

Didaktik der Mathematik in der Primarstufe III

Didaktik der Geometrie

**09 - Symmetrie II (Muster, Bandornamente,
Parkette)**

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Melanie Platz

Themenübersicht

Datum	Nr.	Thema	Grundidee
11.04.23	01	Organisatorisches & Einführung	
18.04.23	02	Entwicklung räumlicher Fähigkeiten	
25.04.23	03	Geometrische Begriffe und Wissenserwerb	
02.05.23	04	Zeichnen und Konstruieren	Formen und ihre Konstruktion
09.05.23	05	Ebene Figuren I	
16.05.23	06	Ebene Figuren II & Räumliche Objekte	
23.05.23	07	Symmetrie I (Kongruenzabbildungen)	Operieren mit Formen
30.05.23	08 (entfällt)	--	
06.06.23	09	Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette)	
13.06.23	10	Falten	
20.06.23	11	Längen, Flächen und Volumina I	Maße und Formeln
27.06.23	12	Längen, Flächen und Volumina II	Geom. Gesetzm. & Muster
04.07.23	13	Pläne & Maßstäbe, Wiederholung & Fragen I	Koordinaten
11.07.23	14 (online)	Wiederholung & Fragen II	
18.07.23	15	Klausur	

Ich kann...

- Zugänge zur Drehsymmetrie beschreiben und beurteilen und Lernsituationen mit einer Steigerung der Ansprüche in den bereitgestellten Aufgaben entwickeln.
 - beschreiben, was „Muster“, „Bandornamente“ und „Parkette“ auszeichnet.
 - Die 7 Typen von Bandornamenten beschreiben und Bandornamente den Typen zuordnen.
 - „Platonische Parkettierung“ und „Archimedische Parkettierung“ definieren und in Parkettierungen erkennen.
 - Die „Knabbertechnik“ und das „Drehverfahren“ beschreiben und anwenden.
 - Lernsituationen zu den Themen „Muster“, „Bandornamente“ und „Parkette“ erstellen.
-

Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette)

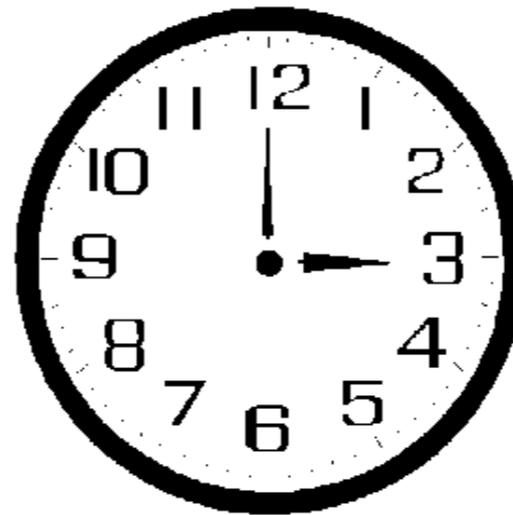
- Anregungen zur Drehsymmetrie
- Muster, Bandornamente, Parkette

Mit Inhalten von Dr. Anna-Marietha Vogler, Dr. Eva Hoffart u.a.

Anregungen zur Drehsymmetrie

Anregungen zur Drehsymmetrie

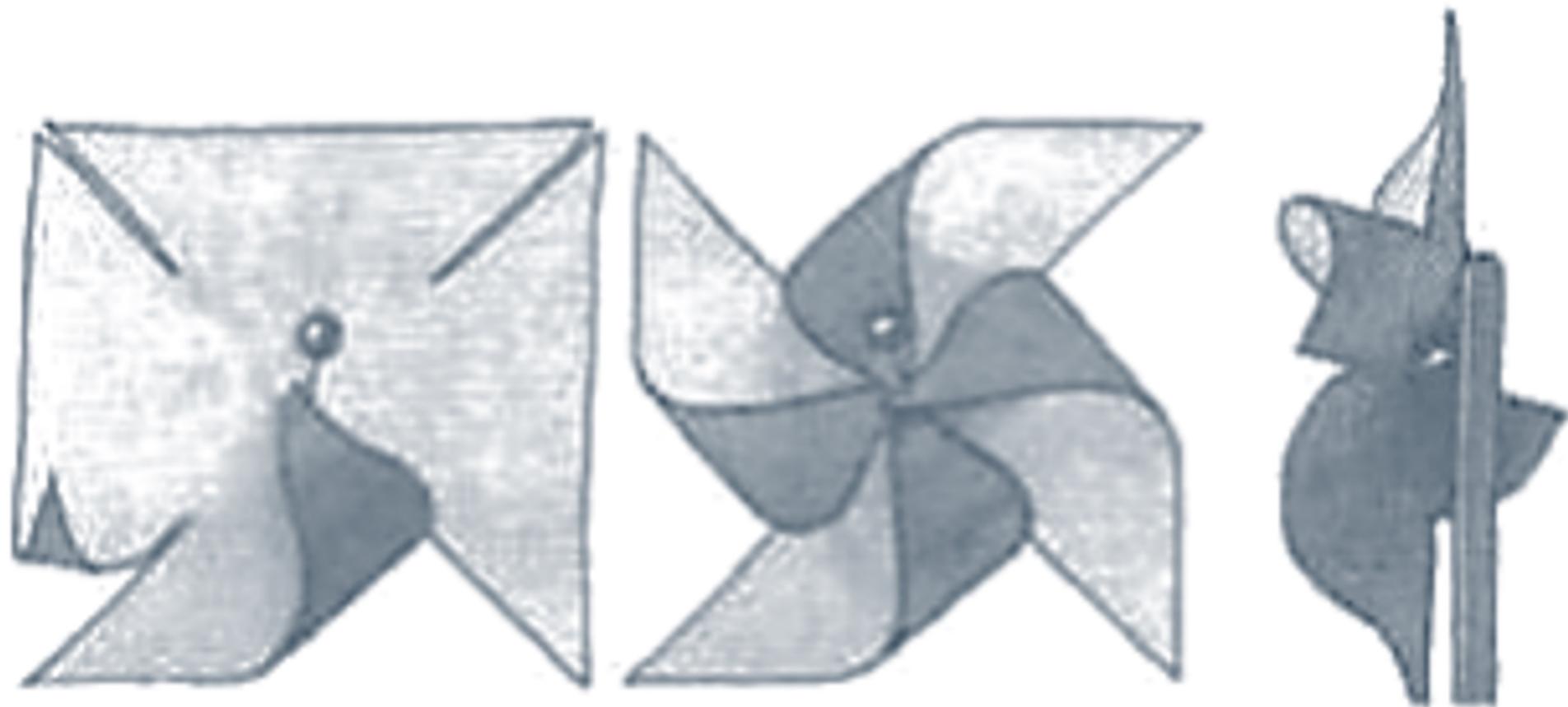
- Erkennen von Drehsymmetrie in der Umwelt



- Herstellen von drehsymmetrischen Figuren
- Ergänzen, kontrollieren und Fehler suchen zu drehsymmetrischen Figuren

Anregungen zur Drehsymmetrie

- Als Prototyp für das Bewusstmachen von Drehsymmetrie dienen Windmühlen und Windräder
- Herstellung nach Anleitung



Franke & Reinhold (2016), S. 282

Anregungen zur Drehsymmetrie

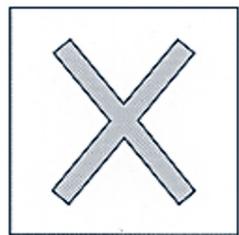
- Kunstwerke von Escher als Beispiel für Drehsymmetrie in der Kunst



Franke & Reinhold (2016), S. 282

Anregungen zur Drehsymmetrie

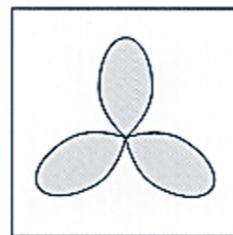
- Drehsymmetrische Figuren



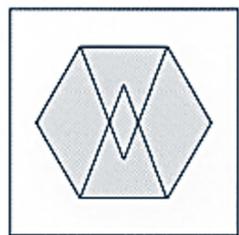
A



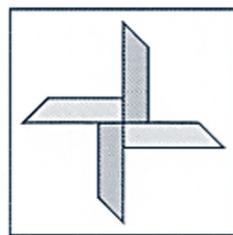
B



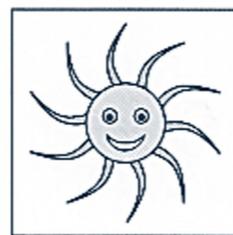
C



D



E



F

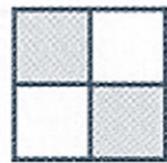


Anregungen zur Drehsymmetrie

Welche Muster sind achsensymmetrisch?
Welche drehsymmetrisch?
Welche achsen- und drehsymmetrisch?



A



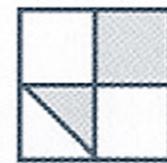
B



C



D



E



F



G



H



I



J



K



L



M



N



O

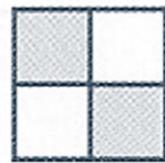
Brenninger & Studeny (2011)

Anregungen zur Drehsymmetrie

Welche Muster sind achsensymmetrisch?
Welche drehsymmetrisch?
Welche achsen- und drehsymmetrisch?



A



B



C



D



E



F



G



H



I



J



K



L



M



N



O

- achsensymmetrisch:
A, B, C, D, E, F, H, I, J, O
- drehsymmetrisch:
B, D, G, H, K, M, O
- achsen- und
drehsymmetrisch:
B, D, H, O

Brenninger & Studeny (2011)

Muster, Bandornamente, Parkette

Muster, Bandornamente, Parkette

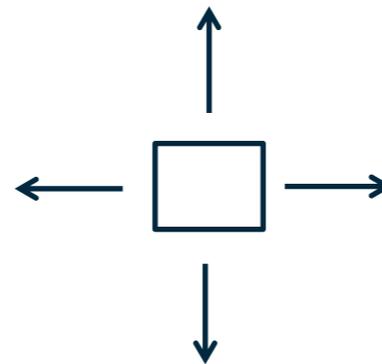
- hier begegnet uns Achsensymmetrie
- ein Grundelement wird nach gewissen Regeln mehrfach arrangiert
- **Muster:** bilden eine selbst abgeschlossene Einheit



- **Bandornamente:** beliebig nach recht/links fortsetzbar



- **Parkette:** innerhalb einer Ebene allseitig fortsetzbar



- vielseitige Aufgabenstellungen:
 - Beschreiben
 - Erkennen der Regel zur Konstruktion
 - Fortsetzen und Vervollständigen
 - Arrangieren gegebener Grundformen
 - Ausdenken eigener Konstruktionen
- Förderung von Symmetrieverständnis, visuellem Wahrnehmungsvermögen, geometrischem Vorstellungsvermögen, Kreativität und Phantasie

Muster

Unter einem mathematischen Muster (engl. pattern) kann, bezogen auf den Mathematikunterricht der Grundschule, eine räumlich in Erscheinung tretende (oder auch numerische) **Regelmäßigkeit** verstanden werden.

Muster sind also durch besondere Beziehung zwischen den sie konstituierenden Bestandteilen gekennzeichnet.

Die Gesamtheit dieser Beziehungen wird auch als Struktur eines Musters bezeichnet.

Anhand dieser Struktur kann ein Muster beschrieben oder auch fortgesetzt werden.

Dynamische Musterfolge.
Lüken (2009), S. 719



Franke & Reinhold (2016), S. 286f

Muster

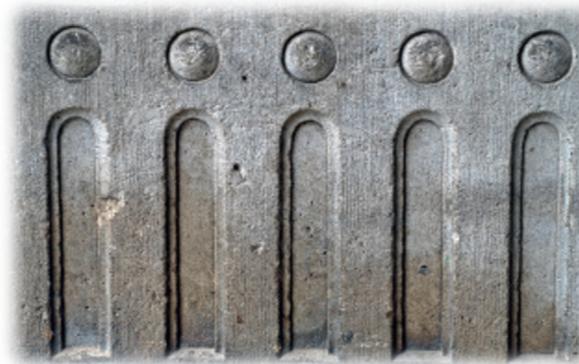
- Legen mit Formenplättchen
- Zeichnen: Karopapier; Schablonen; Geodreieck, Lineal und Zirkel
- Impulse:
 - Ausdenken eines Musters - Partner muss dieses fortsetzen
 - Abdecken eines bestimmten Teils des Muster - Partner soll das nächste Plättchen erraten
 - **WICHTIG:** Vorlagen zum Abzeichnen zur Verfügung stellen, da nicht alle Kinder die Fähigkeit haben, sich ein Muster auszudenken!

Bandornamente

Bandornamente (auch Streifenornamente genannt) sind Figuren, in denen ein Motiv nach beiden Seiten mit jeweils gleichem Abstand periodisch wiederholt wird. Die **Grundfigur** ist dabei jeweils der kleinste Teil, mit dem man durch Verschiebung das Ornament fortsetzen kann.

Franke & Reinhold (2016), S. 289

Bandornamente in Kulturkreisen:
Afrikanische Kunst, Islamische
Kunst



Grundschule
Mathematik, Heft
22, Materialteil

Bandornamente

Kongruenzabbildungen in Bandornamenten

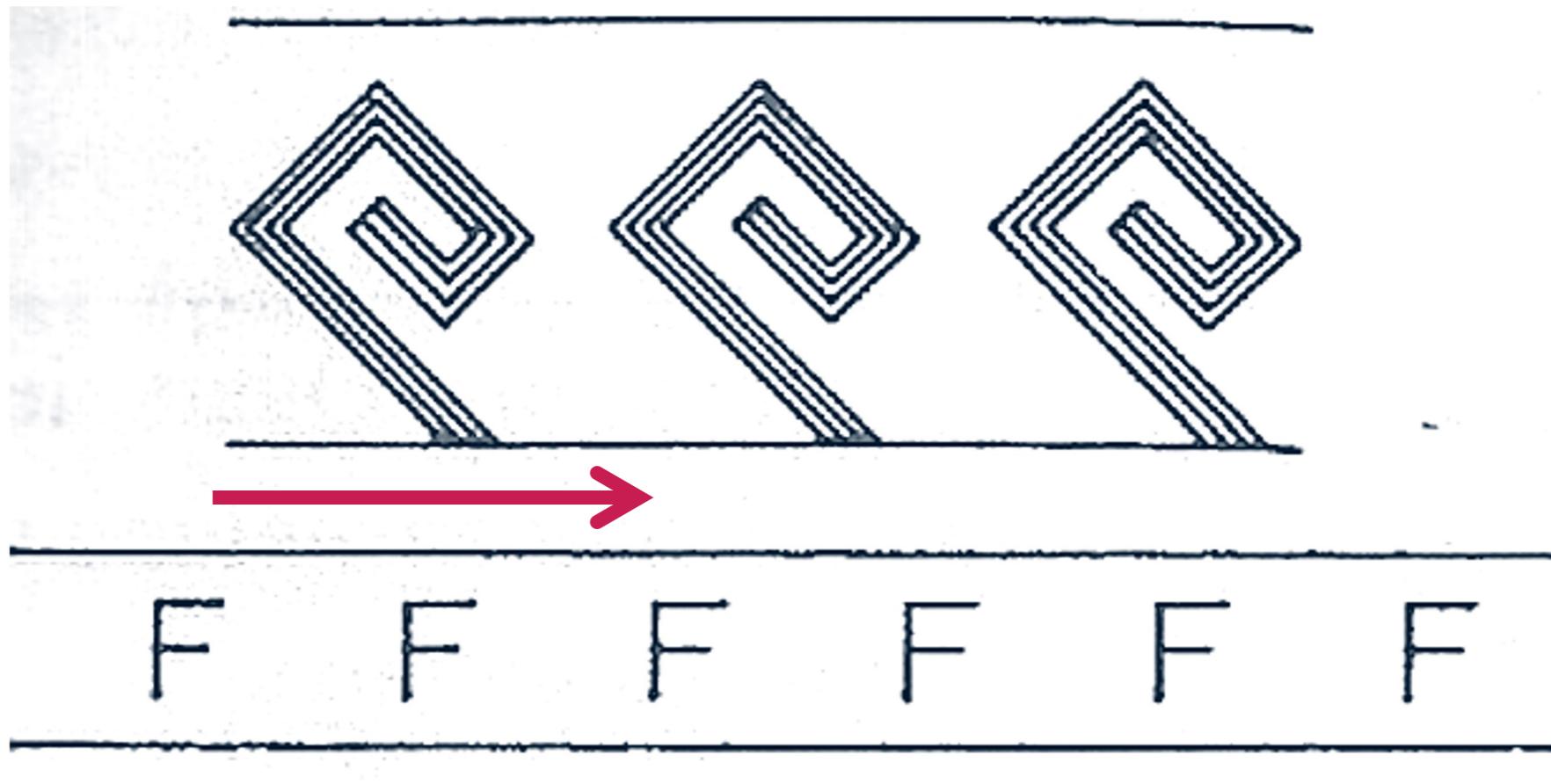
- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)

Bandornamente

Typ 1: V

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)



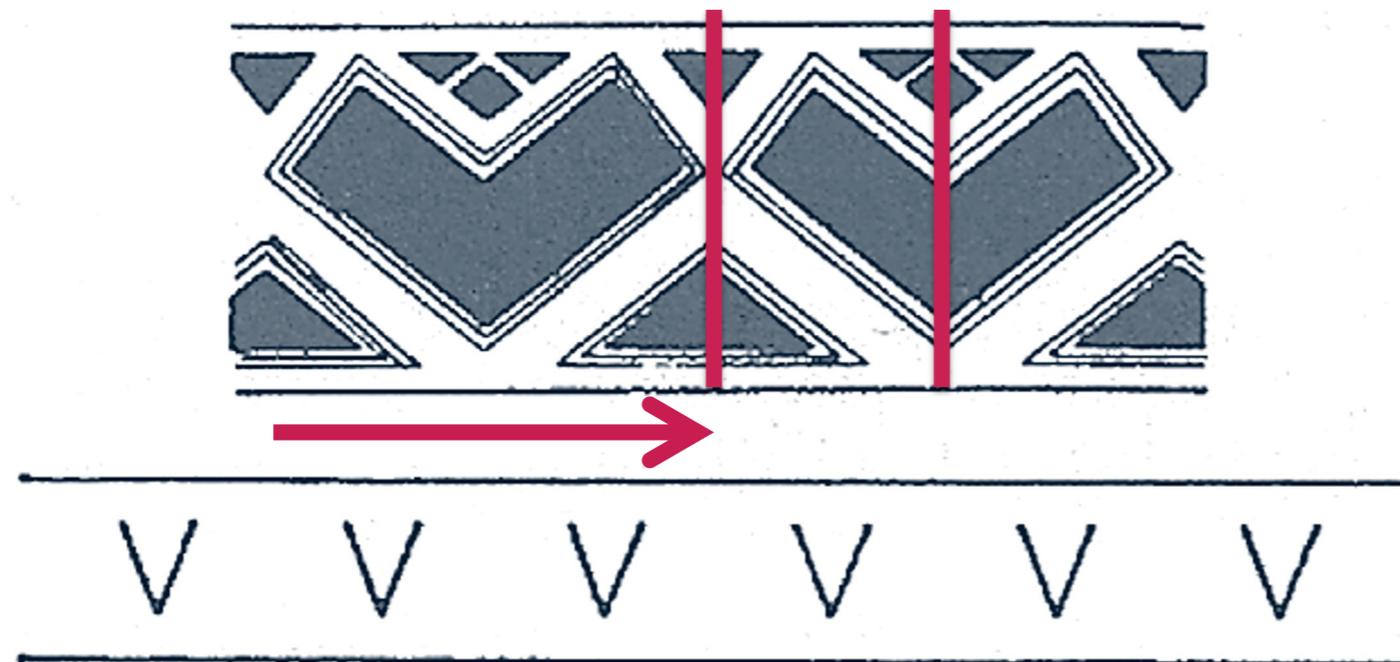
Franke & Reinhold (2016), S. 291

Bandornamente

Typ 2: V, Q

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)



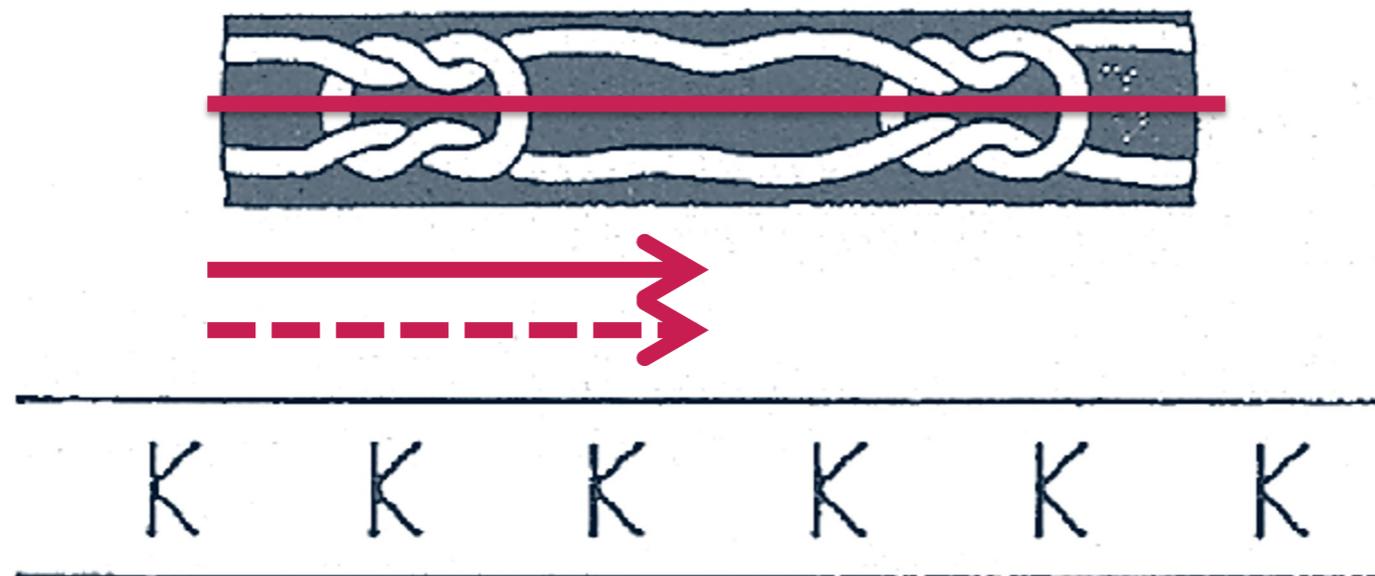
Franke & Reinhold (2016), S. 291

Bandornamente

Typ 3: V, L, S

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)



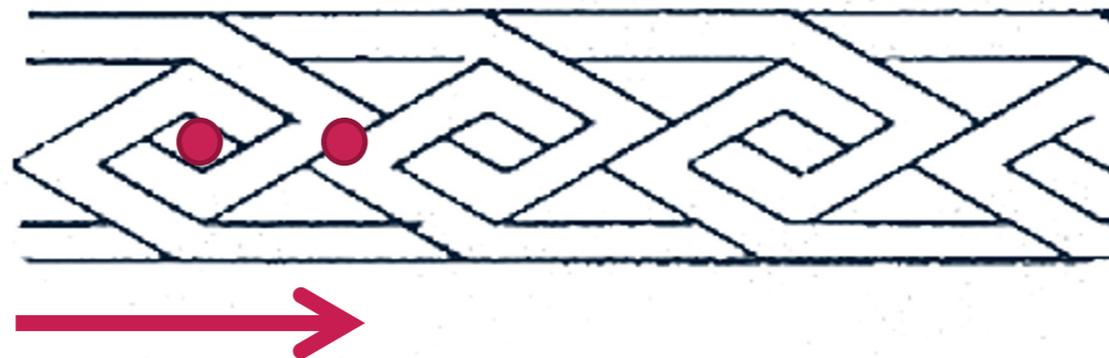
Franke & Reinhold (2016), S. 291

Bandornamente

Typ 4: V, P

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-)Mittellinie (P)



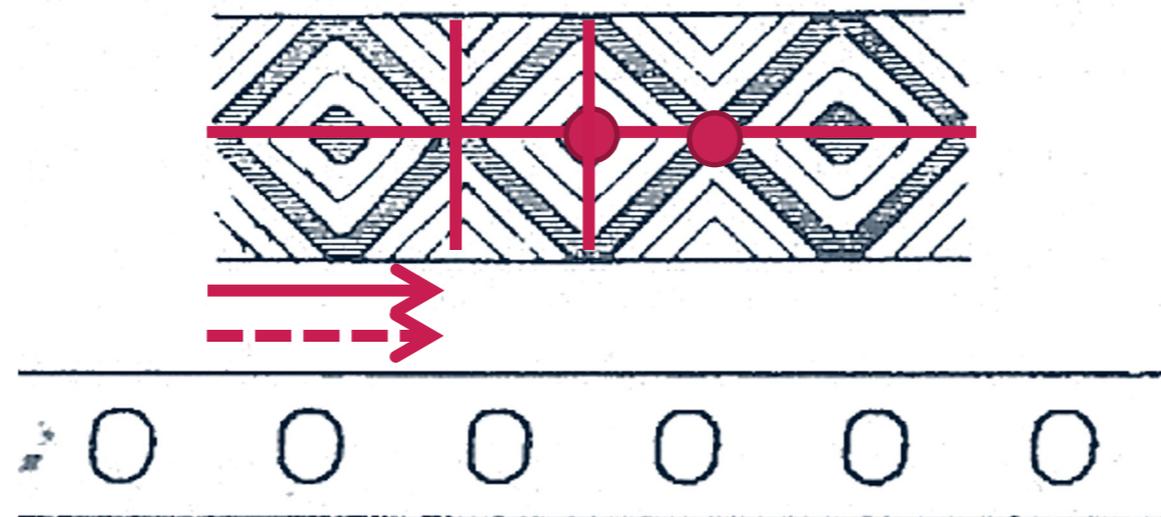
Franke & Reinhold (2016), S. 291

Bandornamente

Typ 5: V, Q, L, P, S

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-) Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)



Franke & Reinhold (2016), S. 291

Bandornamente

Typ 6: V, S

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)



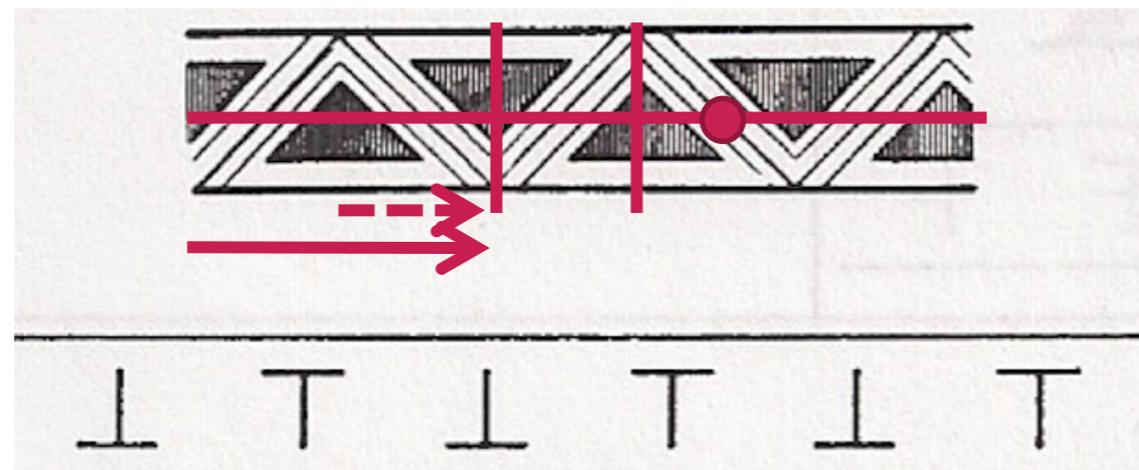
Franke & Reinhold (2016), S. 291

Bandornamente

Typ 7: V, Q, P, S

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-) Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)

- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)

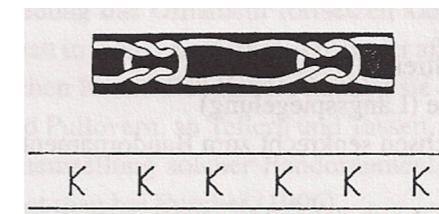
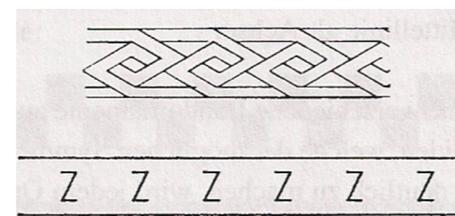
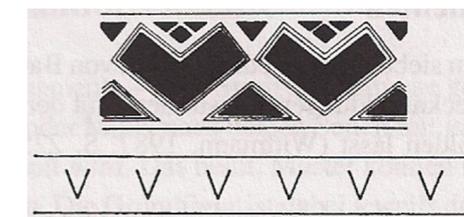
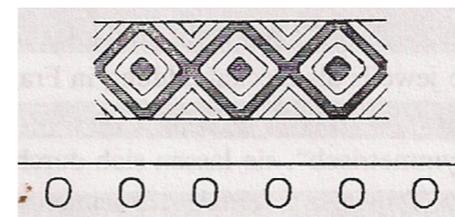
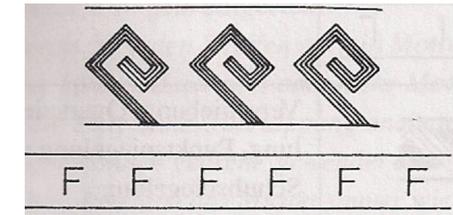
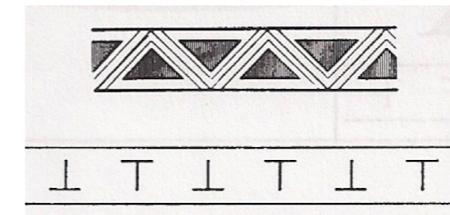
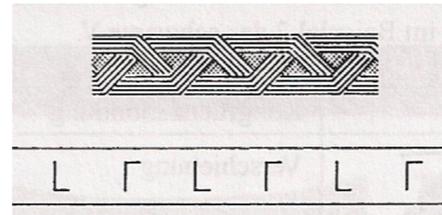


Franke & Reinhold (2016), S. 291

Bandornamente

Nochmal zum Sortieren...

- Typ 1: V
- Typ 2: V, Q
- Typ 3: V, L, S
- Typ 4: V, P
- Typ 5: V, Q, L, P, S
- Typ 6: V, S
- Typ 7: V, Q, P, S



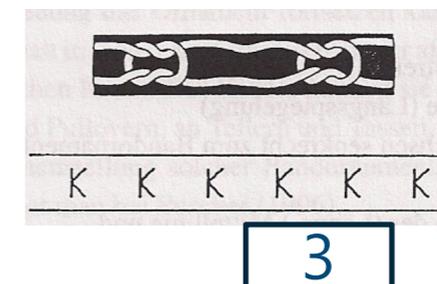
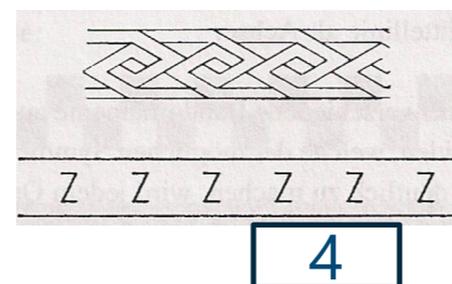
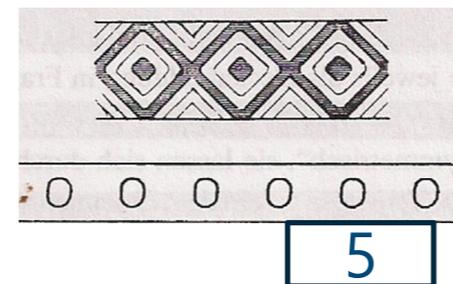
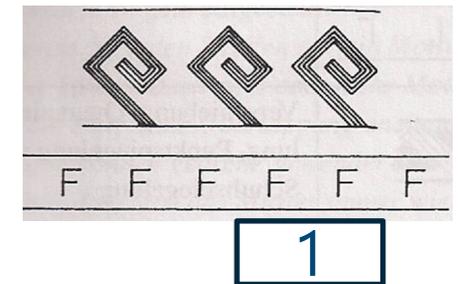
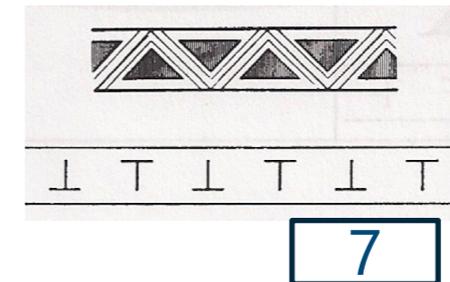
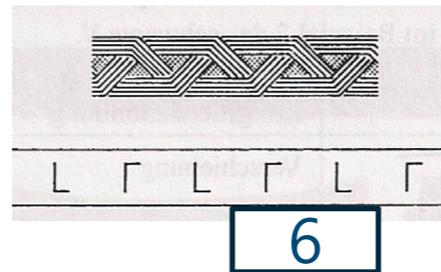
- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)

Bandornamente

Nochmal zum Sortieren...

- Typ 1: V
- Typ 2: V, Q
- Typ 3: V, L, S
- Typ 4: V, P
- Typ 5: V, Q, L, P, S
- Typ 6: V, S
- Typ 7: V, Q, P, S

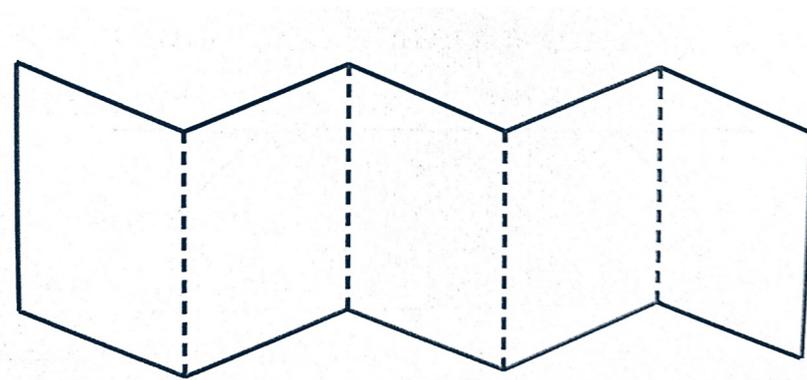
- Verschiebung parallel zum Streifen (V)
- Längsspiegelung als Spiegelung an der Mittellinie (L)
- Querspiegelung als Spiegelung an Achsen senkrecht zum Bandornament (Q)
- Punktspiegelung an Punkten der (Längs-/)Mittellinie (P)
- Schubspiegelung mit der Mittellinie als Achse (S)



Bandornamente

Aufgabenstellungen

- Bandornamente in der Umwelt suchen und beschreiben
- Muster in Bandornamenten erkennen und hervorheben
- Bandornamente weiterzeichnen oder abzeichnen
- Bandornamente selbst herstellen
- Legen mit Motiven
- Falten und schneiden



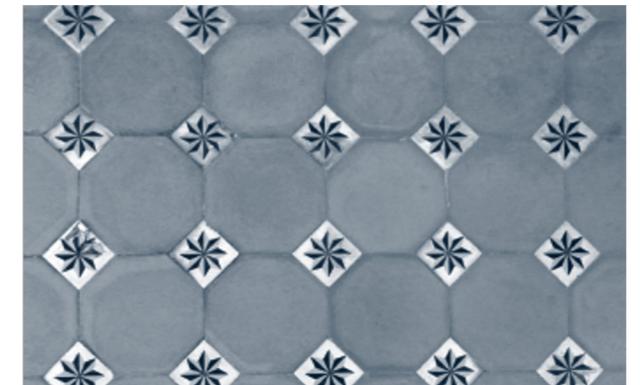
Franke & Reinhold (2016), S. 292ff

Parkettieren

Unter dem Parkettieren versteht man das **vollständige Abdecken der Ebene mit kongruenten Ausgangsfiguren**, ohne dass Lücken oder Überlappungen entstehen. Wird dabei nur eine Figur verwendet, spricht man von einem einfachen Parkett. Es ist auch möglich, zum Parkettieren zwei oder mehrere Figuren zu verwenden.

Parkette

- lücken- und überlappungsfreies Auslegen der Ebene mit einer Ausgangsfigur
- Die Ausgangsfiguren dürfen dazu verschoben, gedreht oder gespiegelt werden
- In der Umwelt
 - als Fliesen
 - als Pflasterungen
 - auf Tapeten
 - auf Verpackungspapier



Grundschule
Mathematik, Heft
22, Materialteil

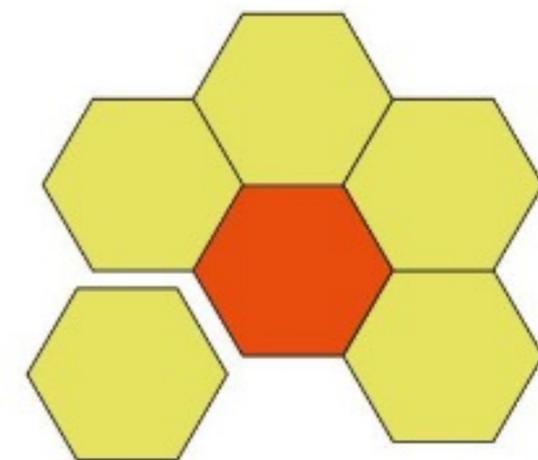
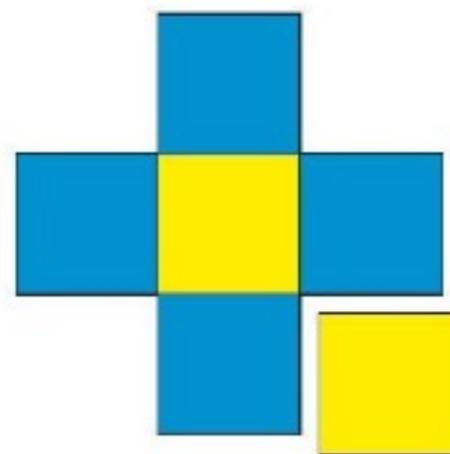
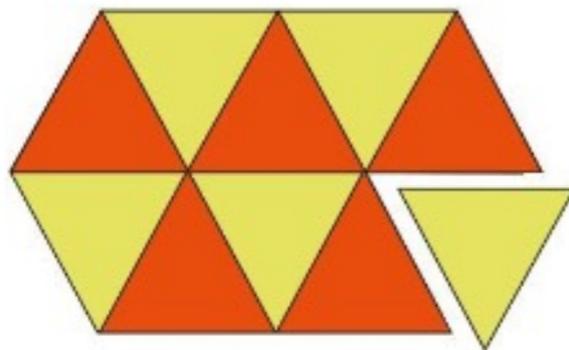
Parkette

4

Klebt aus euren ausgeschnittenen regelmäßigen Vielecken



a) ein Parkett aus Dreiecken, b) ein Parkett aus Quadraten, c) ein Parkett aus Sechsecken.



5

Ein Parkett aus regelmäßigen Fünfecken kann man nicht legen. Begründe.

6

Versuche die Parkette von Aufgabe 4 freihand zu zeichnen.

Warum nicht?

Zahlenbuch 4, S. 99

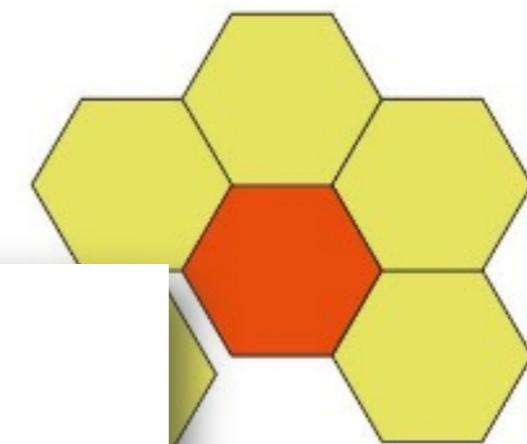
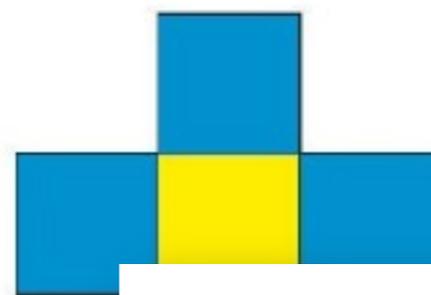
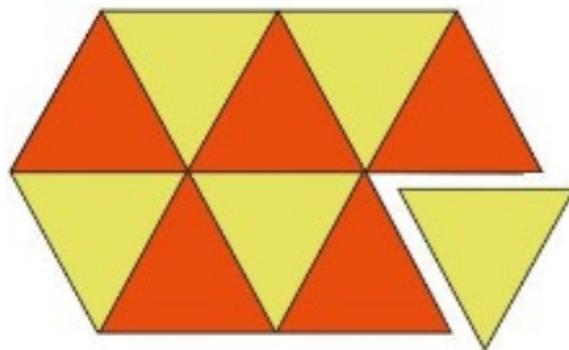
Parkette

4

Klebt aus euren ausgeschnittenen regelmäßigen Vielecken

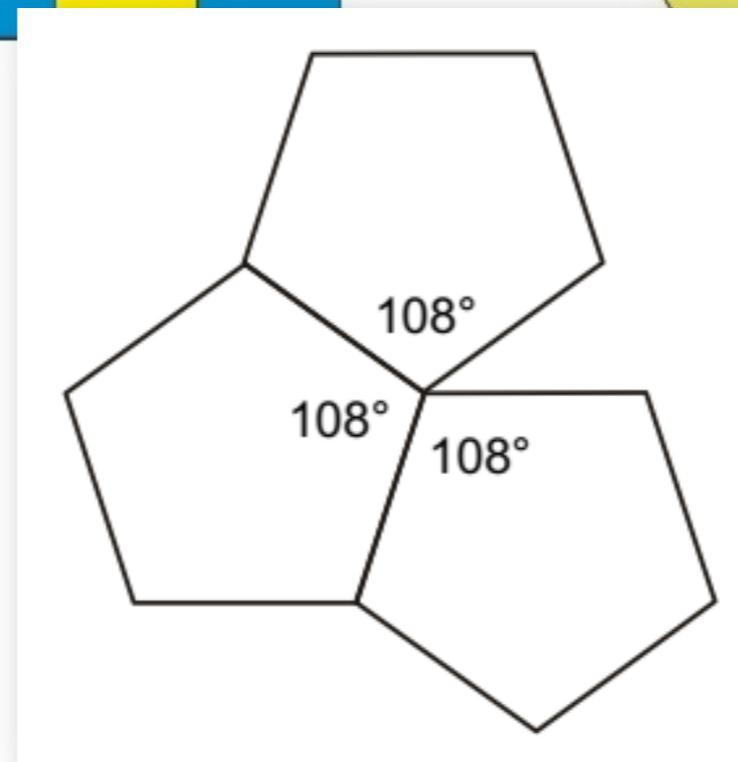


a) ein Parkett aus Dreiecken, b) ein Parkett aus Quadraten, c) ein Parkett aus Sechsecken.



5

Ein Parkett aus regelmäßigen Fünfecken kann man nicht legen. Begründe.



Aufgabe 4

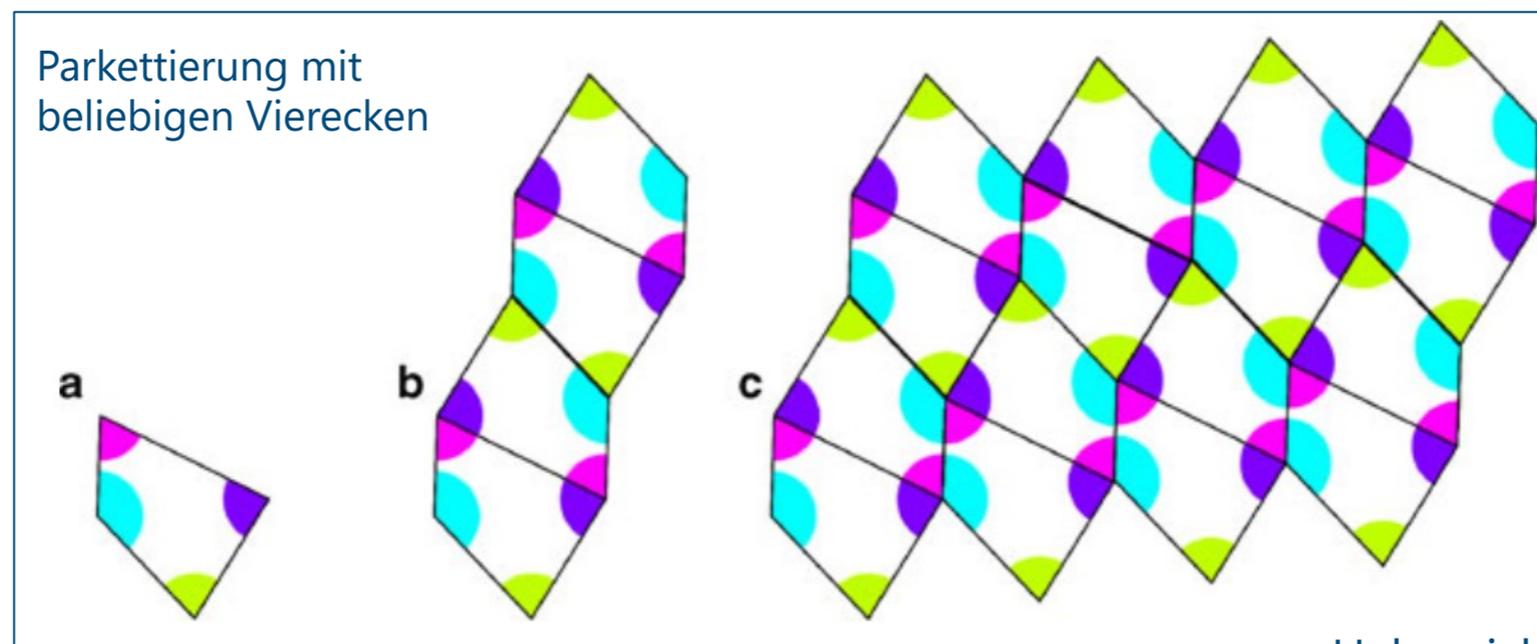
Zahlenbuch 4, S. 99

Warum nicht?

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 202

Parkette

- Mit allen regelmäßigen Dreiecken, Vierecken und Sechsecken gelingt die Parkettierung der Ebene.
- **Entscheidend für das Gelingen einer Parkettierung ist, dass sich die Innenwinkel einer geometrischen Form durch Zusammenlegen mehrerer gleicher Teile dieser Form zu 360° auffüllen lassen.**

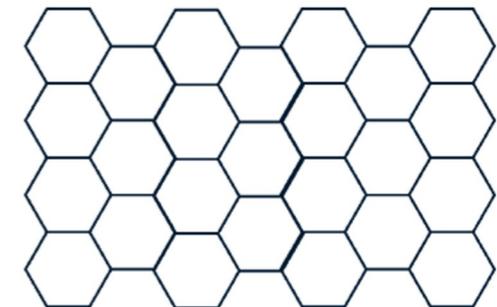
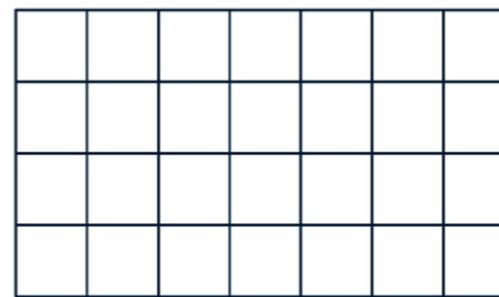
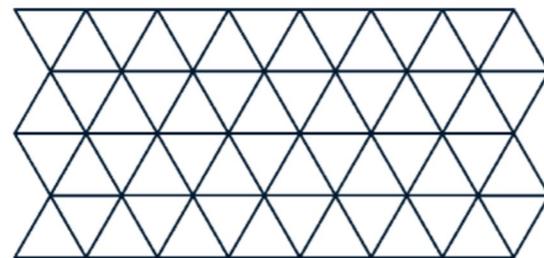


Helmerich & Lengnink, 2016. S. 110f

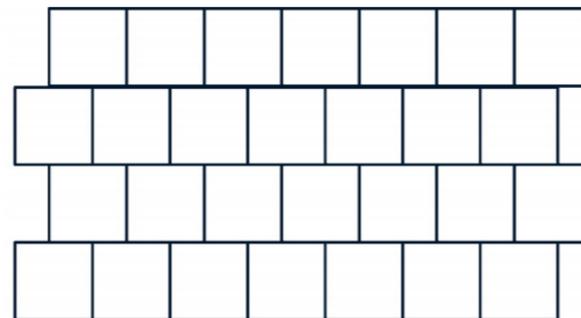
Definition: Platonische Parkettierung

Eine Parkettierung, die ausschließlich aus regelmäßigen n -Ecken besteht, die so aneinander liegen, dass an eine Seite nur wieder eine Seite des nächsten n -Ecks anschließt, aber keine Ecke, wird **Platonische Parkettierung** genannt.

Beispiele:



Gegenbeispiel:

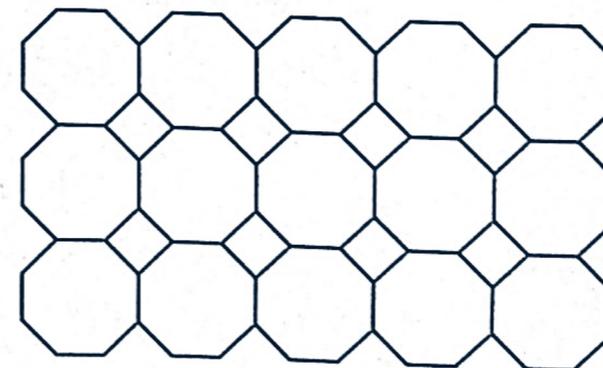
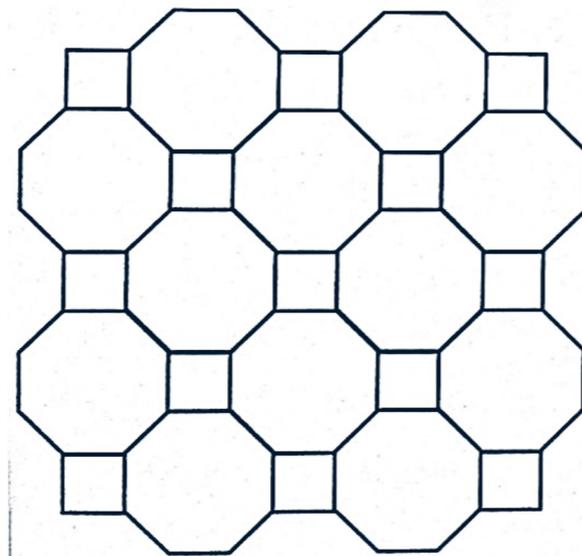


Helmerich & Lengnink, 2016. S. 111f

Definition: Archimedische Parkettierung

Eine Parkettierung, die aus zwei oder drei Sorten kongruenter regelmäßiger Polygone besteht, die in den Ecken der Polygone auf jeweils gleiche Weise zusammenstoßen, wird **Archimedische Parkettierung** genannt.

Beispiele:



Franke & Reinhold (2016), S. 295ff

Parkette

Aufgabenstellungen

- In der Umwelt Parkettierungen erkennen, beschreiben und analysieren
- Parkettierungen aus vorgegebenen Ausgangsfiguren durch Legen, Zeichnen, Ausmalen, Drucken herstellen
- Neue Ausgangsfiguren zum Parkettieren konstruieren

Förderung

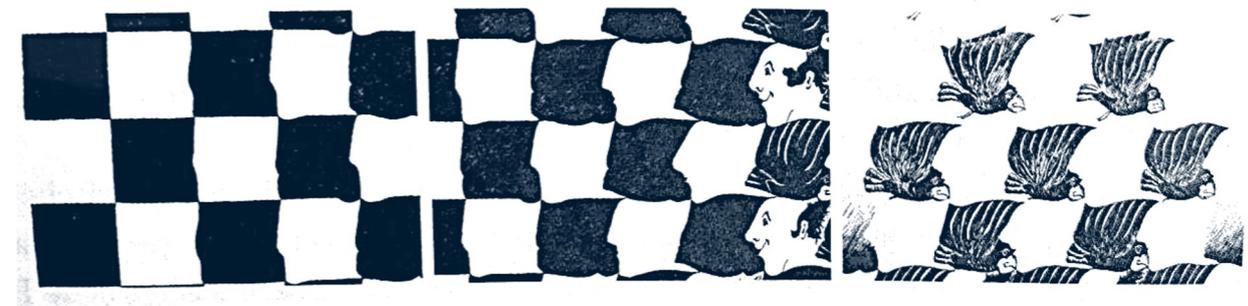
- der visuellen Wahrnehmung
- des vorausschauenden Denkens
- des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Erfahrungen zum Flächeninhalt und Passen von Einzelteilen
- Erfahrungen zum Zusammensetzen
- Spiegelung, Drehung, Verschiebung

Franke & Reinhold (2016), S. 296

Parkette

Parkettierungen gelingen mit folgenden Formen

- Dreieck, Viereck, Quadrat oder Sechseck
- diese können wieder zerlegt werden.



Knabbertechnik

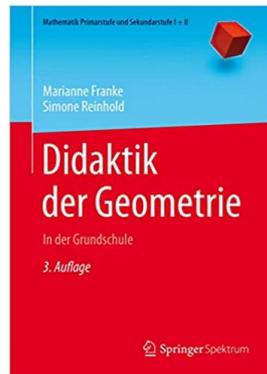
- von der Ausgangsfigur wird etwas weggenommen und an eine andere Stelle angesetzt
- Bedingungen: Flächeninhalt muss identisch bleiben, Ausgangsfigur muss mit den entstandenen Figuren abgedeckt werden können
- Figuren werden also zielgerichtet verändert, sodass neue Ausgangsfiguren gefunden werden können



Franke & Reinhold (2016), S. 302ff

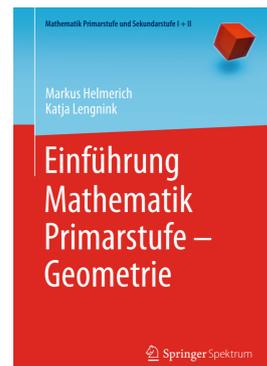
- Benölken, R., Gorski, H. J., & Müller-Philipp, S. (2018). Leitfaden Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Brenninger, A. & Studeny, G. (2011). Kartei zur Kopfgeometrie. Braunschweig: Westermann.
- Franke, M., & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.
- Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie. Berlin Heidelberg: Springer.
- Lüken, M. (2009). Muster und Strukturen, In Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 717-720). Münster: WTM-Verlag.

Zum Nach- und Weiterlesen



Didaktischer Hintergrund (Primarstufe):

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag. **Kapitel 9 „Muster, Bandornamente und Parkette“**



Fachlicher Hintergrund:

Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie*. Berlin Heidelberg: Springer. (<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-47206-4>). **Kapitel 4 „Formen und Muster gestalten“**.

Ich kann...

- Zugänge zur Drehsymmetrie beschreiben und beurteilen und Lernsituationen mit einer Steigerung der Ansprüche in den bereitgestellten Aufgaben entwickeln.
 - beschreiben, was „Muster“, „Bandornamente“ und „Parkette“ auszeichnet.
 - Die 7 Typen von Bandornamenten beschreiben und Bandornamente den Typen zuordnen.
 - „Platonische Parkettierung“ und „Archimedische Parkettierung“ definieren und in Parkettierungen erkennen.
 - Die „Knabbertechnik“ und das „Drehverfahren“ beschreiben und anwenden.
 - Lernsituationen zu den Themen „Muster“, „Bandornamente“ und „Parkette“ erstellen.
-

Falten Sie bis zur nächsten Vorlesung einen
Papierflieger und bringen Sie diesen mit.

**Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Mitarbeit
und bis nächsten Dienstag!**

