

Didaktik der Mathematik in der Primarstufe III

Didaktik der Geometrie

11 - Längen, Flächen und Volumina I

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Melanie Platz

Themenübersicht

Längen, Flächen, Volumina und Winkel lassen sich nach Vorgabe von Maßeinheiten messen. Aus vorgegebenen Maßen lassen sich andere nach verschiedenen Formeln berechnen (z.B. Inhaltsformeln).



Datum	Nr.	Thema	Grundidee
11.04.23	01	Organisatorisches & Einführung	
18.04.23	02	Entwicklung räumlicher Fähigkeiten	
25.04.23	03	Geometrische Begriffe und Wissenserwerb	
02.05.23	04	Zeichnen und Konstruieren	Formen und ihre Konstruktion
09.05.23	05	Ebene Figuren I	
16.05.23	06	Ebene Figuren II & Räumliche Objekte	
23.05.23	07	Symmetrie I (Kongruenzabbildungen)	Operieren mit Formen
30.05.23	08 (entfällt)	--	
06.06.23	09	Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette)	
13.06.23	10	Falten	Maße und Formeln
20.06.23	11	Längen, Flächen und Volumina I	
27.06.23	12	Längen, Flächen und Volumina II	Geom. Gesetzm. & Muster
04.07.23	13	Pläne & Maßstäbe, Wiederholung & Fragen I	Koordinaten
11.07.23	14 (online)	Wiederholung & Fragen II	
18.07.23	15	Klausur	

**Miß alles, was sich messen läßt,
und mach alles messbar,
was sich nicht messen läßt.**

Galileo Galilei

- Messen ist historisch fest verankert und typische Aufgabe der Geometrie
- Messen von Längen, Flächen und Volumina
- Leider wird oft eher von „Berechnung“ als vom Messen gesprochen
 - Verkürzung der Idee des Messens
- Messen ist immer Vergleichen
- Messvorstellungen müssen in der Grundschule bereits aufgebaut werden und werden der Sekundarstufe weiter vertieft

 **Messen und Vergleichen ist ein Kernthema!**

Franke & Reinhold (2016), S. 305; Weigand et al. (2014), S. 159

Ich kann...

- ☐ Aspekte und Kontexte des Messens nennen und beschreiben.
- ☐ die Lernstufen bei der Behandlung von Größen nennen und bei der Gestaltung von Lernsituationen nutzen.
- ☐ Lernsituationen zum Erarbeiten von Einheiten der Länge und zum Messen von Längen beschreiben und erstellen.
- ☐ herausfinden, ob zwei Flächen den gleichen Flächeninhalt haben und mein Vorgehen begründen.
- ☐ Lernsituationen zum direkten Vergleichen von Flächen sowie zum indirekten Vergleichen von Flächen (durch zerlegen und Zusammensetzen oder durch Auslegen) beschreiben und erstellen.
- ☐ Satz und Kehrsatz formulieren (z.B. Satz des Thales).
- ☐ Den Satz des Pythagoras formulieren und inhaltlich-anschaulich beweisen.

Längen, Flächen & Volumina I

- Messen
- Längen
- Flächeninhalte & Umfang

Mit Inhalten von Dr. Anna-Marietha Vogler, Dr. Eva Hoffart u.a.

Messen

- Aspekte des Messens
- Lernstufen bei der Behandlung von Größen
- Erfahrungen zur Idee des Messens

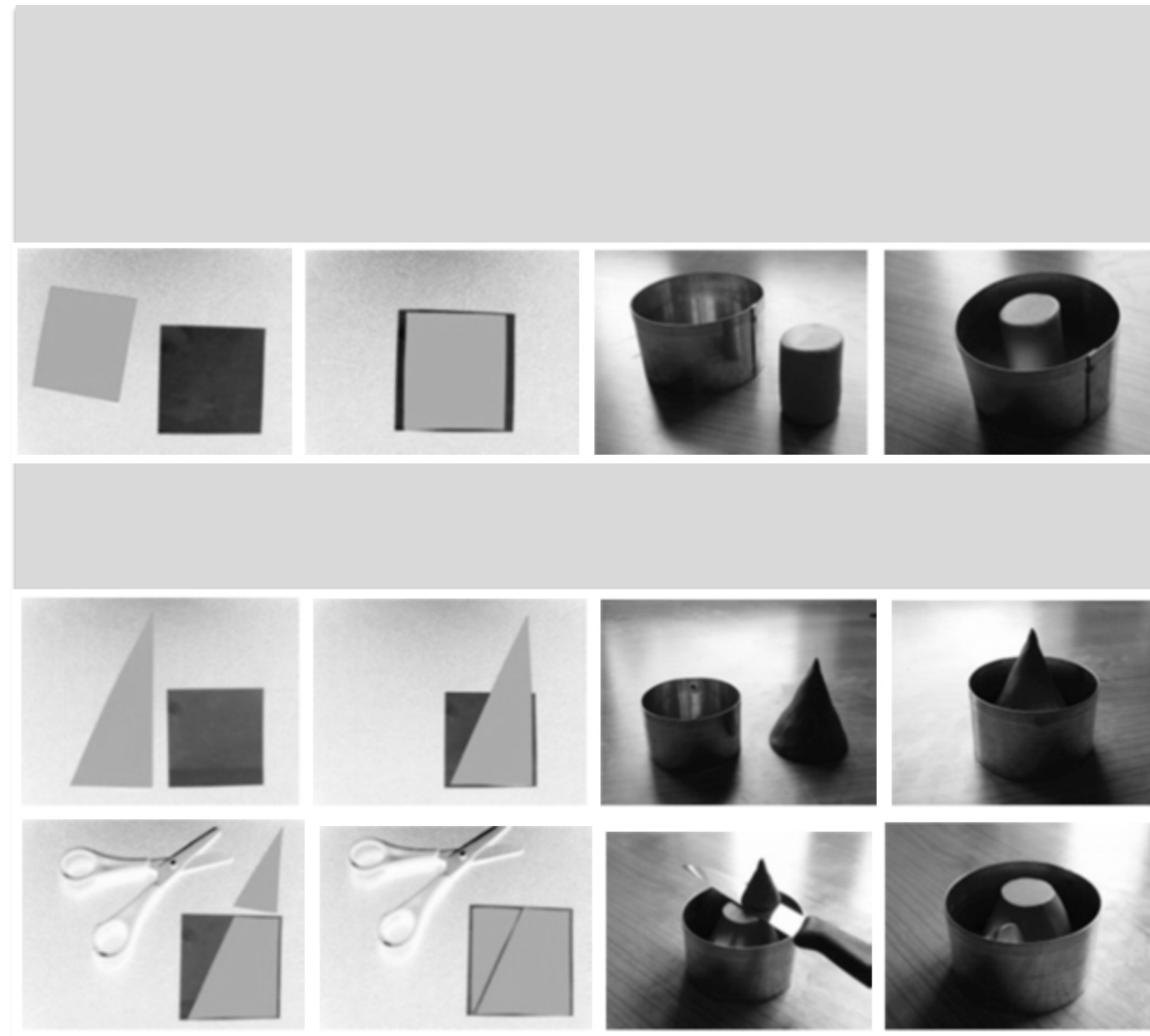
Aspekte des Messens

Vergleichsaspekt (vergleichen)

- erste handlungsgestützte

Aktivität

- Sind zwei Größen gleich groß oder nicht?
- Aufeinanderlegen, Ineinanderstellen



Weigand et al. (2014), S. 159f

Aspekte des Messens

- Messen-durch-Auslegen-und-Zählen-Aspekt (auslegen)
- Messgerät-Aspekt (ablesen)
 - technische Lösungen
 - Messen durch Ablesen einer Skala
- Messen-als-Berechnen-Aspekt (rechnen)
 - Bestimmung der Größe mit Formeln

Weigand et al. (2014), S. 161

Kontexte des Messens

- Grundfrage: Wann und wo wird Messen benötigt?
- Nachmessen und nachprüfen
 - Ladungsvermögen eines LKWs
- Ausmessen und abschätzen
 - Wie viel Steine werden für das Pflastern eines Hofes benötigt?
- Aufmessen, nach Maßen erstellen, produzieren
 - In welcher Form kann eine 30m^2 große Terrasse abgesteckt werden?
- Zumessen, normieren, nach Maßen regeln
 - Bestimmung der KFZ-Steuer nach Hubraum

Kompetenz des
Modellierens

Weigand et al. (2014), S. 161f

Lernstufen bei der Behandlung von Größen

1. Direkter Vergleich von Objekten

2. Indirekter Vergleich von Objekten

- mit Hilfe einer selbstgewählten Vergleichsgröße
- mit Hilfe einer selbstgewählten Maßeinheit

3. Indirekter Vergleich von Objekten mit einer geometrischen standardisierten Maßeinheit

Franke & Ruwisch (2010), S. 184ff

Erfahrungen zur Idee des Messens

- Messen als Vergleichen
- Was ist eine sinnvolle Messstrategie?
- Wie kann man das Messresultat bestimmen und benennen?
- Wie genau muss ich messen?
- Wie können verschiedene Objekte geeignet gemessen werden?
- Mit welchen Messgeräten könnte ich das Objekt ggf. auch noch messen?

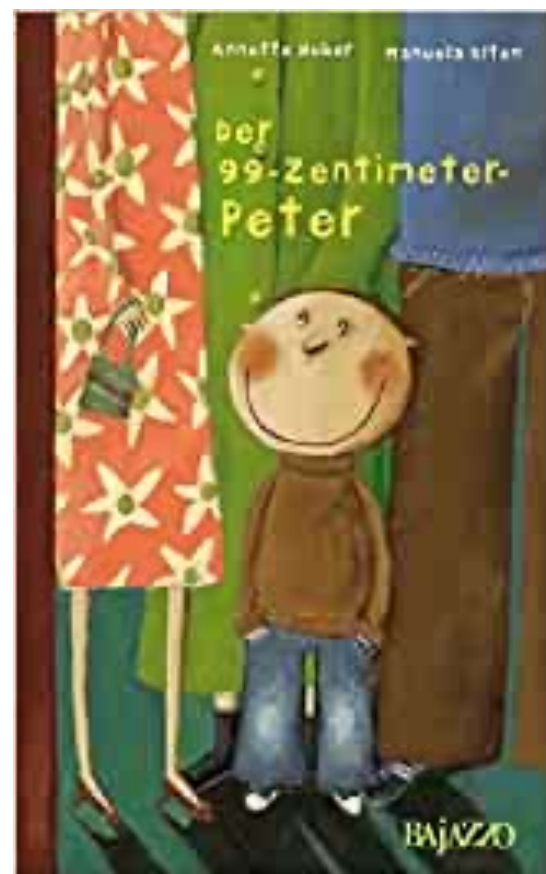
Längen

- Erarbeiten von Einheiten der Länge
- Messen von Längen

Erarbeiten von Einheiten der Länge

Anregung zum direkten Vergleichen

- Objekte werden direkt nebeneinandergestellt, -gelegt



Franke & Reinhold (2016), S. 307

Erarbeiten von Einheiten der Länge

Oft indirektes Vergleichen nötig

- Einsatz eines Hilfsmittels als Vergleichsgröße
- Intuitive Verwendung der Transitivität
- Invarianz der Länge
- Mehrfachanlegen eines Stabes, Streifens führt zum Maß
- Notwendigkeit der standardisierten Maße

Franke & Reinhold (2016), S. 307f

Erarbeiten von Einheiten der Länge

Beispiel Körperfaden



Erarbeiten von Einheiten der Länge

Beispiel Körperfaden

Stell dich an eine Wand und setz über deinem Kopf mit Bleistift (ganz schwach) eine Markierung.

Hol dir einen Bindfaden oder eine Schnur und schneide davon ein Stück ab, das genauso lang ist wie du.



Streck die Arme lang zu beiden Seiten aus. Ist der Unterschied zwischen deiner Körperlänge und dem Abstand zwischen deinen Fingerspitzen groß? Oder nur klein?



Dahl & Lepp (2000), S. 22

Messen von Längen

- In Klasse 2 Messen mit Meter und Zentimeter, ab Klasse 3 auch Millimeter
- Kennenlernen unterschiedlicher Messgeräte
- Schwierigkeiten beim Messen
 - Messgerät muss am Nullpunkt angelegt werden
 - Skala auf Vorder- und Rückseite
 - Skala in anderen Einheiten
 - Maßzahl ist nicht vermerkt oder ungenaue Kennzeichnung
 - Messgerät ist für zu messendes Objekt ungeeignet

Franke & Reinhold (2016), S. 308f

Flächeninhalte

- Direktes Vergleichen von Flächen
- Direktes Vergleichen von Flächen durch Zerlegen und Zusammensetzen
- Indirektes Vergleichen von Flächen durch Auslegen
- In der Sekundarstufe

Zwei Flächen haben dann den gleichen Flächeninhalt,

- **wenn sie deckungsgleich sind**
 - Sie können so übereinandergelegt werden, dass sie sich gegenseitig genau abdecken
- **wenn sie zerlegungsgleich sind**
 - Jede der Flächen kann in dieselben Teilfiguren zerlegt oder aus denselben Teilfiguren zusammengesetzt werden
- **wenn sie auslegungsgleich sind**
 - Jede Figur kann lückenlos und ohne Überlappung mit der gleichen Anzahl von Einheitsflächen ausgelegt werden

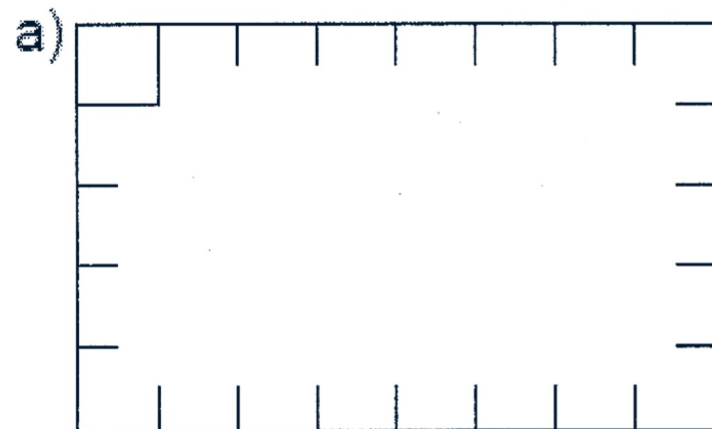
Ein Beispiel

vgl. HKM (2005)

- Mitte Klasse 3, Vergleichsarbeit
- Inhaltsbereich Geometrie
- Anforderungsbereich Reproduktion
- „vorgegebene Flächen (in der Vorstellung) mit Einheitsquadraten ausfüllen, Anzahl der Einheitsquadrate berechnen“

Aufgabe 5

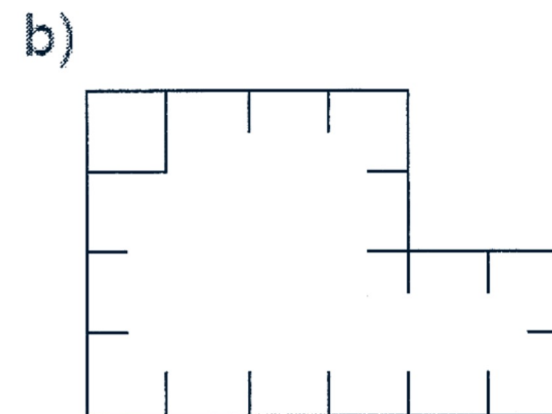
Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!



Rechnung:



Quadrate



Rechnung:



Quadrate

Lösen Sie die Aufgabe.

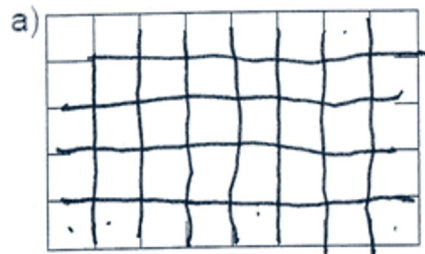
Flächeninhalte

Beschreiben Sie die vier Bearbeitungen mit kurzen Stichworten (Charakterisierung).
Tauschen Sie sich in der Gruppe über die Beschreibungen aus!

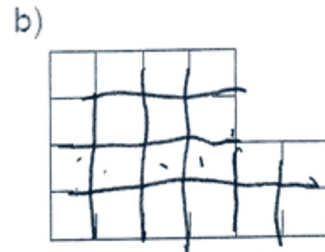
Ein Beispiel

Aufgabe 5

Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!



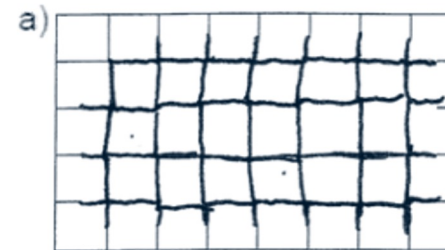
Rechnung: $5 \cdot 8 = 40$
40 Quadrate



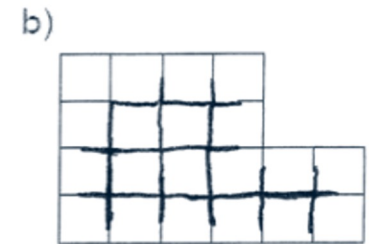
Rechnung: $4 \cdot 2 \text{ und } 2 \cdot 6 = 20$
20 Quadrate

Aufgabe 5

Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!



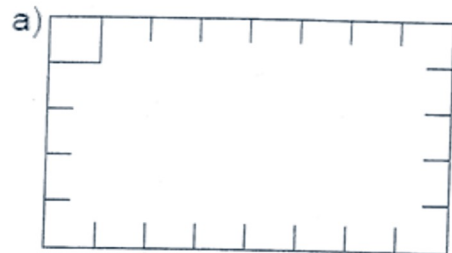
Rechnung: $25 + 12 = 37$
37 Quadrate



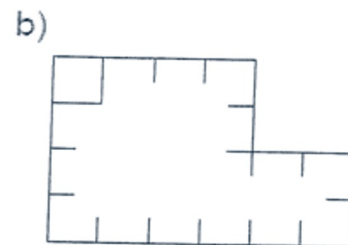
Rechnung: $3 + 17 = 20$
20 Quadrate

Aufgabe 5

Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!



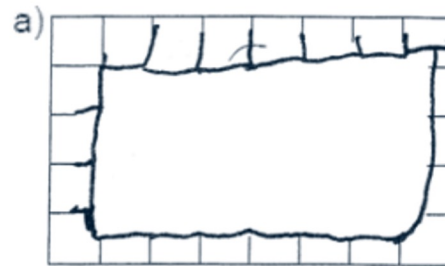
Rechnung: $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
40 Quadrate



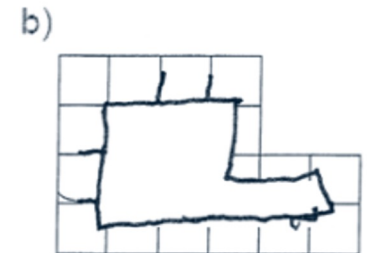
Rechnung: $4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2$
20 Quadrate

Aufgabe 5

Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!



Rechnung: $14 + 8 = 22$
22 Quadrate

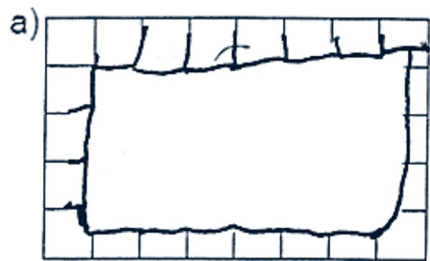


Rechnung: $12 + 4 = 16$
16 Quadrate

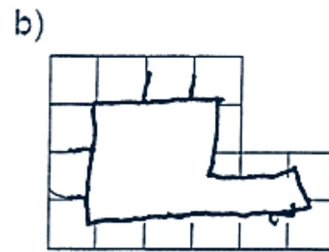
Ein Beispiel

Aufgabe 5

Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!



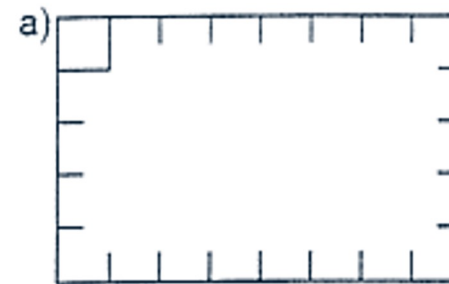
Rechnung: $14 + 8 = 22$
 $\boxed{22}$ Quadrate



Rechnung: $12 + 4 = 16$
 $\boxed{16}$ Quadrate

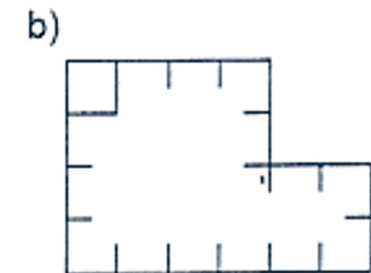
Aufgabe 5

Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!



Rechnung: $22 - 4 = 18$
 $\boxed{18}$ Quadrate
 50

$$\begin{aligned} 18 - 4 &= 14 \\ 14 - 4 &= 10 \\ 10 - 4 &= 6 \\ 6 - 4 &= 2 \end{aligned}$$



Rechnung: $16 - 6 = 10$
 $\boxed{10}$ Quadrate
 30

$$\begin{aligned} 16 - 6 &= 10 \\ 10 - 6 &= 4 \\ 20 - 5 &= 15 \\ 15 - 5 &= 10 \\ 10 - 5 &= 5 \\ 5 - 5 &= 0 \end{aligned}$$

- Erfahrungen zu den Begriffen Flächen und Flächeninhalt sind unscharf
- Umgangssprachlich meint Fläche sowohl den Linienzug zur Begrenzung einer Fläche als auch die Fläche innerhalb der Begrenzungslinie
- Notwendigkeit konkreter Erfahrungen in der Grundschule
- nicht auf Grundlage von Formeln, sondern zunächst auf enaktiver und ikonischer Ebene

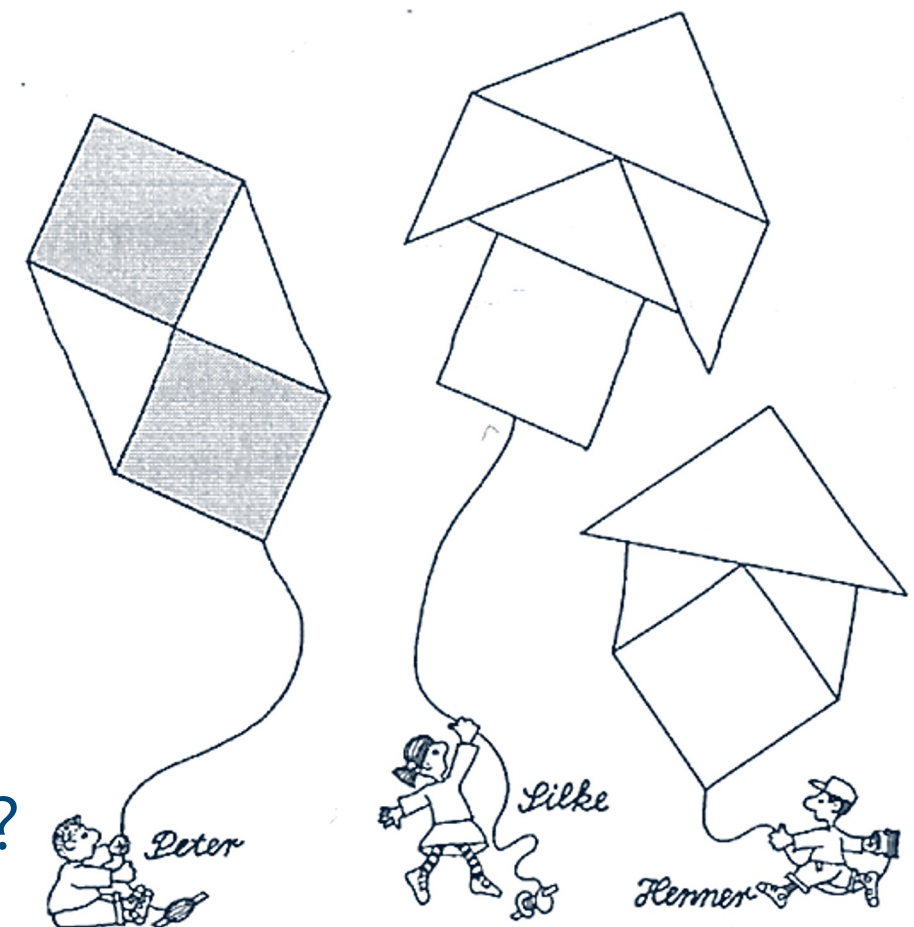
Direktes Vergleichen von Flächen

- Ganz alltäglich: Passt ein Gegenstand in einen anderen?
- Dicke als dritte Dimension wird ausgeblendet
- Ausprobieren durch Aufeinanderlegen, Idee flächengleich
 - ein Blatt in einer Klarsichtfolie
 - das Buch in den Ranzen
 - das Heft in die Tüte
 - die Brote in die Dose
 - ...

Franke & Reinhold (2016), S. 311

Indirektes Vergleichen von Flächen durch Zerlegen und Zusammensetzen

- Flächen werden in vergleichbare Teile zerlegt oder Teile werden durch Linien angedeutet
- Erkennen der Teilfiguren, Operieren in der Vorstellung oder auf Handlungsebene
- Beispiel: Wer hat den größten Drachen?



Franke & Reinhold (2016), S. 311f

Indirektes Vergleichen von Flächen durch Zerlegen und Zusammensetzen

- Umkehrung des Zerlegens in das Zusammensetzen
- Zusammensetzen flächengleicher Figuren

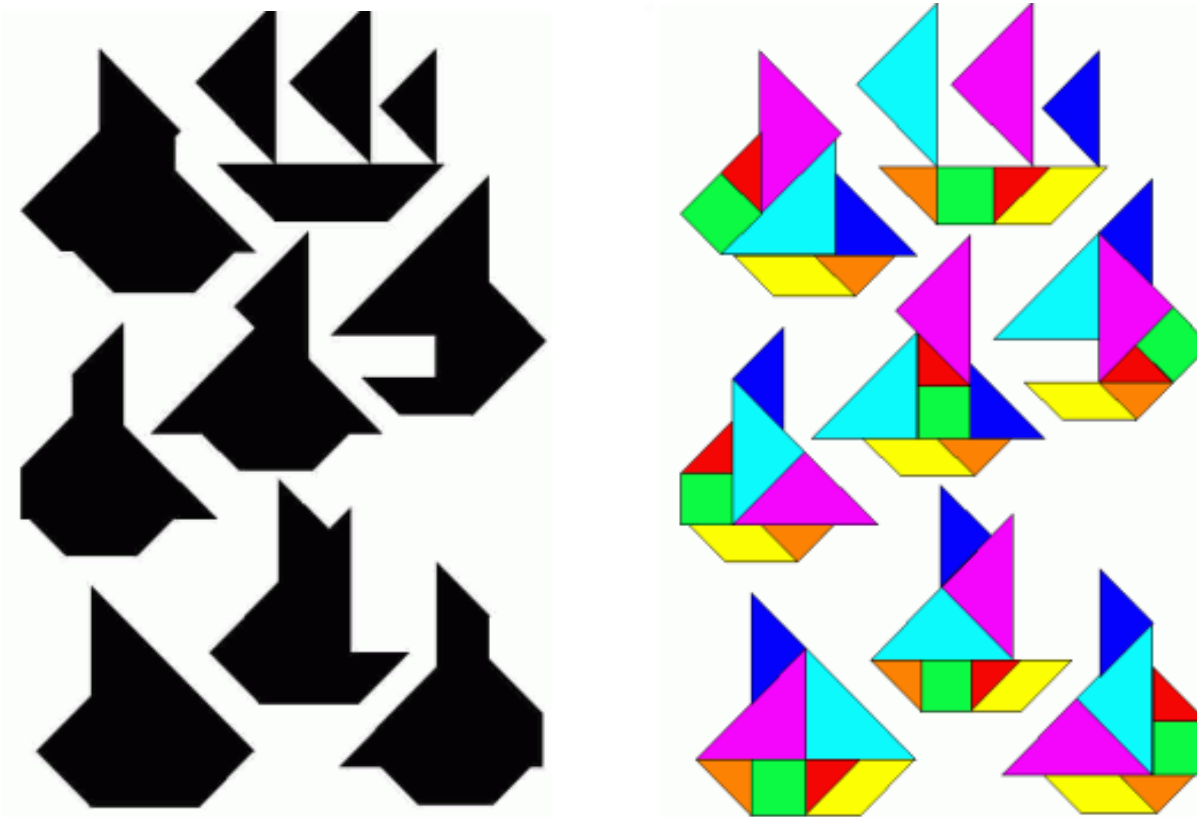
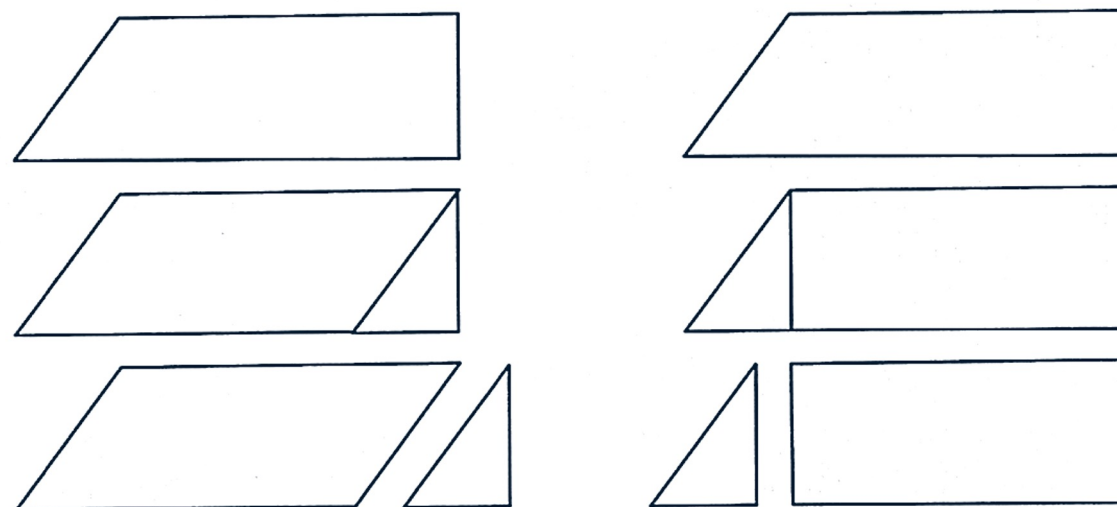


Abb. vgl. <http://www.schule-bw.de/schularten/sonderschulen/umaterialien/colours/tangram/index.htm>

Franke & Reinhold (2016), S. 312f

Indirektes Vergleichen von Flächen durch Zerlegen und Zusammensetzen

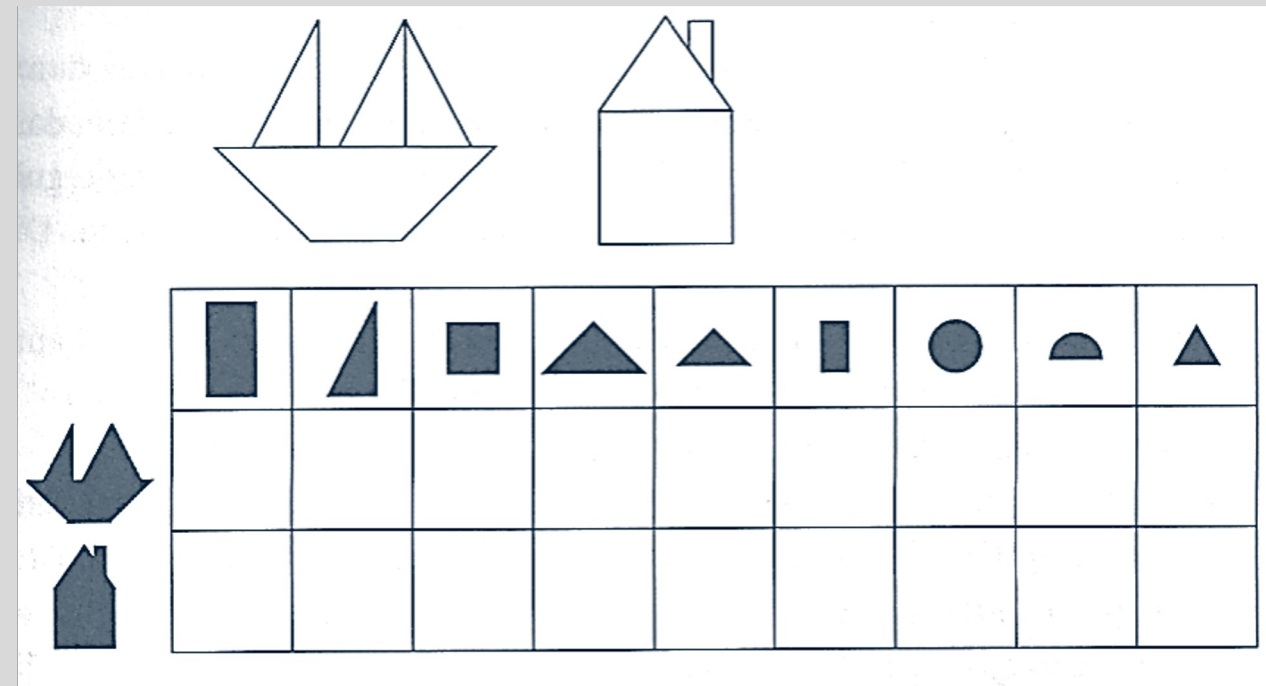
- Bedeutend für die Sek I: Idee des Messens
- Mathematische Formalisierung des Flächeninhaltsbegriffes
- Beispiel: Flächeninhaltsgleichheit Rechteck und Parallelogramm



Weigand et al. (2014), S. 174f

Indirektes Vergleichen von Flächen durch Auslegen

- Erfahrungen zum Auslegen von Flächen
- Auslegen von Umrissbildern mit selbstgewählten Legeplättchen
- Auslegen mit mehr oder weniger Plättchen
- Vergleich ist besonders gut möglich, wenn beide Flächen mit den gleichen Plättchen ausgelegt werden



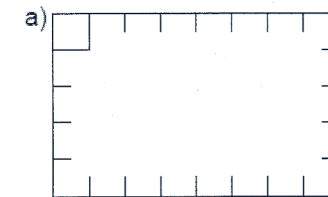
Franke & Reinhold (2016), S. 314f

Indirektes Vergleichen von Flächen durch Auslegen

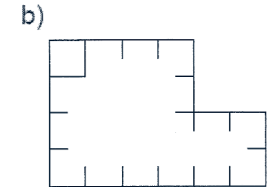
- Geeignet sind Quadrate und Dreiecke
- Schüler erkennen, dass
 - Eine Fläche mit unterschiedlichen Einheiten ausgemessen werden kann
 - Zu einem Messergebnis immer Anzahl und die Einheit gehören
 - Mit kleineren Einheiten genauer gemessen werden kann
- Übertragung auf Kästchen und Kästchenpapier

Aufgabe 5

Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!



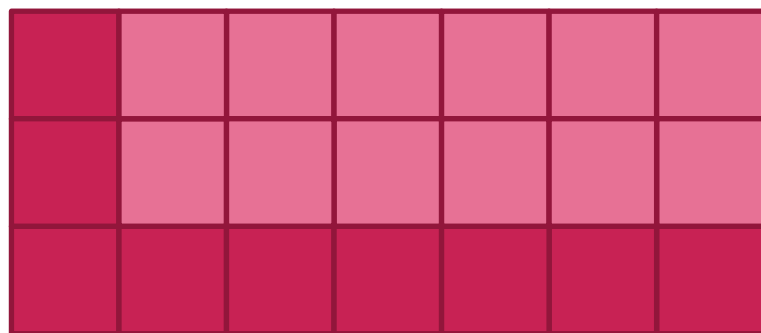
Rechnung: _____
 Quadrate



Rechnung: _____
 Quadrate

Indirektes Vergleichen von Flächen durch Auslegen

- Methode des Messens als Auslegen erneut hilfreich für spätere Herleitung der Flächenformeln



„Die Formel „Länge mal Breite“ ist falsch. Sie fordert, dass wir 8 cm mit 6 cm malnehmen sollen. Das geht nicht! [...] Die richtige Formel laute „Flächeninhalt des Rechtecks = Grundstreifen mal Anzahl der Streifen““ (Breidenbach, 1956, S. 192)

- $A = a \cdot b \cdot 1\text{cm}^2$
 - a und b jeweils Anzahlen der Einheitsquadrate
 - Vorsicht! (noch) nicht gleichbedeutend mit $A=a \cdot b$

Franke & Reinhold (2016), S. 315f

Definition: Flächenmaß und Flächenfunktion

Sei $\mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte der reellen Ebene. Wir betrachten bestimmte Teilmengen dieser Ebene, nämlich die n-Ecke (sog. Polygone).

Die Funktion F , die jedem Polygon einen reellen Zahlenwert als **Flächenmaßzahl** zuordnet, heißt **Flächenfunktion**.

Diese Flächenfunktion muss folgende Forderungen erfüllen:

1. **Nichtnegativität:** Für jedes Polygon A gilt: $F(A) \geq 0$.
2. **Verträglichkeit mit der Kongruenz:** Für alle Polygone $A; B$ gilt: Wenn A kongruent zu B ist, dann ist $F(A)=F(B)$.
3. **Additivität:** Für alle Polygone $A; B$ gilt: Wenn A und B keine inneren Punkte gemeinsam haben (also höchstens Randpunkte), dann soll gelten: $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$
4. **Normierung:** Für das fest definierte Einheitsquadrat E mit Kantenlänge 1 soll gelten: $F(E) = 1$.

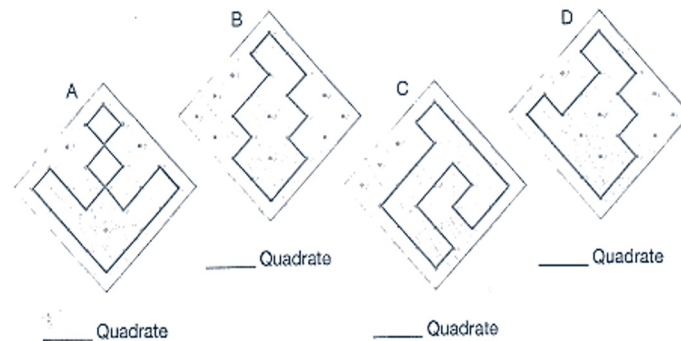
Indirektes Vergleichen von Flächen durch Auslegen

Station 15



Flächen messen mit Maßquadraten auf dem 5x5-Geobrett

- a) Welche Figur hat den größten Flächeninhalt?
Vermute erst. Spanne die Figuren. Lege sie mit Quadraten aus. Vergleiche.



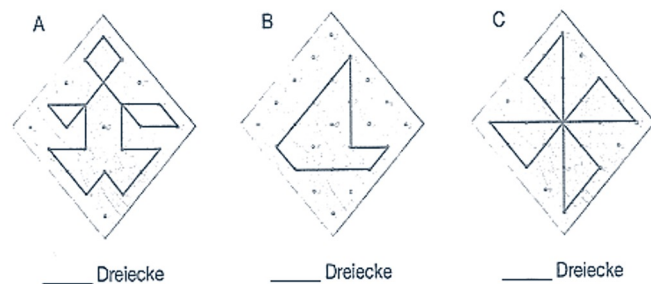
- b) Finde weitere Figuren, die genauso groß wie A sind. Zeichne.

Station 16



Flächen messen mit Maßdreiecken auf dem 5x5-Geobrett

- a) Welche Figur hat den größten Flächeninhalt?
Vermute erst. Spanne die Figuren. Lege sie mit Dreiecken aus.
Vergleiche.

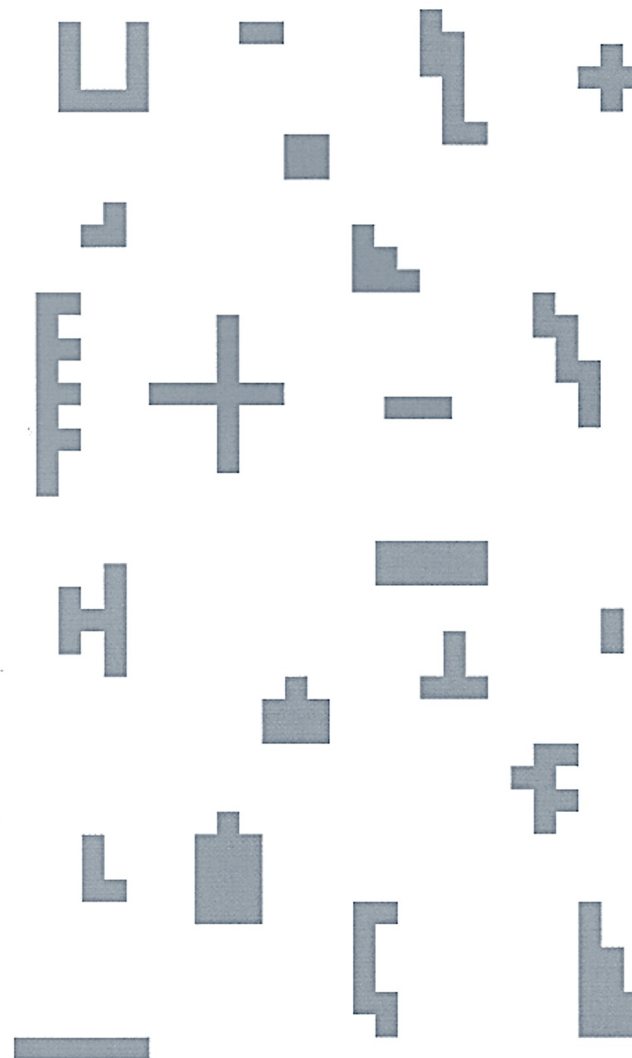


- b) Lege jede Figur mit möglichst vielen Quadraten und wenigen Dreiecken aus.

2. Flächen

AB 27

Welche Figuren haben die gleiche Fläche? Markiere.



Materialien für den Geometrieunterricht Klasse 1 bis 4
Kopiervorlage 29

© Mildener Verlag • 77610 Offenburg
Bestell-Nr. 150-70

Lösen Sie die Aufgabe.

Aufgabe Schokolade

Bei einer Tafel Schokolade mit 3 mal 6 Stücken findet sich folgende Besonderheit: Geht man davon aus, dass die Einzelstücke quadratische Form haben, so gilt: Die Maßzahlen des Flächeninhalts und des Umfangs sind gleich (18 Flächeneinheiten bzw. 18 Längeneinheiten).

Finde alle Rechtecke (mit ganzzahligen Seitenlängen), bei denen die Maßzahlen von Flächeninhalt und Umfang jeweils übereinstimmen. Begründe, dass Du alle Rechtecke gefunden hast.

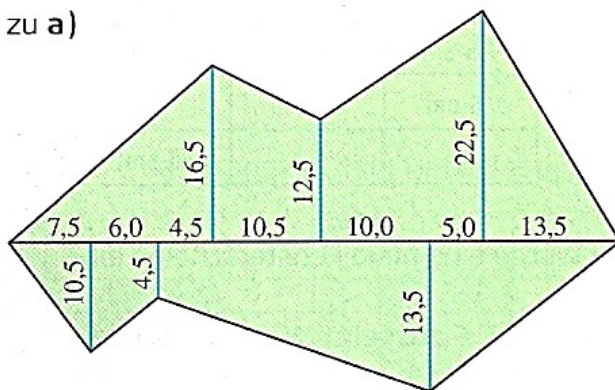


Weiter in der Sekundarstufe

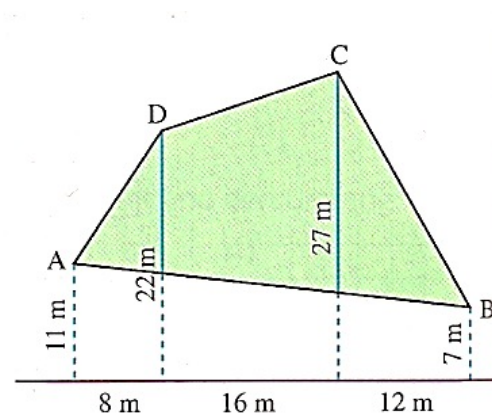
„berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren“

Bildungsstandards Mittlerer Schulabschluss, S. 10

2. zu a)

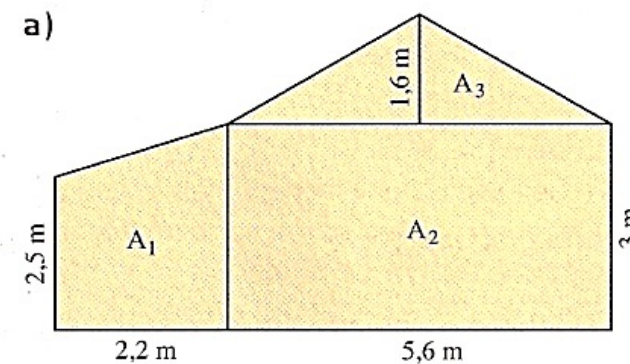


zu b)

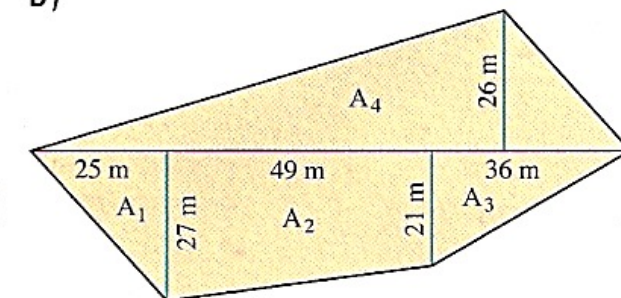


7. Bestimme zuerst die Größen der Einzelflächen. Berechne dann die Größe der Gesamtfläche.

a)



b)



Weiter in der Sekundarstufe **der Kreis**

Überlegen Sie selbst einmal.

- Was ist die Kreiszahl π ?
- Wie kommt man auf diese Zahl?
- Wie können Kinder diese Zahl erlernen / erfassen?

Weiter in der Sekundarstufe

Ein Beispiel, „Mathematik heute“, Klasse 9

- Einstieg: Unter dem Umfang des Kreises versteht man die Länge der Kreislinie
- Aufgabe Modelleisenbahn:

1. a) Die Fahrstrecken der Modelleisenbahn in einem Geschenkpaket sind Kreise unterschiedlicher Größe. Es gibt Geschenkpakete mit folgenden Fahrstrecken:

$$s_1 = 1,20 \text{ m}; \quad s_2 = 140 \text{ cm};$$

$$s_3 = 2,5 \text{ m}; \quad s_4 = 270 \text{ cm}.$$

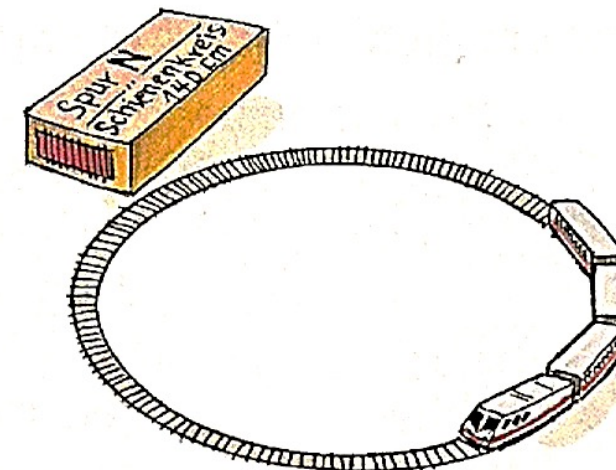
Im Katalog sind die Kreistradien angegeben mit

$$r_1 = 192 \text{ mm}; \quad r_2 = 225,6 \text{ mm};$$

$$r_3 = 396,4 \text{ mm}; \quad r_4 = 430 \text{ mm}.$$

Untersuche, wie die Fahrstrecke vom Kurvenradius abhängt.

Berechne jeweils den Quotienten $\frac{s}{d}$ aus Fahrstrecke s und Durchmesser d .



1. a) Die Fahrstrecken der Modelleisenbahn in einem Geschenkpaket sind Kreise unterschiedlicher Größe. Es gibt Geschenkpakete mit folgenden Fahrstrecken:

$$s_1 = 1,20 \text{ m}; \quad s_2 = 140 \text{ cm};$$

$$s_3 = 2,5 \text{ m}; \quad s_4 = 270 \text{ cm}.$$

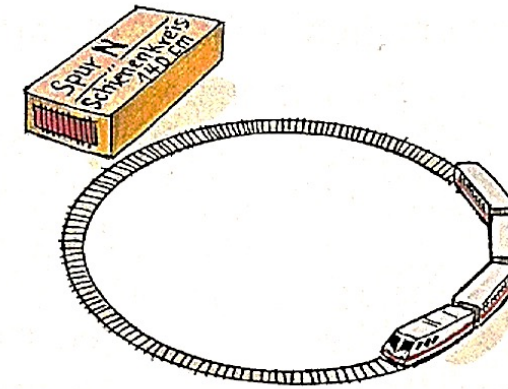
Im Katalog sind die Kreisradien angegeben mit

$$r_1 = 192 \text{ mm}; \quad r_2 = 225,6 \text{ mm};$$

$$r_3 = 396,4 \text{ mm}; \quad r_4 = 430 \text{ mm}.$$

Untersuche, wie die Fahrstrecke vom Kurvenradius abhängt.

Berechne jeweils den Quotienten $\frac{s}{d}$ aus Fahrstrecke s und Durchmesser d .



Lösung

- a) Wir berechnen:

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{1\,200 \text{ mm}}{192 \text{ mm}} \approx 6,25$$

$$\frac{s_2}{r_2} = \frac{1\,400 \text{ mm}}{225,6 \text{ mm}} \approx 6,206$$

$$\frac{s_3}{r_3} = \frac{2\,500 \text{ mm}}{396,4 \text{ mm}} \approx 6,307$$

$$\frac{s_4}{r_4} = \frac{2\,700 \text{ mm}}{430 \text{ mm}} \approx 6,279$$

$$\frac{s_1}{d_1} = \frac{1\,200 \text{ mm}}{384 \text{ mm}} \approx 3,125$$

$$\frac{s_2}{d_2} = \frac{1\,400 \text{ mm}}{451,2 \text{ mm}} \approx 3,103$$

$$\frac{s_3}{d_3} = \frac{2\,500 \text{ mm}}{792,8 \text{ mm}} \approx 3,153$$

$$\frac{s_4}{d_4} = \frac{2\,700 \text{ mm}}{860 \text{ mm}} \approx 3,139$$

Wir stellen fest: Die Quotienten aus Fahrstrecke und Radius bzw. aus Fahrstrecke und Durchmesser sind jeweils ungefähr gleich.

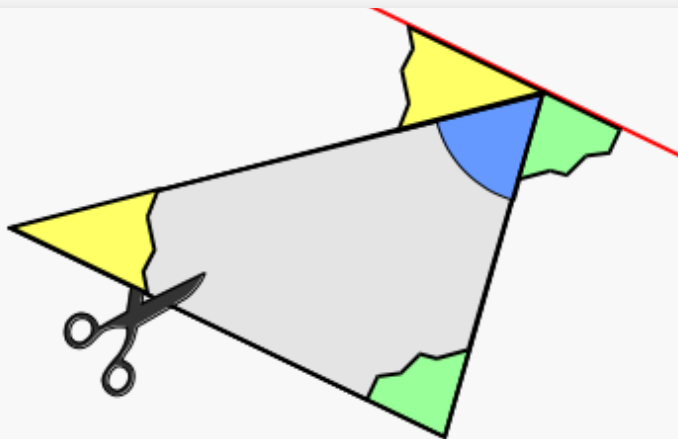
Wir fassen die Fahrstrecke als Umfang des Kreises auf und gehen davon aus, dass der Quotient $\frac{\text{Kreisumfang } u}{\text{Durchmesser } d}$ konstant ist.

Diese Konstante bezeichnet man mit π , gelesen: *pi*. Ein Näherungswert für π ist 3,14.

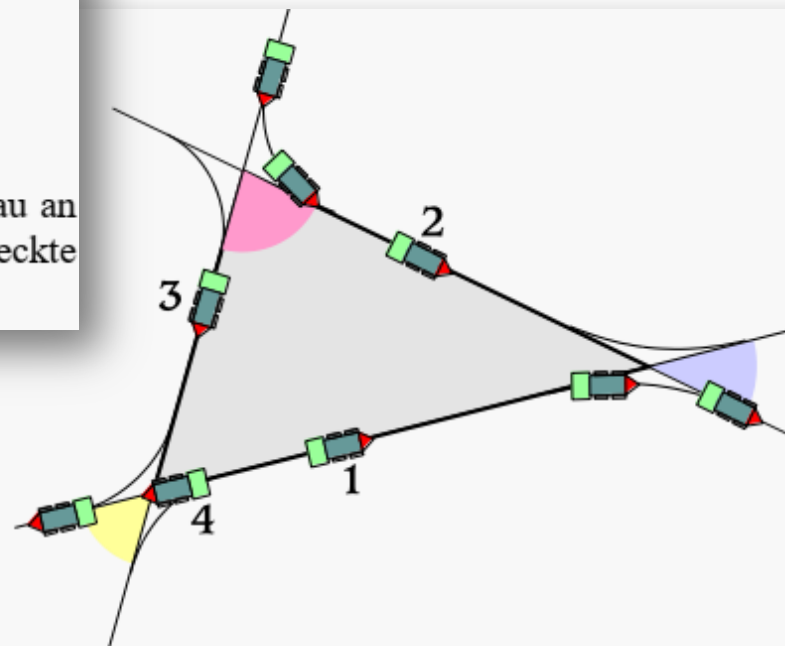
Begründen & Beweisen

Satz: Innenwinkelsumme im Dreieck

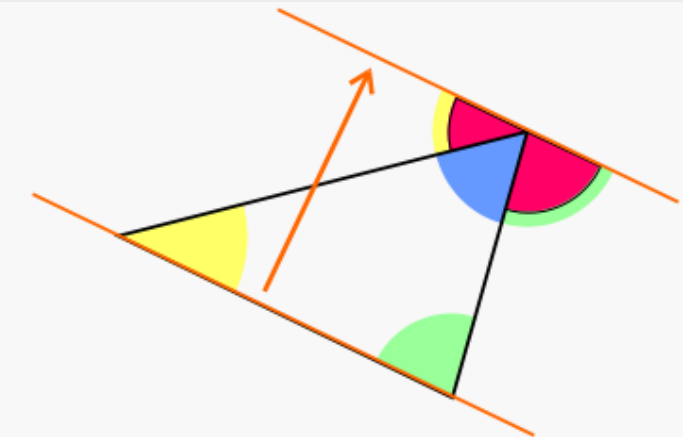
Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks (in der Euklidischen Geometrie) beträgt **180°** .



Fügt man zwei Ecken eines beliebigen Dreiecks passgenau an die dritte, so ergeben die drei Winkel stets eine gestreckte Linie.



Umfährt eine Lokomotive einen dreieckigen Gleiskurs, so steht sie nach einer Runde (um 180° gedreht) in Gegenrichtung.

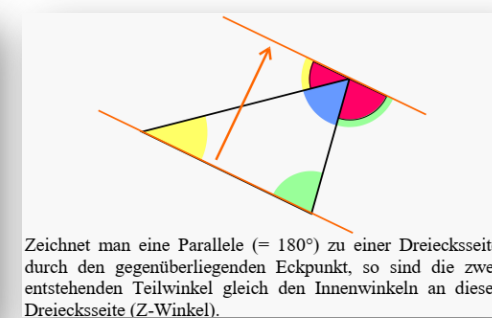
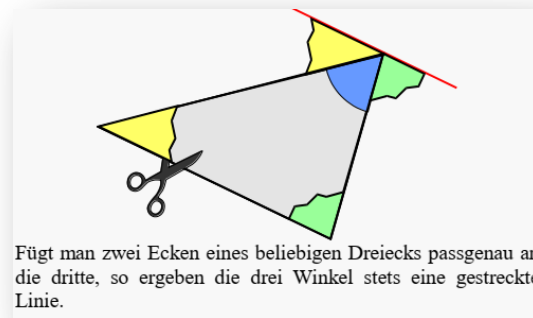


Zeichnet man eine Parallele ($= 180^\circ$) zu einer Dreiecksseite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt, so sind die zwei entstehenden Teilwinkel gleich den Innenwinkeln an dieser Dreiecksseite (Z-Winkel).

<https://kavaube.de/sites/default/files/2017-02/Winkelsumme%20im%20Dreieck.pdf>

Typen von Beweisen

Direkter Beweis



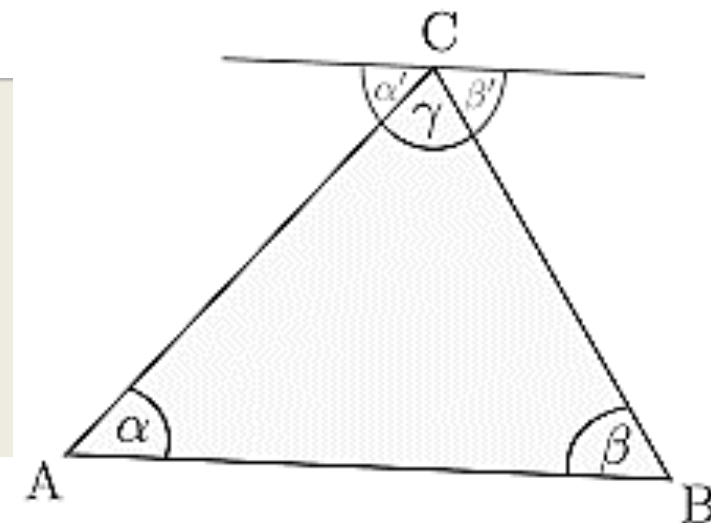
Satz: Innenwinkelsumme im Dreieck

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks (in der Euklidischen Geometrie) beträgt **180°** .

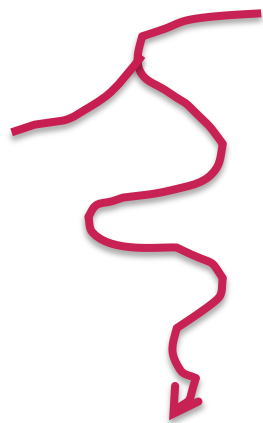
In der fertigen Version sehen Beweise so aus:



Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Winkeln α , β und γ . Sei g die Parallele zu $\overline{AB}$ durch C. **Seien** α' und β' wie in der Zeichnung gegeben. Dann sind α und α' genauso wie β und β' Wechselwinkel an parallelen Geraden. Es folgt $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ und mit $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$ auch $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$.



Aber wie entstehen Beweise? Eher so (fiktives Beispiel):



Hm, man **geht von** dem Dreieck ABC **aus**. **Was wissen wir darüber?** Man **könnte** die Außenwinkel betrachten. Dann ergibt sich [...]. **Nein, das bringt nichts**. **Vielleicht doch eher** eine Parallele einzeichnen. **Vielleicht** bringen mich die Wechselwinkel weiter. [...]
Ah ja, dann gilt $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ und mit $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$ auch $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$.

Typen von Beweisen

Direkter Beweis

Satz: Innenwinkelsumme im Dreieck

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks (in der Euklidischen Geometrie) beträgt **180°** .

Warum wäre diese Handlung
unstimmig?

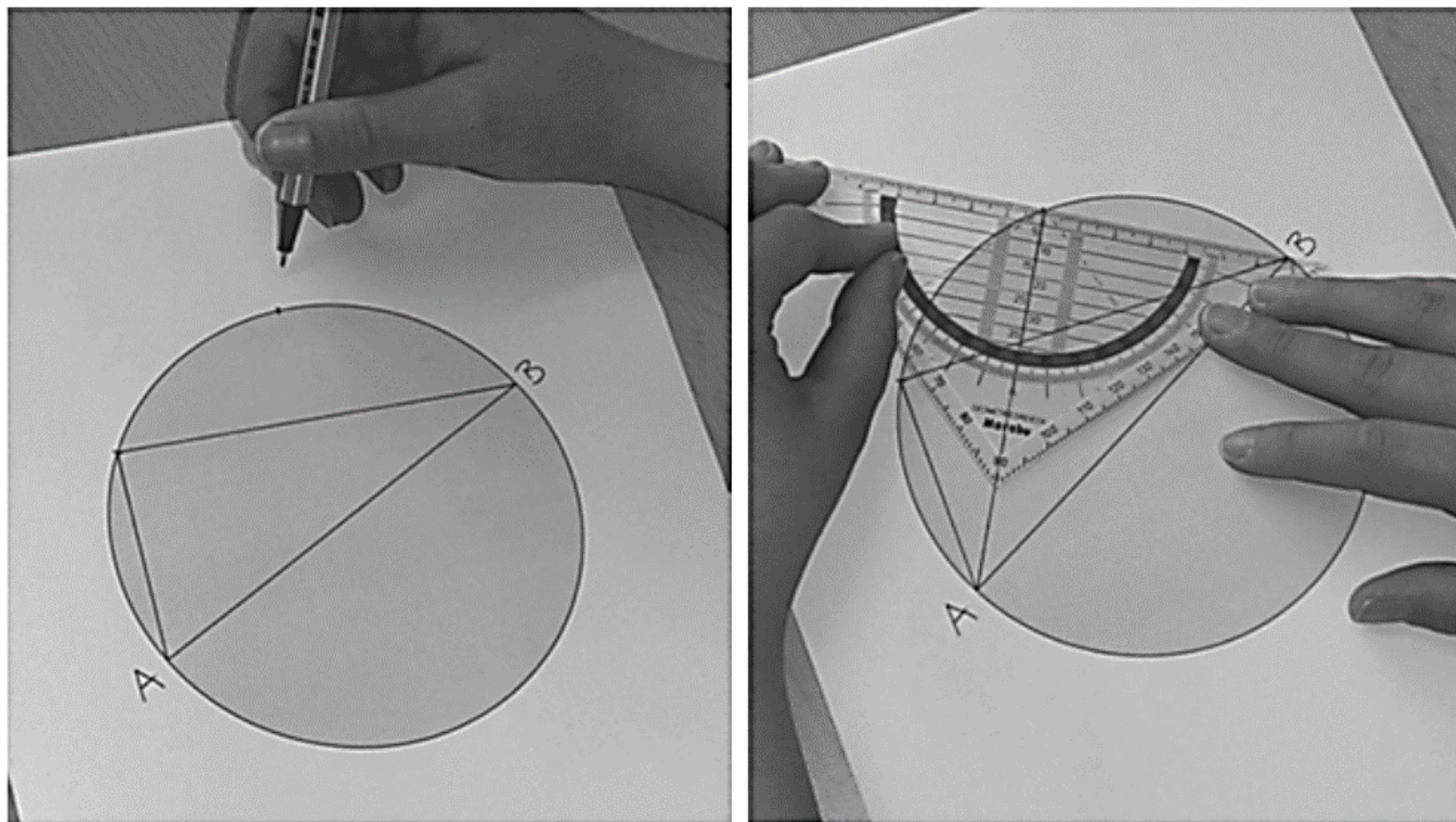


Lotz (2022)

Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes.

Satz des Thales:

Wenn man einen Punkt C einer Kreislinie mit den Endpunkten A und B eines Durchmessers verbindet, dann ist der Winkel $\sphericalangle ACB$ ein rechter Winkel.



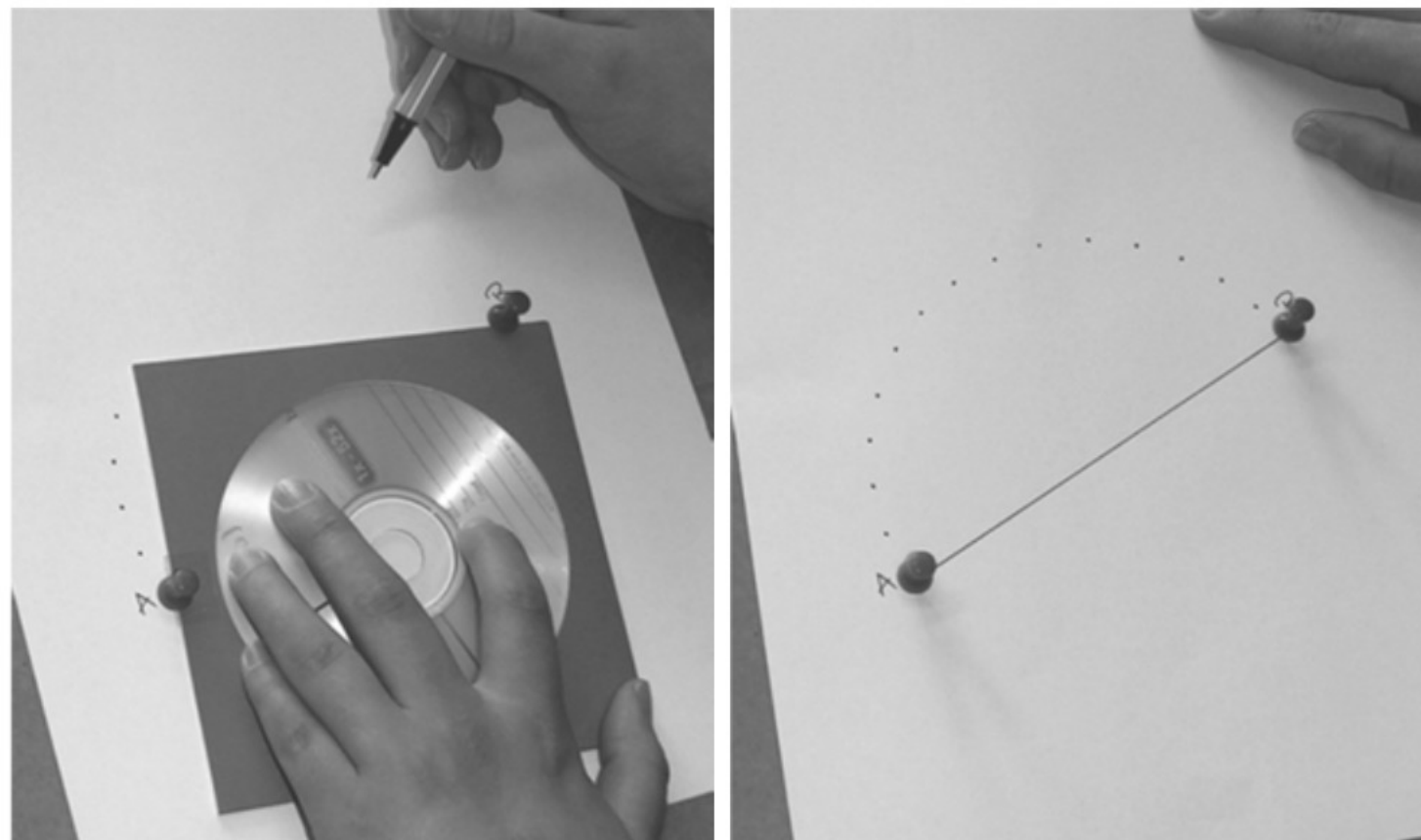
Weigand et al. (2014), S. 40f

Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes.

Satz des Thales:

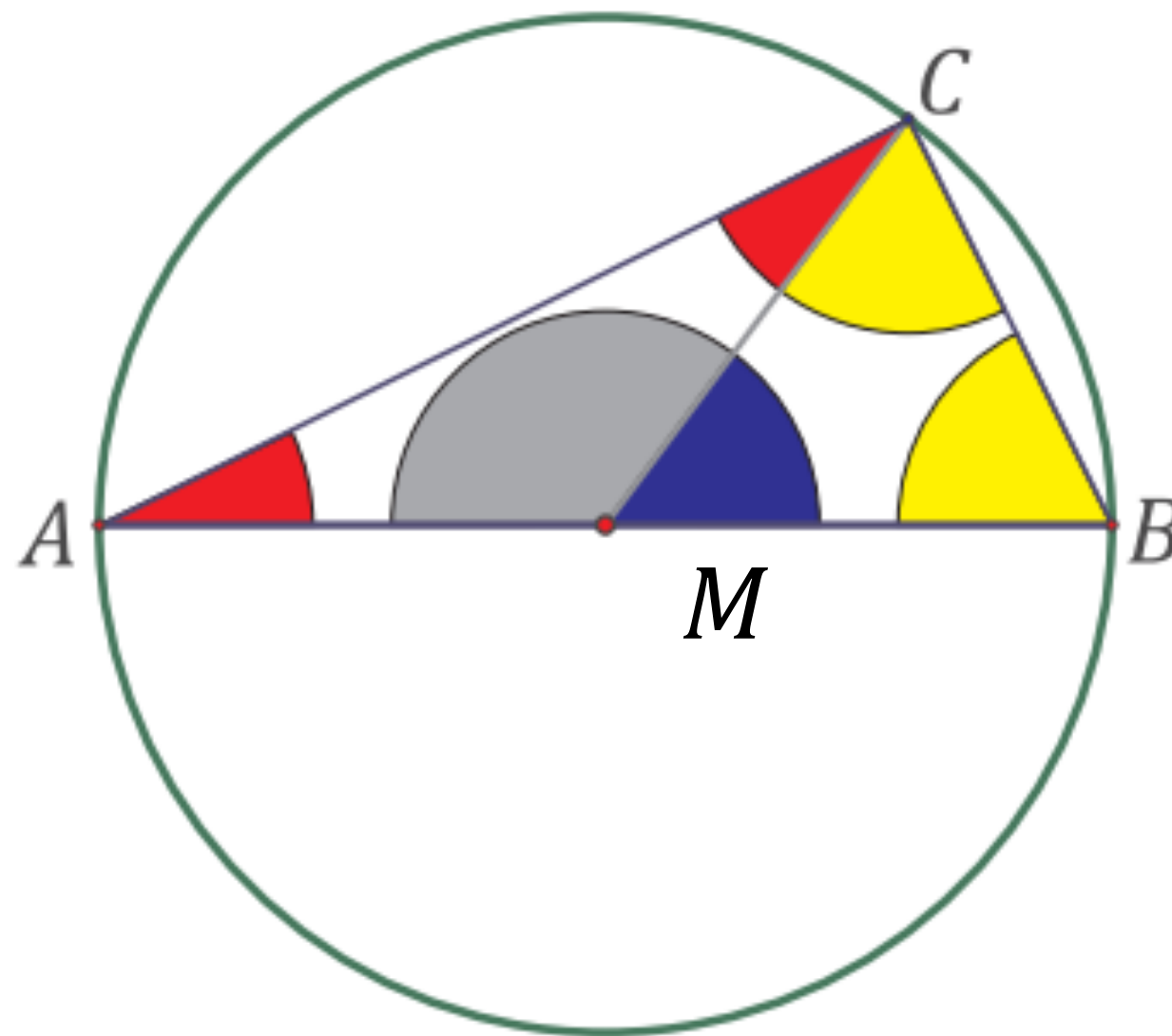
Wenn man einen Punkt C einer Kreislinie mit den Endpunkten A und B eines Durchmessers verbindet, dann ist der Winkel $\sphericalangle ACB$ ein rechter Winkel.

Kehrsatz: Wenn man einen rechten Winkel so legt, dass seine Schenkel die Endpunkte einer vorgegebenen Strecke $\overline{AB}$ enthalten, dann liegt der Scheitel des Winkels auf einem Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$.



Weigand et al. (2014), S. 41f

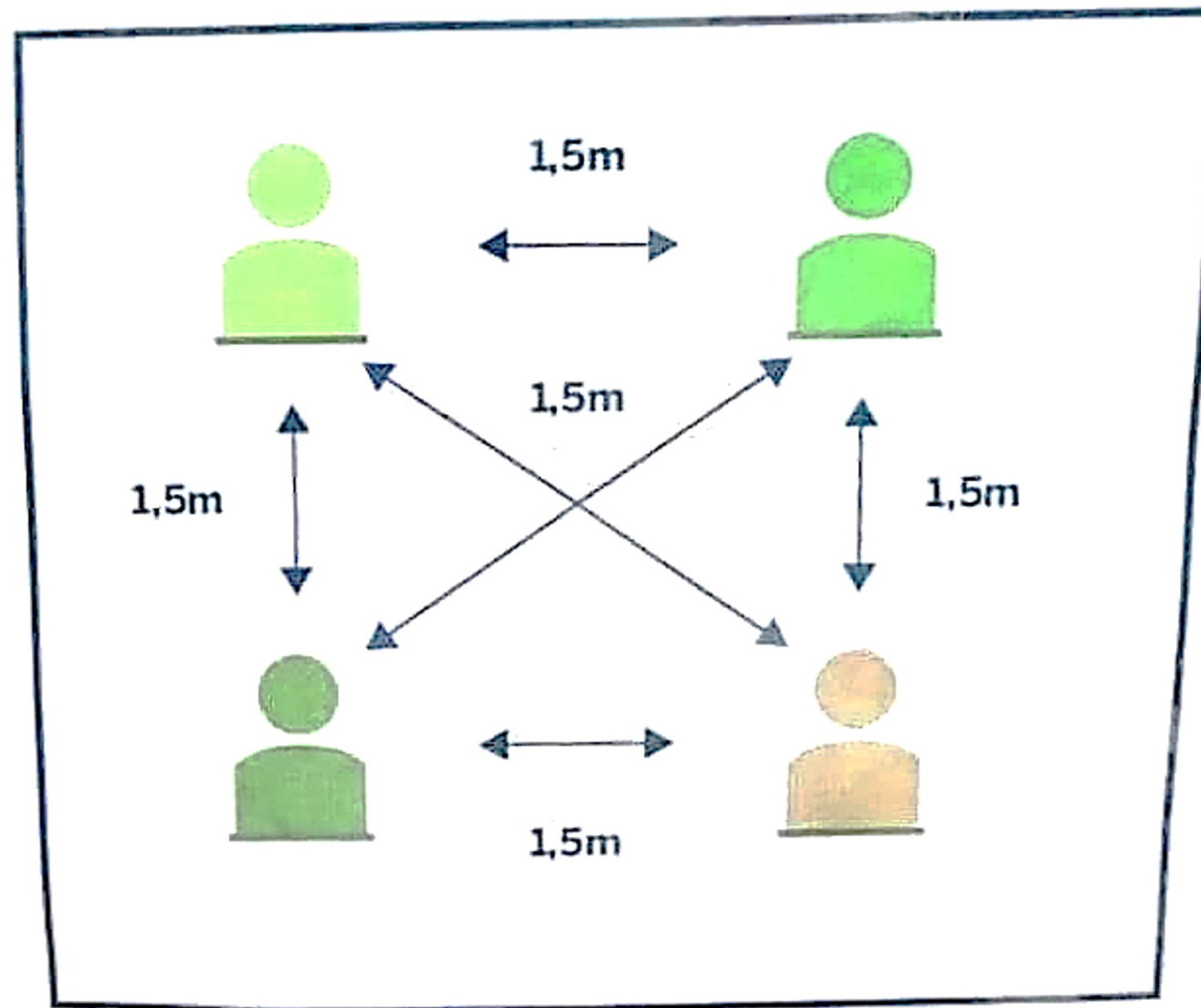
„Halbikonischer Beweis“ des Satzes des Thales



http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/did_elemgeo-skript.pdf

Satz des Pythagoras

Aus aktuellem Anlass ... ;)



Satz des Pythagoras

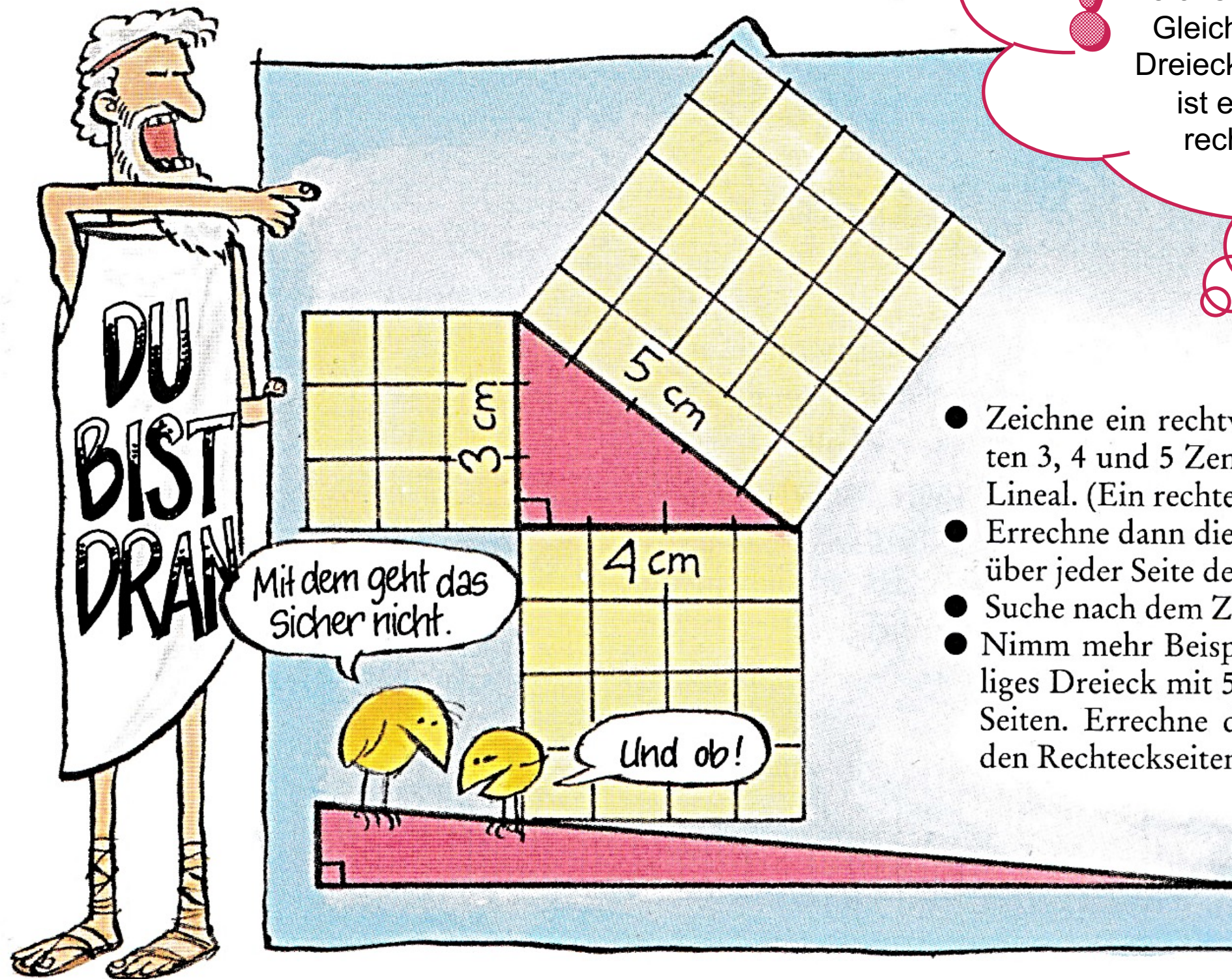
Hol dir zwei Freunde zu Hilfe und besorge dir drei Schnüre, die 3, 4 und 5 Meter lang sind. Damit ihr Platz habt, müsst ihr wahrscheinlich hinaus auf den Hof gehen. Jeder von euch muss zwei Schnurenden festhalten. Die Enden müssen sich treffen. Derjenige von euch, der die beiden kürzeren Schnüre hält, stellt sich in eine Ecke. Spannt die Schnüre!

Was ist das für eine Art Winkel, der sich bei dem, der in der Ecke steht, zwischen den Schnüren bildet?



Dahl & Nordqvist (1996), S. 17

Satz des Pythagoras



Das Auslegen der Quadrate über den Dreiecksseiten mit quadratischen Plättchen ist **kein** inhaltlich-anschaulicher Beweis für den Satz von Pythagoras, sondern nur die Veranschaulichung eines Spezialfalles. Da die Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ nur für rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 gilt, ist eine Verallgemeinerung für beliebige rechtwinklige Dreiecke **nicht möglich**.

- Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten 3, 4 und 5 Zentimeter lang sind. Benutze ein Lineal. (Ein rechter Winkel hat 90 Grad.)
- Errechne dann die Fläche der Quadrate, die man über jeder Seite des Dreiecks zeichnen kann.
- Suche nach dem Zusammenhang.
- Nimm mehr Beispiele. Vielleicht ein rechtwinkliges Dreieck mit 5, 12 und 13 Zentimeter langen Seiten. Errechne die Fläche der Quadrate über den Rechteckseiten.

Dahl & Nordqvist (1996), S. 18

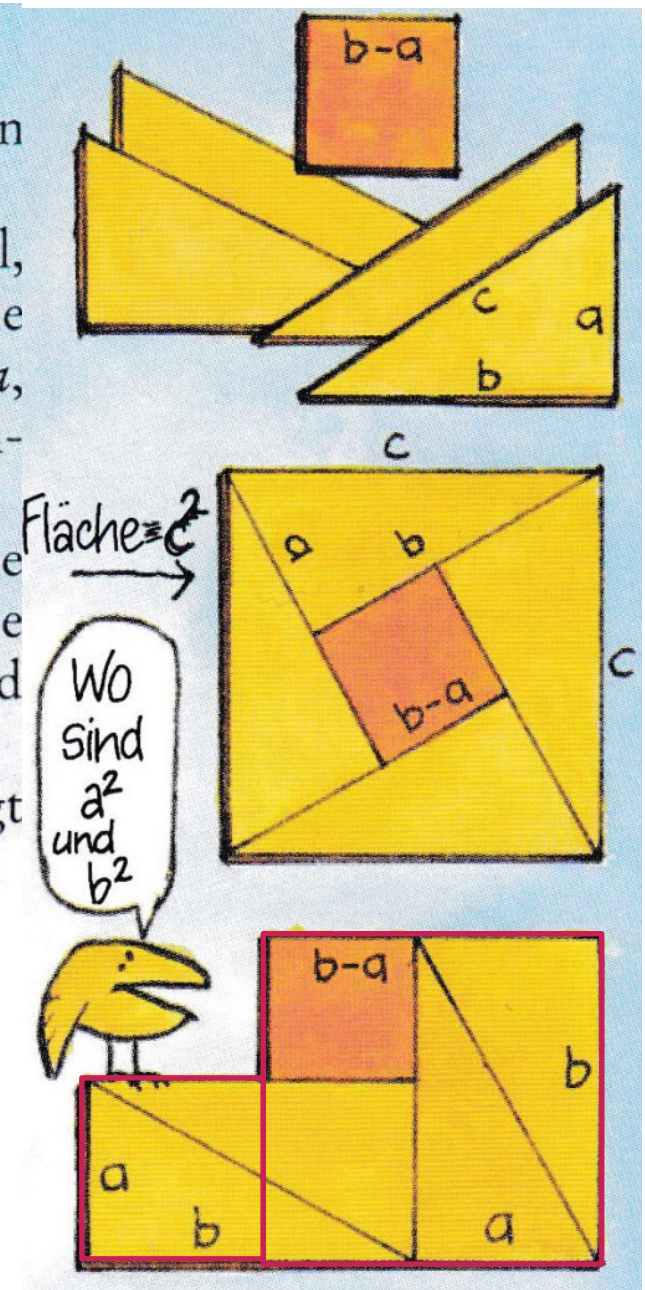
Satz des Pythagoras

Bring selbst einen Beweis für den Satz des Pythagoras. Du kannst ihn wie ein Puzzle legen. Der erste Beweis ist tausend Jahre alt und kommt aus Indien.

Zuerst stellst du 5 Puzzleteile her. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, egal, was für eins. Nenn die Seiten a , b und c . Kopiere es viermal und schneide die Dreiecke aus. Das fünfte Puzzleteil ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $b - a$, also die lange Kathete minus der kurzen. Mit einem Lineal messen und zeichnen; dann ausschneiden.

Leg die Teile zu einem Quadrat zusammen, bei dem die Hypotenusen die Seiten bilden. Die Fläche beträgt $c \times c = c^2$. Leg die Teile dann so, dass sie die Figur darunter bilden. Findest du die Quadrate der Katheten, also $a \times a = a^2$ und $b \times b = b^2$?

Da du die Fläche aus c^2 und dann $a^2 + b^2$ aus den gleichen Puzzleteilen gelegt hast, hast du bewiesen, dass $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt.



Zerlegungsbeweis (inhaltlich-anschaulich): Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten der Länge a und b sowie der Hypotenuse der Länge c wird viermal aus Pappe ausgeschnitten, zudem ein Quadrat der Seitenlänge $b-a$. Ein passendes Zusammenlegen der Figuren zeigt: Die beiden Quadrate mit den Seitenlängen a und b sind zusammen zerlegungsgleich zum Quadrat mit der Seitenlänge c , also folgt $a^2 + b^2 = c^2$. Diese Überlegungen sind für jedes rechtwinklige Dreieck gültig und lassen sich in einen formalen Beweis überführen. So kann unter Rückgriff auf Winkel- und Längeneigenschaften gezeigt werden, dass die beiden Figuren zerlegungsgleich sind.

Dahl & Nordqvist (1996), S. 19

Dahl, K & Lepp, M (2000). Wollen wir Mathe spielen? Hamburg: Verlag Friedrich Oetinger.

Dahl, K & Nordqvist, S. (1996). Zahlen, Spiralen und magische Quadrate. Hamburg: Verlag Friedrich Oetinger.

Hessisches Kultusministerium (HKM) (2005). Zentrale Lernstandserhebungen.

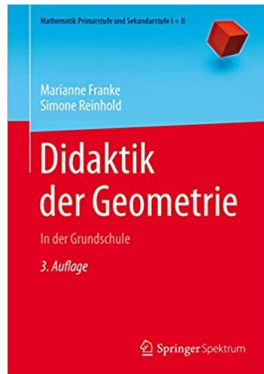
Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 331-355). Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.

Lotz, J. (2022). *enaktiv – ikonisch – symbolisch. Eine semiotisch basierte Präzisierung und deren unterrichtspraktische Konkretisierungen*. Dissertation. Universität des Saarlandes.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.

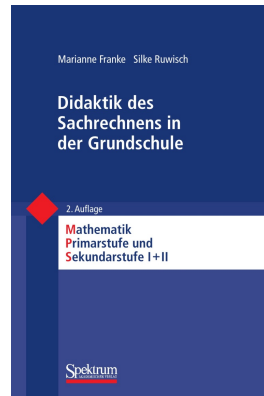
Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Springer-Verlag.

Weigand, H. G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., ... & Wittmann, G. (2014). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Springer Berlin Heidelberg.



Didaktischer Hintergrund (Primarstufe):

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag. **Kapitel 10 „Messen geometrischer Objekte“**



Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Springer-Verlag. (<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-8274-2695-6.pdf>). **Kapitel 6 „Größen und Messen“**



Didaktischer Hintergrund (Sekundarstufe):

Weigand, H.-G. (2014): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*, Heidelberg, Spektrum Verlag. (<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-37968-0>). **Kapitel VII „Flächeninhalt und Volumen“, Kapitel II „Beweisen und Argumentieren“**

Ich kann...

- ☐ Aspekte und Kontexte des Messens nennen und beschreiben.
- ☐ die Lernstufen bei der Behandlung von Größen nennen und bei der Gestaltung von Lernsituationen nutzen.
- ☐ Lernsituationen zum Erarbeiten von Einheiten der Länge und zum Messen von Längen beschreiben und erstellen.
- ☐ herausfinden, ob zwei Flächen den gleichen Flächeninhalt haben und mein Vorgehen begründen.
- ☐ Lernsituationen zum direkten Vergleichen von Flächen sowie zum indirekten Vergleichen von Flächen (durch zerlegen und Zusammensetzen oder durch Auslegen) beschreiben und erstellen.
- ☐ herausfinden, ob zwei Objekte den gleichen Rauminhalt haben und mein Vorgehen begründen.
- ☐ Lernsituationen zum direkten Vergleichen von Körpern sowie zum indirekten Vergleichen von Körpern (mit Hilfe einer Vergleichsgröße) beschreiben und erstellen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Mitarbeit
und bis nächsten Dienstag!

