Ich kann…
☐	Symmetrie im Alltag erkennen und Anknüpfungspunkte für den Unterricht ableiten.
☐	„Abbildung“, „Fixgerade“, „Fixpunkt“, „Fixpunktgerade“ definieren.
☐	„Achsenspiegelung“, „Verschiebung“, „Drehung“, „Punktspiegelung“ und „Identität“ definieren, Bildpunkte unter den jeweiligen Abbildungen konstruieren, Eigenschaften der Abbildungen nennen und begründen, warum bestimmte Eigenschaften erfüllt sind/ nicht erfüllt sind.
☐	„Kongruenzabbildung“ definieren und erkennen, ob es sich bei einer Abbildung um eine Kongruenzabbildung handelt oder nicht.
☐	Kongruenzabbildungen aus Achsenspiegelungen aufbauen.
☐	„symmetrisch“ und „Deckabbildung“ definieren und Deckabbildungen ebener Figuren erkennen und Verknüpfungstafeln erstellen.
☐	Zugänge zur Achsensymmetrie beschreiben und beurteilen und Lernsituationen mit einer Steigerung der Ansprüche in den bereitgestellten Aufgaben entwickeln.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Mitarbeit und bis übernächsten Dienstag!

Literatur

Benölken, R., Gorski, H. J., & Müller-Philipp, S. (2018). Leitfaden Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.

Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie. Berlin Heidelberg: Springer.

Weigand, Hans-Georg (2009): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I, Heidelberg, Spektrum Verlag.