UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Didaktik der Mathematik in der Primarstufe III

Didaktik der Geometrie

12 – Längen, Flächen und Volumina II

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Melanie Platz

Themenübersicht

Datum	Nr.	Thema	Grundidee
11.04.23	**01**	Organisatorisches & Einführung	
18.04.23	**02**	Entwicklung räumlicher Fähigkeiten	
25.04.23	**03**	Geometrische Begriffe und Wissenserwerb	
02.05.23	**04**	Zeichnen und Konstruieren	Formen und ihre Konstruktion
09.05.23	**05**	Ebene Figuren I	
16.05.23	**06**	Ebene Figuren II & Räumliche Objekte	
23.05.23	**07**	Symmetrie I (Kongruenzabbildungen)	Operieren mit Formen
30.05.23	**08** (entfällt)	--	
06.06.23	**09**	Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette)	
13.06.23	**10**	Falten	
20.06.23	**11**	Längen, Flächen und Volumina I	Maße und Formeln
27.06.23	**12**	Längen, Flächen und Volumina II	Geom. Gesetzm. & Muster
04.07.23	**13**	Pläne & Maßstäbe, Wiederholung & Fragen I	Koordinaten
11.07.23	**14** (online)	Wiederholung & Fragen II	
18.07.23	**15**	**Klausur**	

Längen, Flächen & Volumina II

	Ich kann…
☐	Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel definieren.
☐	herausfinden, ob zwei Objekte den gleichen Rauminhalt haben und mein Vorgehen begründen.
☐	Das Prinzip von Cavalieri beschreiben und anwenden.
☐	Das Volumen und Oberflächeninhalt von Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel bestimmen und mein Vorgehen begründen.

Längen, Flächen & Volumina II

- Rauminhalte & Oberfläche

Einstimmung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen

Die Schülerinnen und Schüler

- klassifizieren Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften, ordnen Fachbegriffe zu und beschreiben Beziehungen zwischen geometrischen Figuren (z. B. Quadrat und Rechteck),
- erkennen Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder,
- stellen Modelle von Körpern (Vollmodelle, Flächenmodelle, Kantenmodelle) und ebenen Figuren her und untersuchen (z. B. bauen, legen, zerlegen, zusammenfügen, ausschneiden, falten) diese, auch unter Nutzung digitaler Werkzeuge,
- untersuchen und vergleichen ebene Figuren und Körper (ebene Figuren auch hinsichtlich des Umfangs und Flächeninhalts, Körper auch hinsichtlich des Rauminhalts),
- fertigen Zeichnungen geometrischer Figuren mit und ohne Hilfsmittel an, auch unter Nutzung digitaler Werkzeuge.

KMK, 2022, S. 17

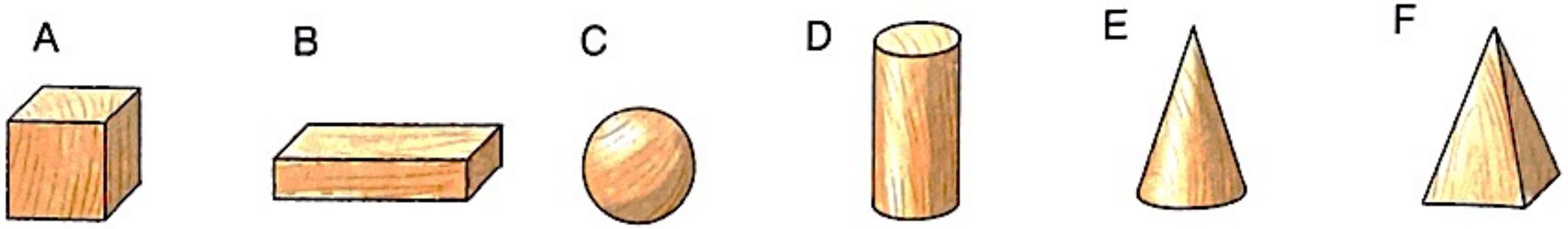
Körper

ElMa WiSe 22/23

vgl. Vorlesung 5

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

1 Diese Körper kennst du schon. Wie heißen sie? Ordne die Namen den Körpern zu.



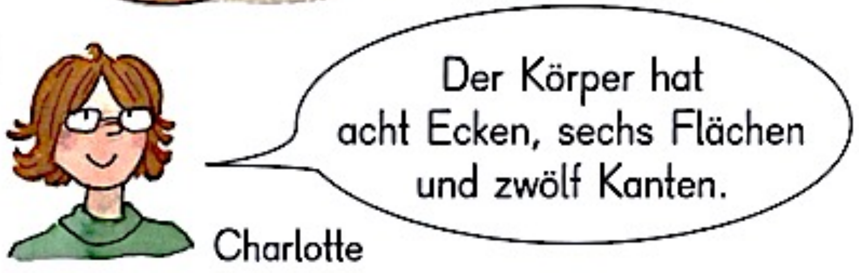
Zylinder | Würfel | Kegel | Kugel | Pyramide | Quader

2 Körperrätsel. Welcher Körper kann es sein?

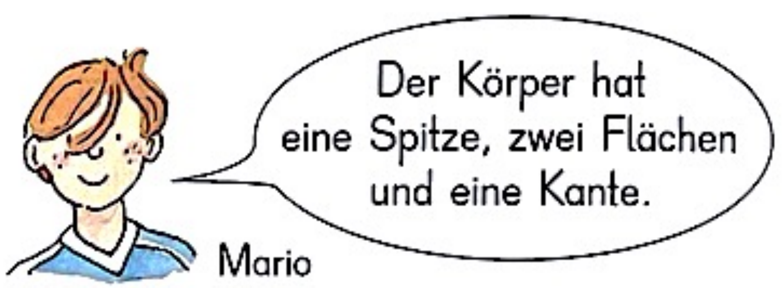
a)

b)

c)



d)



Welt der Zahl 4, 2019, S. 52

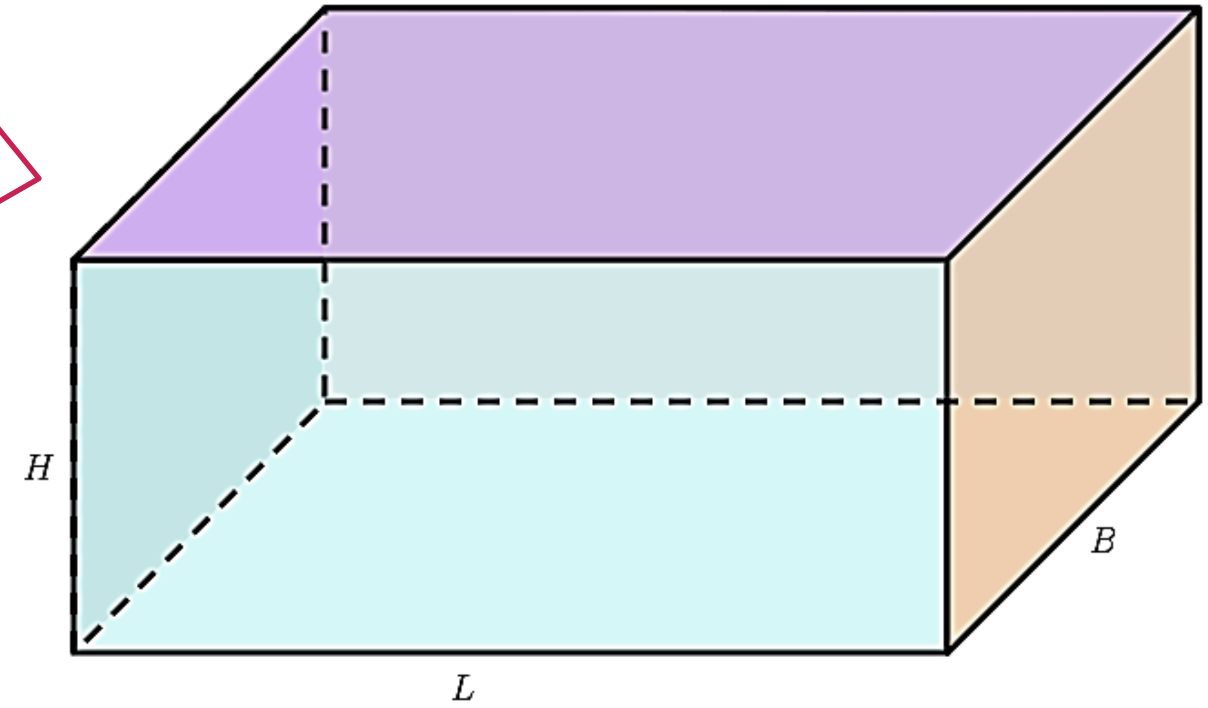
Quader

<u>Definition: Quader</u>

Eine Rechteckfläche wird senkrecht zu sich selbst im Raum verschoben; die dabei überstrichene Punktmenge ist ein **Quader**.

Alternativ: Ein Quader ist ein Körper, der durch rechteckige Seitenflächen begrenzt wird und bei dem die Kanten senkrecht aufeinander stehen.

Was sind Sonderfälle der Körperform Quader, was Verallgemeinerungen?



Krauter & Bescherer (2012), S. 86

Prisma

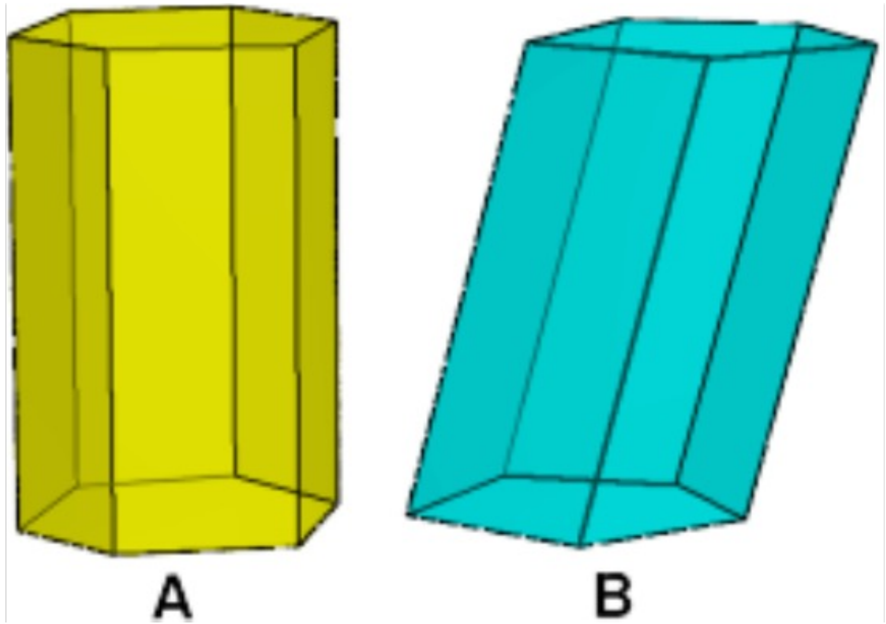
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Definition: Prisma

Ein **Prisma** ist ein Polyeder, dessen Grund- und Deckfläche parallele, zueinander kongruente n-Ecke sind und dessen Seitenkanten zueinander parallel und gleich lang sind.

Alternativ: Ein Prisma entsteht durch Parallelverschiebung eines n-Ecks entlang einer nicht in dieser Ebene liegenden Geraden im Raum.

Gerades Prisma:
Kanten senkrecht zur Grundfläche



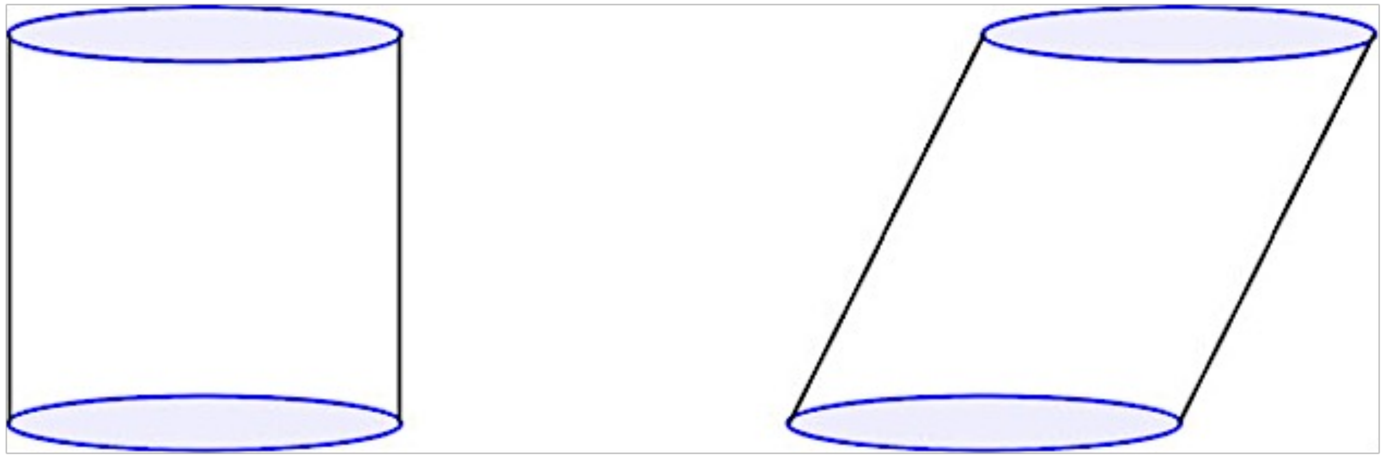
Schiefes Prisma:
Kanten nicht senkrecht zur Grundfläche

Krauter & Bescherer (2012), S. 86

Zylinder

Allgemein werden geometrische Körper, die durch eine parallele Verschiebung aus einer Grundfläche hervorgehen, als **Zylinder** bezeichnet.

Ein **Kreiszylinder** ist ein Zylinder mit einer kreisförmigen Grundfläche.



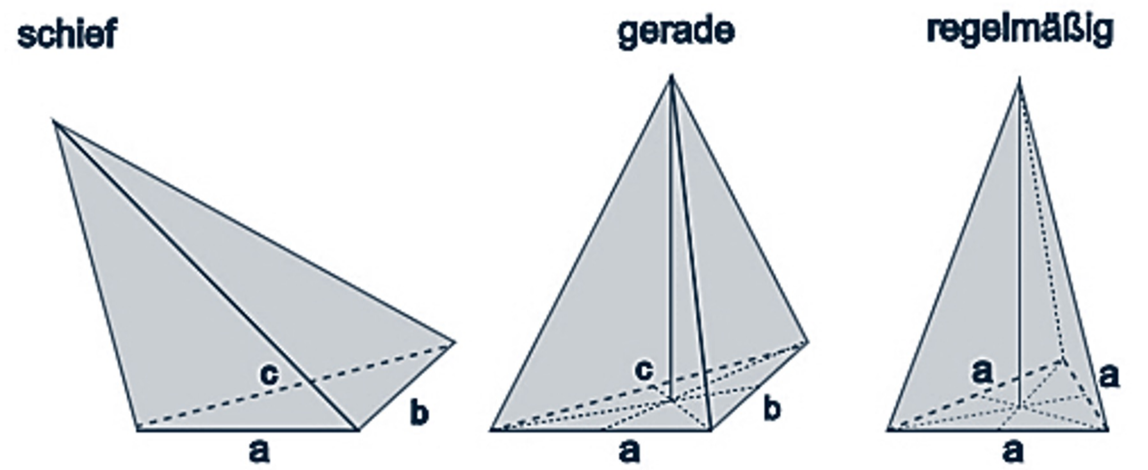
Helmerich & Lengnink (2016), S.94

Pyramide

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

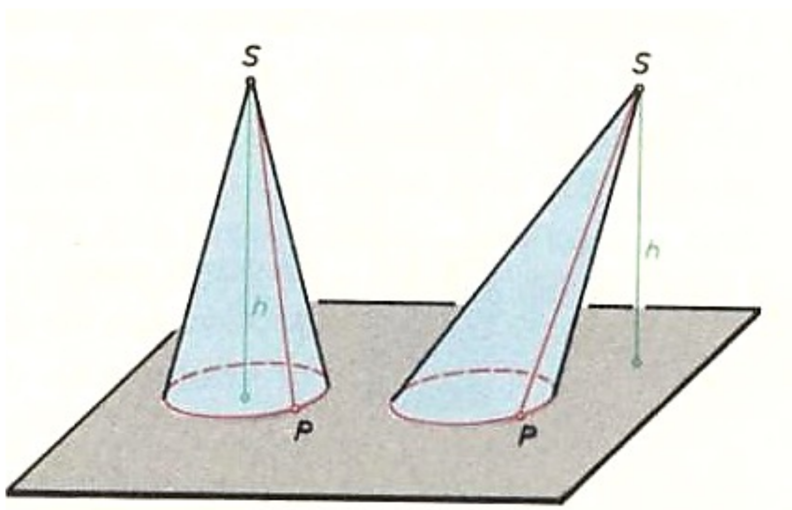
Definition: Pyramide

Eine **Pyramide** ist ein Polygon, das von einem n-Eck und n Dreiecken begrenzt wird. Die Dreiecke treffen sich in einem Punkt, der Spitze.



Grenzfall:

Ist die Grundfläche ein Kreis, so erhält man einen **Kegel**.



Krauter & Bescherer (2012), S. 87

Abbildungsquelle: https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/messen/pyramiden

Kugel

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Definition: Kugel

Die **Kugeloberfläche** besteht aus allen Punkten, die zu einem vorgegebenen Mittelpunkt den gleichen Abstand haben. Der Abstand zum Mittelpunkt heißt **Radius**.

Die **„Vollkugel"** wird zusätzlich durch alle Punkte „innerhalb" der Oberfläche beschrieben, d. h. die Menge aller Punkte, deren Abstand vom Kugelmittelpunkt kleiner oder gleich dem Radius ist.

Helmerich & Lengnink (2016), S.96

ElMa WiSe 22/23

Rauminhalte & Oberflächen

- Volumen eines Würfels und eines Quaders
- Herleitung des Volumens anderer Körper
- Sekundarstufe I

Volumen

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Definition: Volumenfunktion und Volumenmaß

Sei $\mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte des reellen Raumes.

Die Funktion V , die jeder Teilmenge des Raumes einen reellen Zahlenwert als **Volumenmaßzahl** zuordnet, heißt **Volumenfunktion**.

Diese Volumenfunktion hat analog zur Flächenmaßfunktion die Eigenschaften **Nichtnegativität, Verträglichkeit mit der Kongruenz, Additivität** und **Normierung**.

Helmerich & Lengnink (2016), S. 170

Rauminhalte & Oberflächen

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Zwei Objekte haben den gleichen Rauminhalt,

- wenn sie in ihrer Form und Größe übereinstimmen
- wenn sie zerlegungsgleich sind
  - Jedes der Objekte kann in dieselben Teile zerlegt oder aus denselben Teilen zusammengesetzt werden
- wenn sie mit der gleichen Anzahl von Einheitskörpern lückenlos ausgefüllt oder gebaut werden können

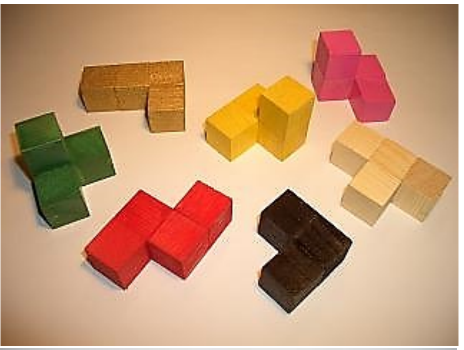
Man unterscheidet bei der Volumenbestimmung einerseits das Hohlmaß von Hohlkörpern als den freien Raum innerhalb von festliegenden Begrenzungen, wie zum Beispiel das Fassungsvermögen von Behältern, und andererseits den Rauminhalt als das Maß, das ein fester Vollkörper, aber auch Gase oder Flüssigkeiten im Raum einnehmen.(Helmerich & Lengnink, 2016, S. 167)

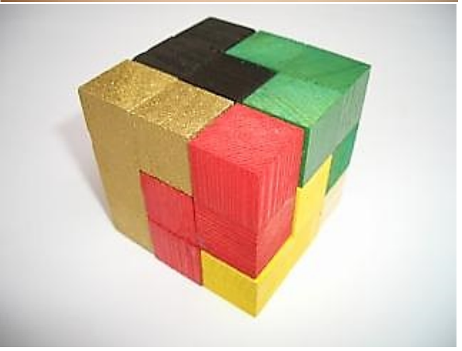
Franke & Reinhold (2016), S. 319

Rauminhalte & Oberflächen

Grundschule

- **Direktes Vergleichen**
  - gelingt nur, wenn die Körper tatsächlich gleich sind
  - Hilfsmittel für unterschiedlich geformte Körper benötigt
- **Indirektes Vergleichen mit Hilfe einer Vergleichsgröße**
  - Einfüllen und umfüllen mit Wasser oder Sand
  - Bauen mit gleichen Teilen
    - Bauen mit SOMA-Teilen analog zum Tangram
  - Bauen mit Einheitswürfeln
    - Gleiche Anzahl, unterschiedliche Gebäude, gleiches Volumen
  - Einheitswürfel zum Messen von Rauminhalten
    - Ausfüllen und ermitteln der Anzahl



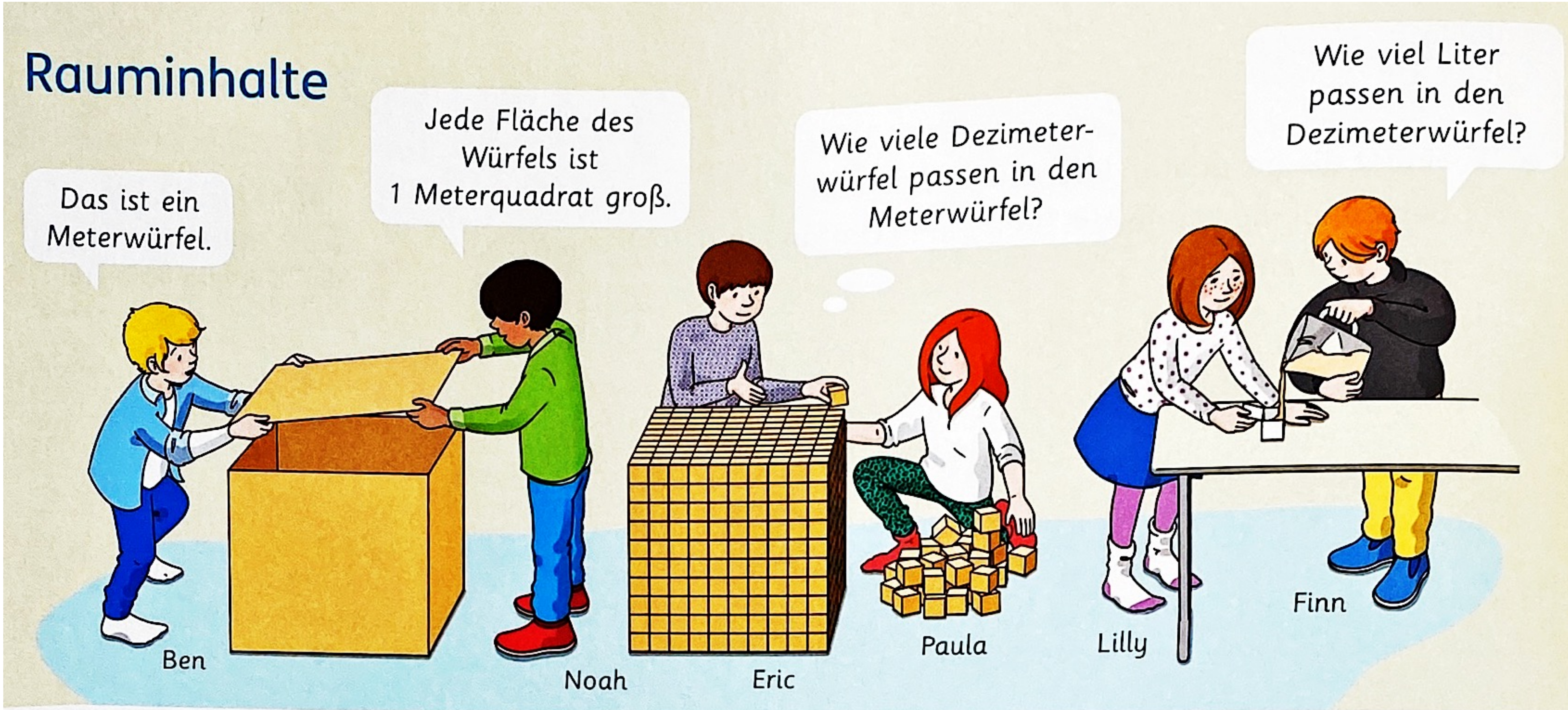


Abbildungsquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Somaw%C3%BCrfel

Der geometrische Körper muss beim Ausmessen mit den Einheitswürfeln lückenlos und überlappungsfrei ausgefüllt werden, um den Rauminhalt zu bestimmen.

Franke & Reinhold (2016), S. 321f

Volumen eines Würfels & eines Quaders

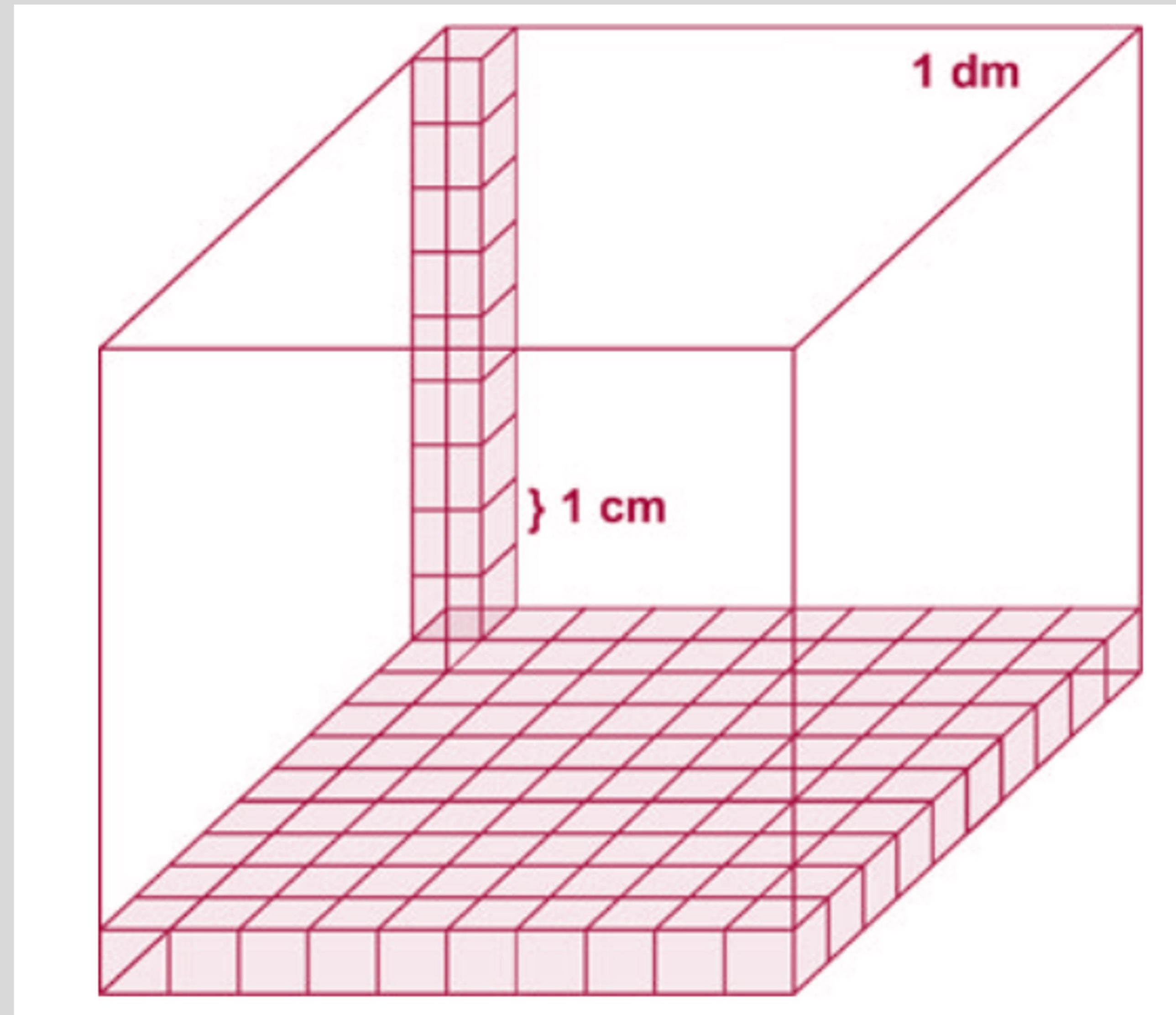


Zahlenbuch 4, 2019, S. 100

Volumen eines Würfels & eines Quaders

Das Volumen eines Würfels soll bestimmt werden

- die Anzahl der benötigten Einheitswürfel zum Auffüllen kann man bestimmen, indem man die Anzahl entlang der Kanten ermittelt und dann diese Anzahlen miteinander multipliziert
- Geht es mit einer gewählten Einheitswürfelgröße nicht auf, so füllt man mit den nächstkleineren Einheitswürfeln – der Zählprozess läuft dann mit diesen ab. → **messen**

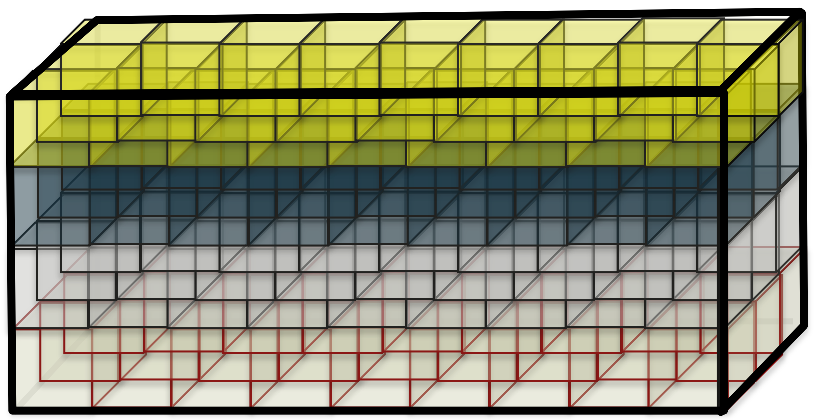


Helmerich & Lengnink (2016), S. 169f

Diese Methode ist besonders gut quaderförmiger Körper geeignet bzw. für solche, die evtl. durch Zerlegen und Neukonfigurieren Quaderstrukturen aufweisen, da dann das Auffüllen mit den Einheitswürfeln gut aufgeht – man muss nur beachten, dass ein Körper in der Regel nicht nur mit einer einzigen Messgröße von Einheitswürfeln aufgefüllt werden kann.

Volumen eines Quaders

Die Kernidee des **Auslegens** führt unmittelbar zur Volumenformel für den Quader:



$$\boxed{V(\text{Quader}) = a \cdot b \cdot c}$$

Äquivalent: $\boxed{V(\text{Quader}) = G \cdot h}$ (G Grundfläche, h Höhe)

Volumen anderer Körper

Problematik: Nicht alle Körper lassen sich mit Einheitswürfeln auslegen. Welche Alternativen gibt es?

- **Zerlegen** in bekannte Teilkörper
- **Ergänzen** mit und zu bekannten Körpern
- **Umformen** zu bekannten Körpern
- **Annäherung** mit bekannten Körpern und Grenzwertbetrachtung

(insbes. für krummlinig begrenzte Körper)

Prinzip der Zerlegungsgleichheit

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Definition: zerlegungsgleich

Zwei Körper im Raum heißen **zerlegungsgleich**, wenn sie sich in gleich viele paarweise kongruente Körper zerlegen lassen.

Herleitung des Volumens anderer Körper

Ihre Vermutung (<, >, =): V_1 V_2 O_1 O_2

Turm 1 Turm 2

Für die Überprüfung:

$V_{Münze} = 346{,}35\ mm^3$

$M = 85{,}25\ mm^2$

$G = 207{,}39\ mm^2$

Beim linken Turm sind durchschnittlich $\frac{7}{8}$ der Grundfläche durch die nächste Münze verdeckt.

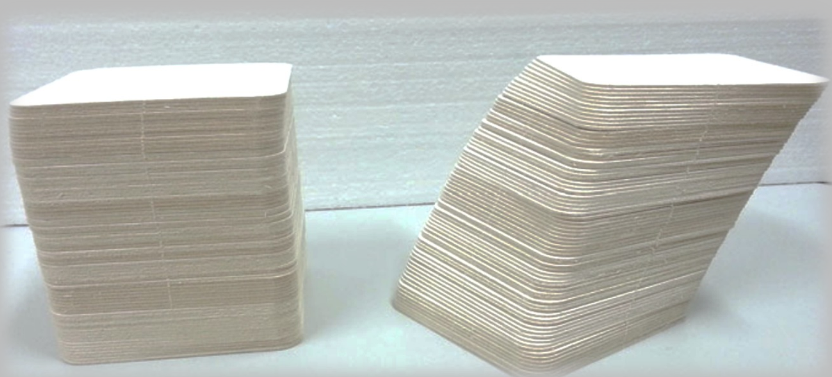
Herleitung des Volumens anderer Körper

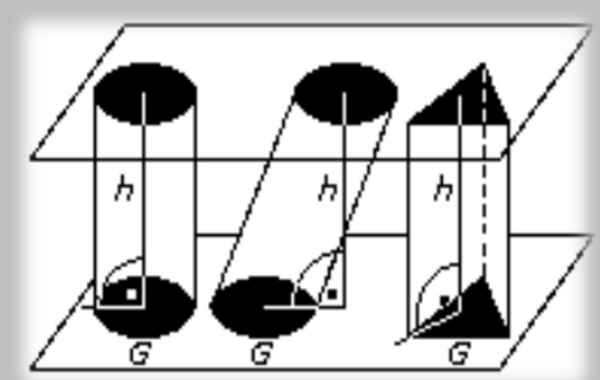
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

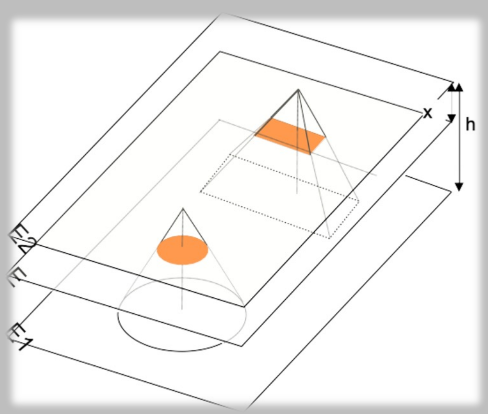
Satz: Prinzip von Cavalieri

Können zwei Körper so zwischen zwei parallele Ebenen gelegt werden, dass sie von jeder dazwischenliegenden Parallelebene **in Flächen mit gleichem Flächeninhalt** geschnitten werden, dann haben die beiden dasselbe Volumen.

Die Form der Grund- und Schnittflächen spielen keine Rolle, es kommt lediglich auf die **Flächeninhalte** an.



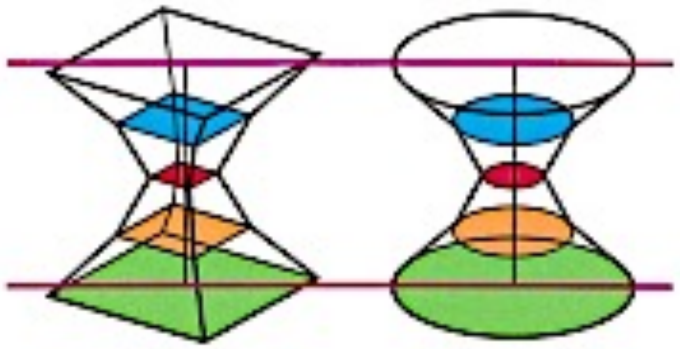




Helmerich & Lengnink (2016), S. 173

Prinzip von Cavalieri

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES



Volumen berechnen

Der italienische Mathematiker Bonaventura Cavalieri (etwa 1598 bis 1647) hat das folgende Prinzip entdeckt und bewiesen: Zwei Körper, die auf gleicher Höhe geschnitten immer die gleiche Fläche haben, besitzen gleiches Volumen. Mit dem Prinzip von Cavalieri lassen sich auch die Volumen von schiefen Prismen und schiefen Zylindern berechnen.

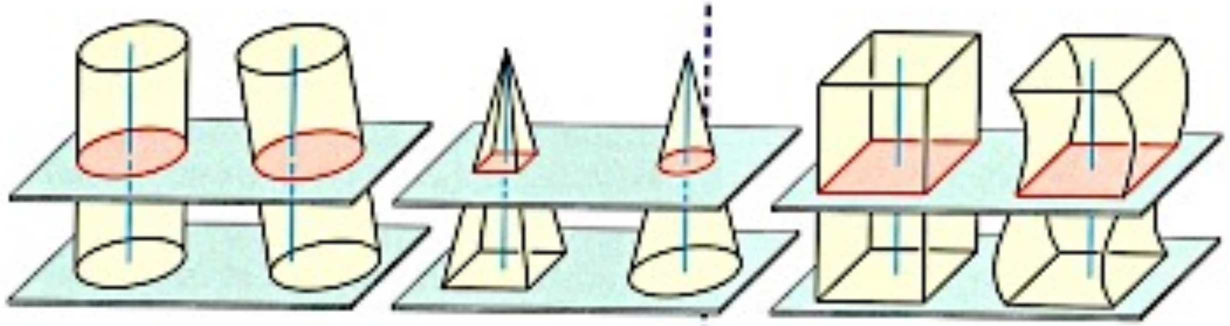
Das Mathematikbuch 8, S. 50f

Das Prinzip von Cavalieri

Das anschaulich einsichtige Prinzip des Aufbaus von Körpern aus dünnen Scheiben haben wir bereits bei der Volumenberechnung von schiefen Prismen und Zylindern angewandt. Der italienische Mathematiker CAVALIERI (1594–1647) hat dieses Prinzip allgemein formuliert, es wird noch heute nach seinem Namen benannt.

Wenn bei zwei Körpern die zur Grundfläche parallelen Querschnitte in gleichen Höhen gleichen Flächeninhalt haben, dann haben die Körper das gleiche Volumen.

Der exakte Beweis dieser Aussage erfordert Methoden der höheren Mathematik.

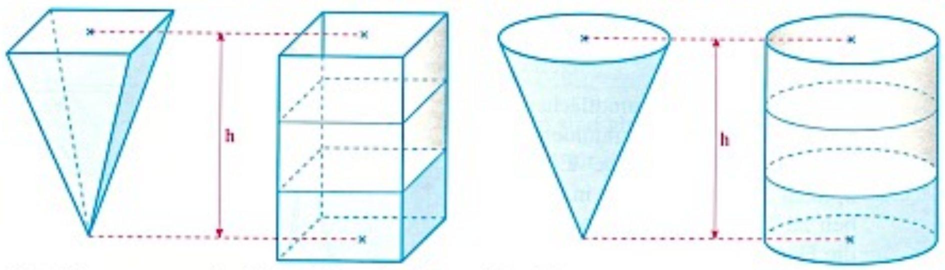


20 Begründe anhand eines Beispiels, dass das Prinzip von CAVALIERI nicht für den Oberflächeninhalt entsprechender Körper gilt.

Neue Wege 9, S. 217

Prinzip von Cavalieri

Volumen der Pyramide und des Kegels

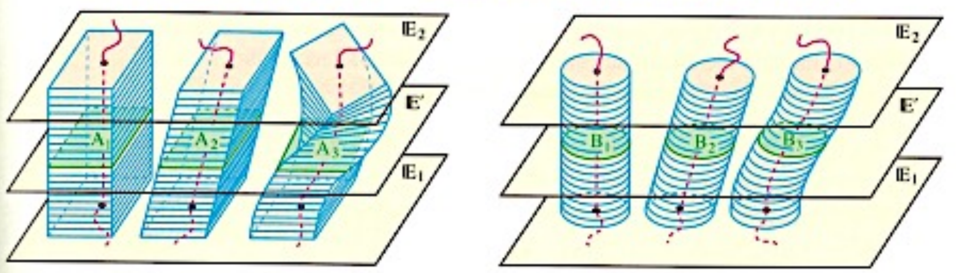


Das Wasser aus der Pyramide mit der Grundflächengröße G und der Körperhöhe h ist in den Quader mit gleich großer Grundfläche und derselben Höhe gegossen worden. Aufgrund des Umfüllversuches vermuten wir: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Quader}$

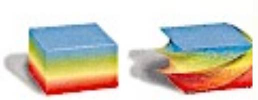
Das Wasser aus dem Kegel mit der Grundflächengröße G und der Körperhöhe h ist in den Zylinder mit gleich großer Grundfläche und derselben Höhe gegossen worden. Aufgrund des Umfüllversuches vermuten wir: $V_{Kegel} = \frac{1}{3} V_{Zylinder}$

Wir wollen versuchen diese Formeln durch Überlegung zu begründen.

Satz des Cavalieri – Volumengleiche Pyramiden



Information



Wir fassen einen Stoß aufgeschichteter Spielkarten bzw. runder Bierdeckel als Modell eines *geraden* Prismas bzw. eines *geraden* Zylinders auf. Die Modelle werden durchbohrt und auf eine Schnur aufgezogen. Nun kann man aus ihnen verschiedene Körper erzeugen, insbesondere *schiefe* Prismen bzw. *schiefe* Zylinder. Der Anschauung entnehmen wir:

(1) Die erzeugten schiefen Körper haben dasselbe Volumen wie die geraden Ausgangskörper.

(2) Liegt eine Grundfläche eines aus dem Modellen erzeugten Körpers in der Ebene $\mathbb{E}_1$, so liegt die andere Grundfläche in einer zu $\mathbb{E}_1$ parallelen Ebene $\mathbb{E}_2$.

(3) Schneidet man alle aus demselben Modell entstandenen Körper durch eine Ebene $\mathbb{E}'$, die zu $\mathbb{E}_1$ parallel ist, so haben die entstehenden Schnittflächen A_1, A_2, A_3 alle den gleichen Flächeninhalt; flächeninhaltsgleich sind auch die Schnittflächen B_1, B_2, B_3.

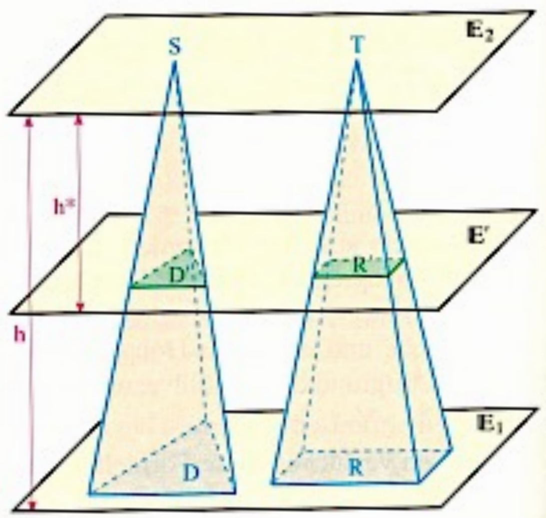
Diesen Sachverhalt hat Bonaventura CAVALIERI (italienischer Mathematiker 1598 – 1647) als grundlegenden Satz formuliert, den wir für die Volumenberechnung benutzen.

> **Satz des Cavalieri:** Liegen zwei Körper zwischen zueinander parallelen Ebenen $\mathbb{E}_1$ und $\mathbb{E}_2$ und werden sie von jeder zu $\mathbb{E}_1$ parallelen Ebene $\mathbb{E}'$ so geschnitten, dass gleich große Schnittflächen entstehen, so haben die Körper das gleiche Volumen.

Aufgabe

1. Begründe mithilfe des Satzes von Cavalieri:
Zwei Pyramiden mit gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche sind volumengleich.

Lösung



(1) Die gleich großen Grundflächen D und R der beiden Pyramiden liegen in derselben Ebene $\mathbb{E}_1$. Die Spitzen S bzw. T liegen in derselben zu $\mathbb{E}_1$ parallelen Ebene $\mathbb{E}_2$, da die Höhen übereinstimmen.

(2) Eine zu $\mathbb{E}_1$ parallele Ebene $\mathbb{E}'$ schneidet die Pyramiden in den Flächen D' bzw. R'.
Der Abstand von $\mathbb{E}'$ zu $\mathbb{E}_2$ sei h^*.

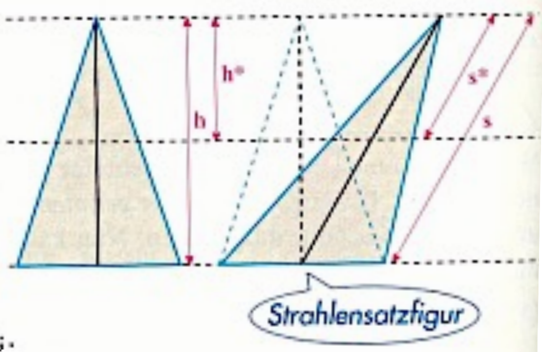
(3) Die Dreiecke D und D' sind ähnlich zueinander, ebenso die Rechtecke R und R'. Für beide gilt der Ähnlichkeitsfaktor $k = \frac{h^*}{h}$.

(4) Für die Flächeninhalte der ähnlichen Dreiecke D und D' sowie der ähnlichen Rechtecke R und R' mit dem Ähnlichkeitsfaktor k gilt dann:
$A_{D'} = k^2 A_D$ und $A_{R'} = k^2 A_R$

(5) Da nach Voraussetzung $A_D = A_R$ ist, gilt auch $A_{D'} = A_{R'}$.
Damit sind die Bedingungen des Satzes von Cavalieri erfüllt.
Also sind die Pyramiden volumengleich.

Information

Die Begründung gilt auch für schiefe Pyramiden, denn es gilt:
$k = \frac{s^*}{s} = \frac{h^*}{h}$ (siehe Strahlensatzfigur)



Mathematik heute 10 (Realschule), S. 101f

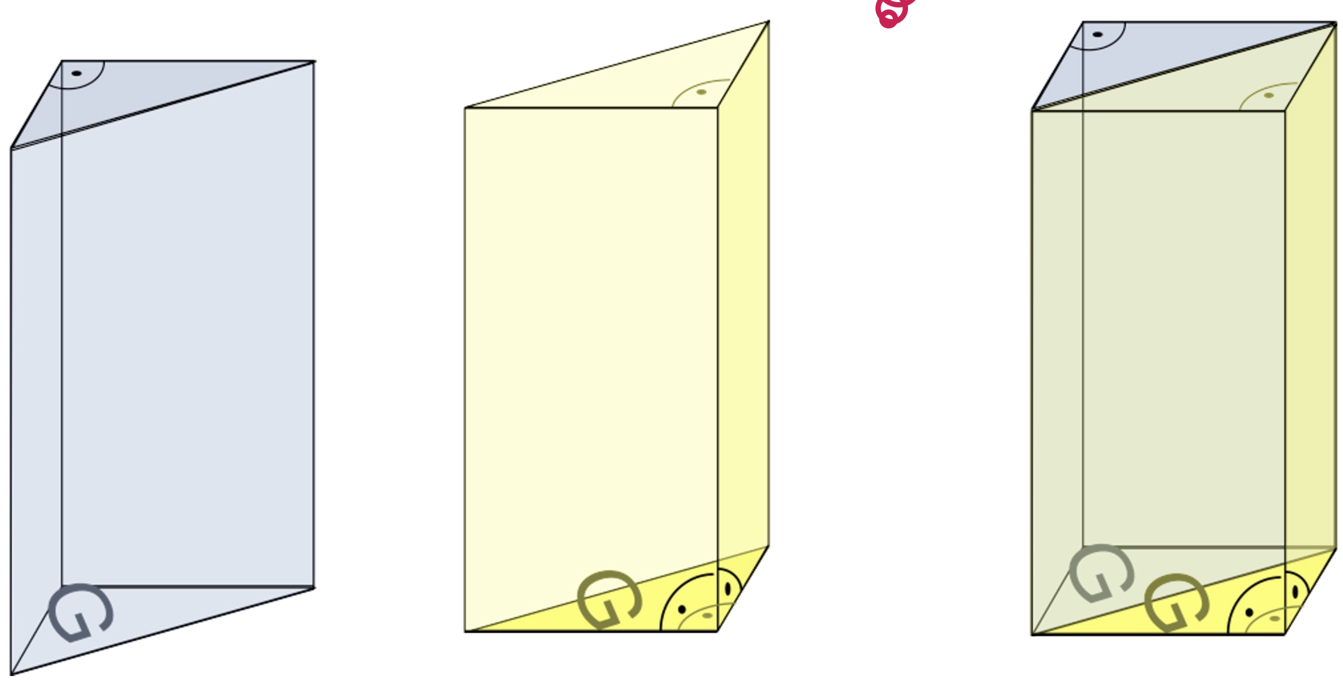
Herleitung des Volumens anderer Körper

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Zerlegung in bekannte Teilkörper oder die Ergänzung zu bekannten umschließenden Körpern

Gerades rechtwinkliges Dreiecksprisma

Wir **ergänzen** das Prisma durch ein dazu kongruentes zu einem Quader.



V(Quader) = 2G • h,
also

$\boxed{V(\text{Prisma}) = G \cdot h}$

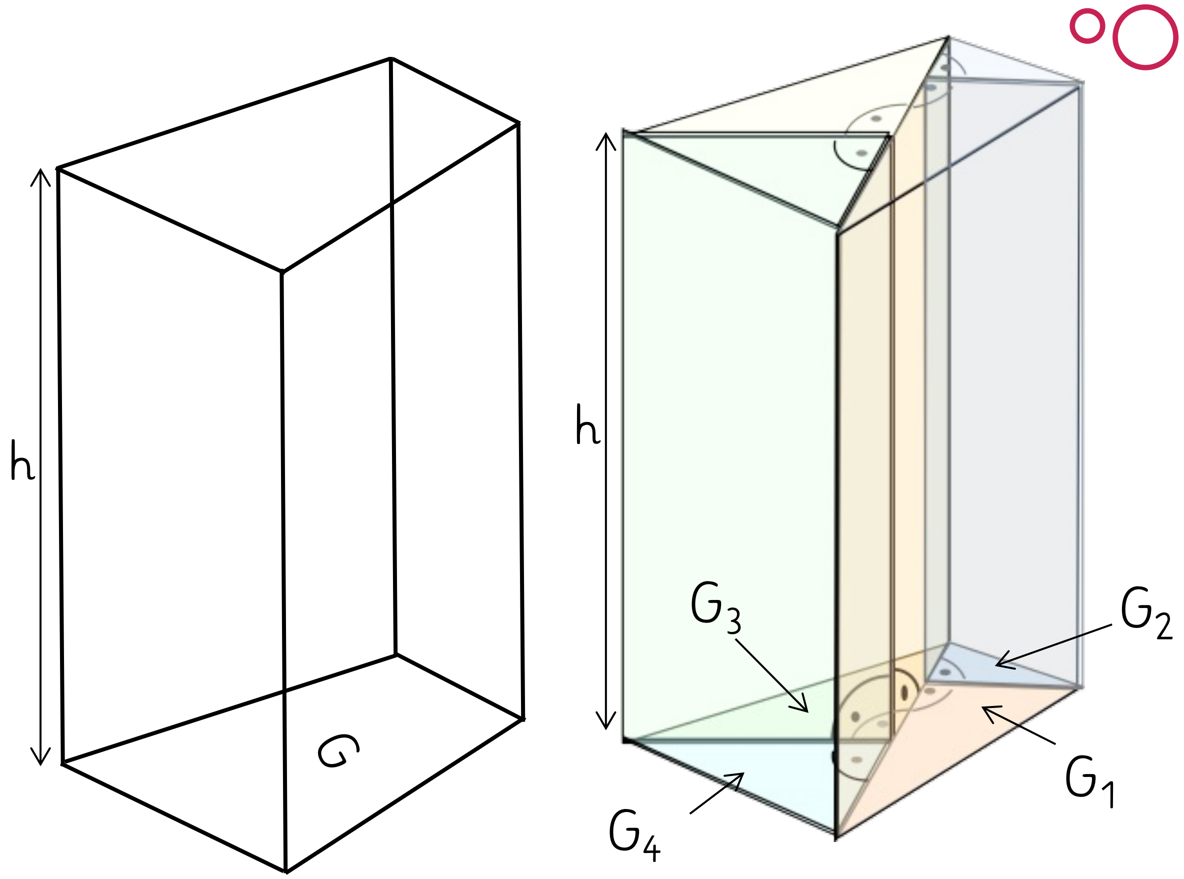
Herleitung des Volumens anderer Körper

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Zerlegung in bekannte Teilkörper oder die Ergänzung zu bekannten umschließenden Körpern

Verallgemeinerung: Beliebiges gerades Prisma

Möglichkeit 1



G wird in **rechtwinklige Dreiecke zerlegt** (dies ist immer möglich!), die das Prisma in senkrechte rechtwinklige Dreiecksprismen mit Grundflächen G_1, G_2, …, G_n aufteilen .

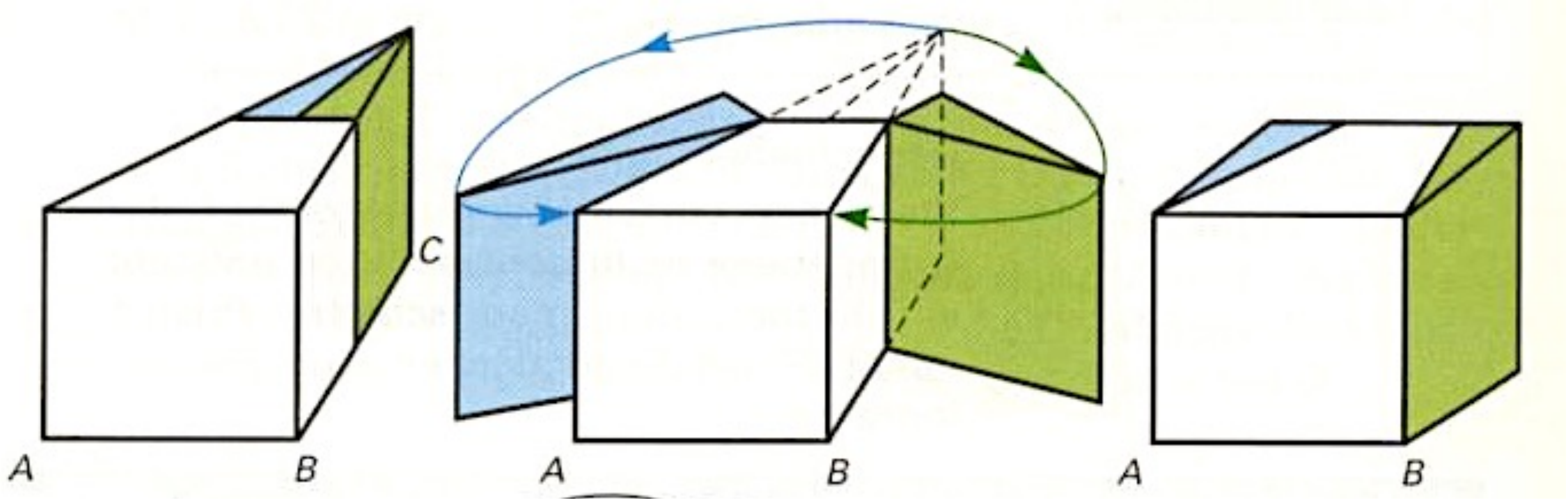
$$\begin{aligned} V(\text{Prisma}) &= G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + G_3 \cdot h + \ldots + G_n \cdot h \\ &= (G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n) \cdot h \\ &= G \cdot h \end{aligned}$$

Herleitung des Volumens anderer Körper

Zerlegung in bekannte Teilkörper oder die Ergänzung zu bekannten umschließenden Körpern

Verallgemeinerung: Beliebiges gerades Prisma

Möglichkeit 2

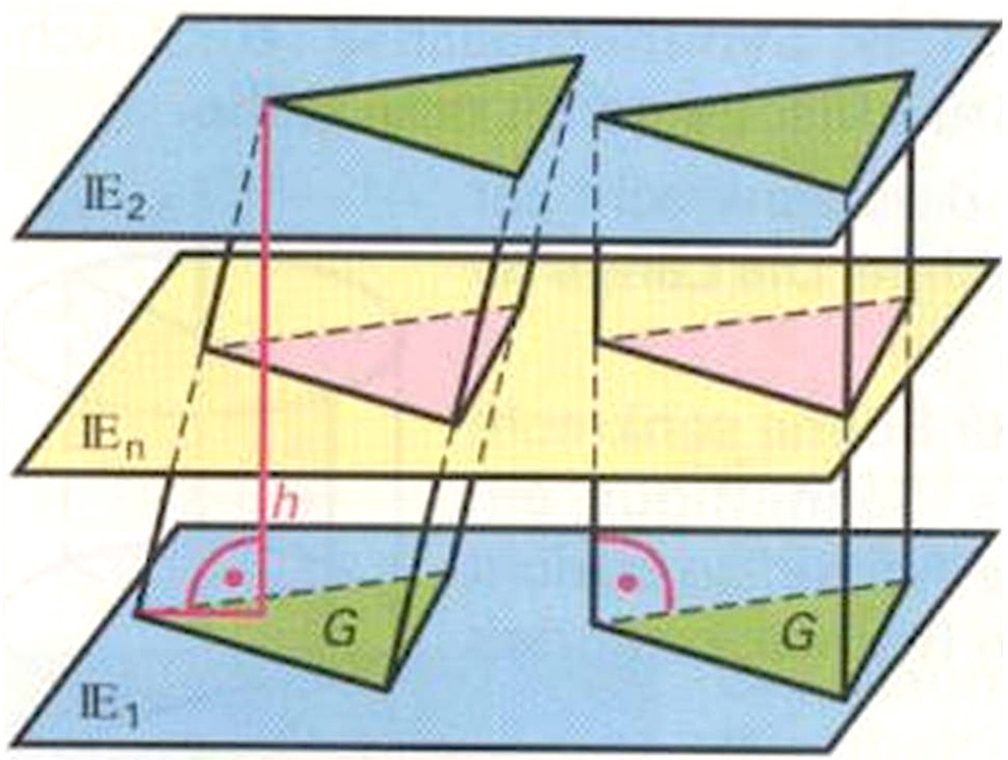


Dreiecksprisma mit beliebigem Dreieck als Grundfläche ist **zerlegungsgleich zu Quader mit flächeninhaltsgleicher Grundfläche**. Diese Methode lässt sich verallgemeinern auf gerades Prisma mit n-eckiger Grundfläche, da sich die Grundfläche in Dreiecke zerlegen lässt.

Herleitung des Volumens anderer Körper

Zerlegung in bekannte Teilkörper oder die Ergänzung zu bekannten umschließenden Körpern

Verallgemeinerung auf schiefe Prismen



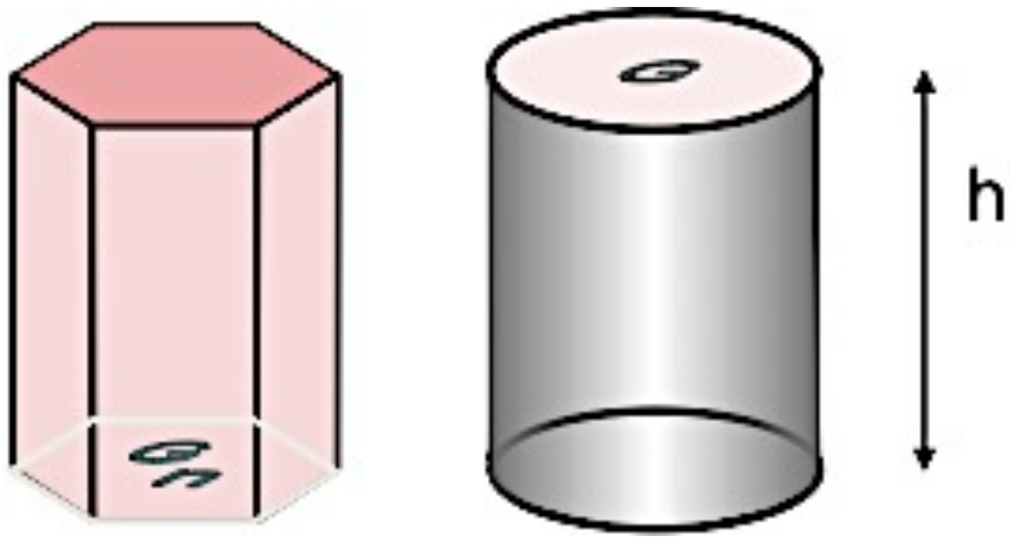
Prinzip von Cavalieri ist anwendbar, da gerade und schiefe Prismen mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe in jeder Höhe flächengleiche Schnittebenen haben (vgl. „dynamische Definition“ von Prismen).
Auf diese Weise könnte man das Volumen des Prismas auch direkt durch Vergleich mit einem Quader mit gleicher Grundfläche und Höhe herleiten.

Herleitung des Volumens anderer Körper

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Zylinder

Ein Zylinder mit einem Kreis als Grundfläche G und der Höhe h kann von innen und außen durch **Prismen** beliebig genau **angenähert** werden.



$$\begin{aligned} V(\text{Zylinder}) &= \text{Grenzwert von } V(\text{n-Ecks-Prisma}) \\ &= \text{Grenzwert von } G_n \cdot h \\ &= G \cdot h \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V(\text{Zylinder}) &= G \cdot h \\ &= r^2 \pi h \end{aligned}}$$

(r Grundkreisradius)

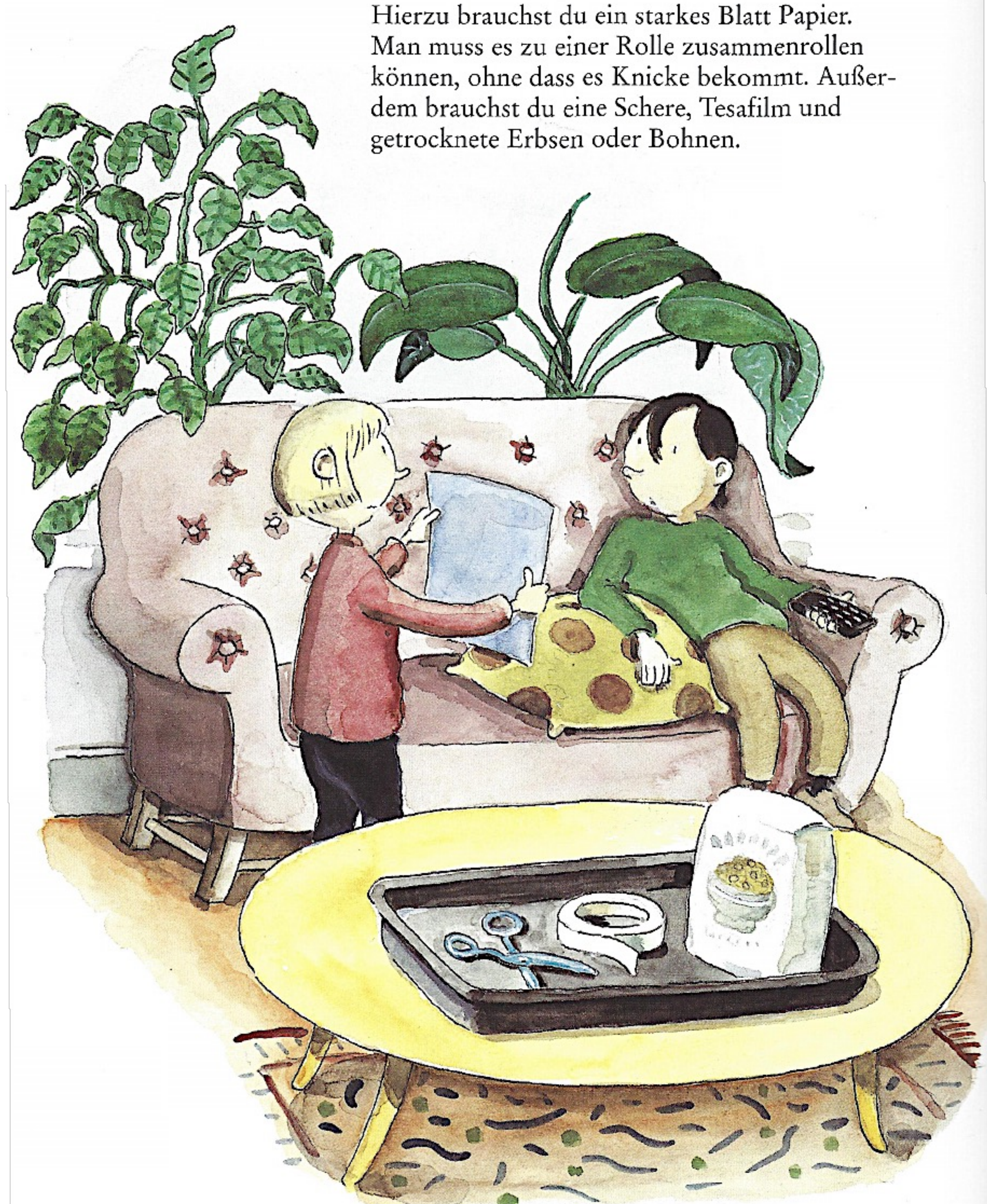
Alternative: Vergleich mit Quader, dessen Grundfläche die Maße r und rπ hat, und Anwendung des **Prinzips von Cavalieri**.

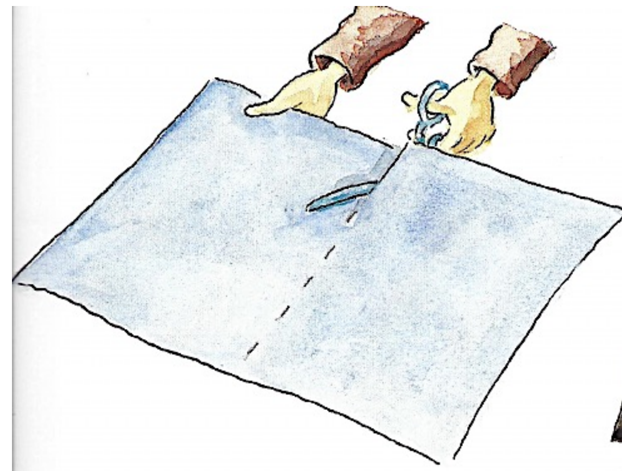
Erbsen in der Rolle

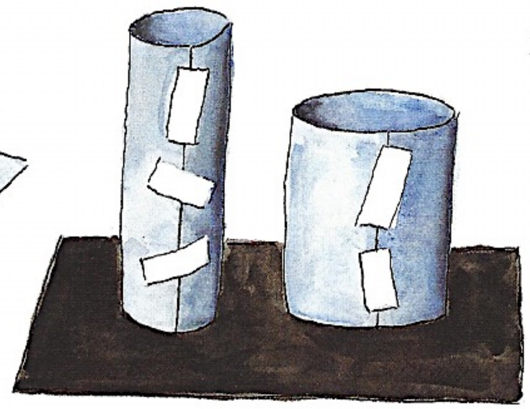
30

Erbsen in der Rolle

Hierzu brauchst du ein starkes Blatt Papier. Man muss es zu einer Rolle zusammenrollen können, ohne dass es Knicke bekommt. Außerdem brauchst du eine Schere, Tesafilm und getrocknete Erbsen oder Bohnen.







31

Schneide das Papier in der Mitte durch. Achte darauf, dass du es genau in der Mitte durchschneidest.
Die zwei Teile sind genau gleich groß, oder? Sie haben also eine gleich große Oberfläche.

Bastel jetzt aus den beiden Papierstücken zwei Rollen. Die eine rollst du von der langen Seite auf, die andere von der kurzen Seite. Kleb die Enden mit Klebestreifen zusammen.

Übung 12

Passen in die eine Rolle genauso viele Erbsen wie in die andere? Ist das Volumen der beiden Rollen gleich groß?

Was glaubst du?
Probier es mal aus, dann weißt du's.

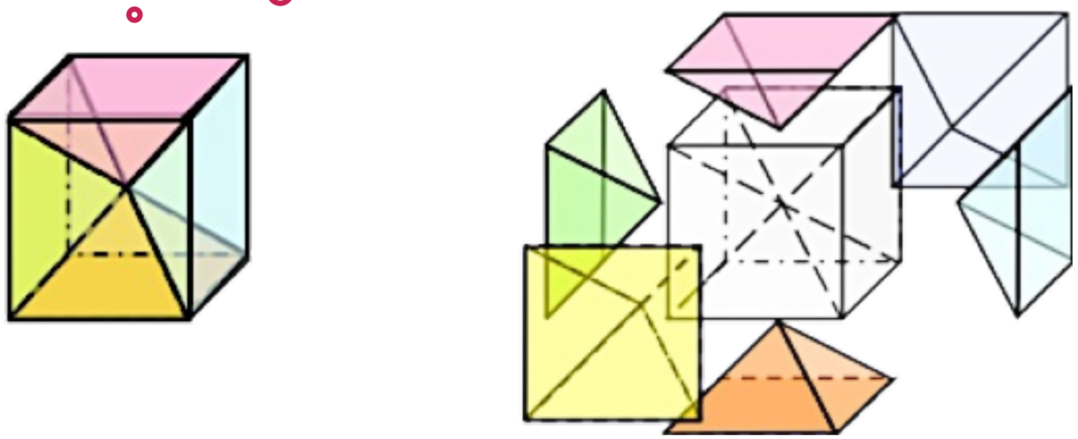
Dahl & Lepp (2000), S. 30f

Herleitung des Volumens anderer Körper

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

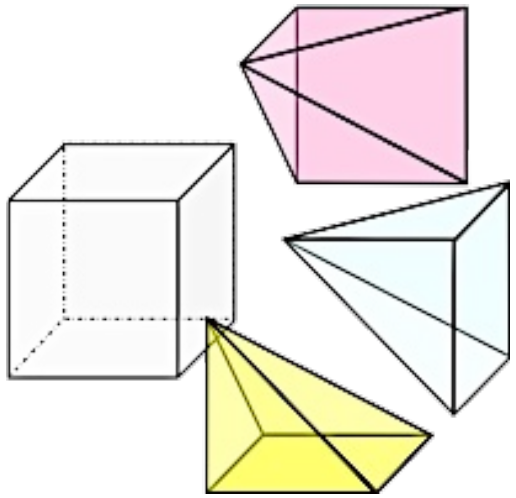
Pyramide

Verbinde alle Eckpunkte eines Würfels mit dem **Würfelmittelpunkt**.



$$V_{Pyramide} = \frac{1}{6} V_{Würfel}$$
$$= \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2}$$
$$= \frac{1}{3} G \cdot h$$

Alternative: Zerlegung in drei Pyramiden.



$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Würfel} = \frac{1}{3} a^2 \cdot a$$
$$= \frac{1}{3} G \cdot h$$

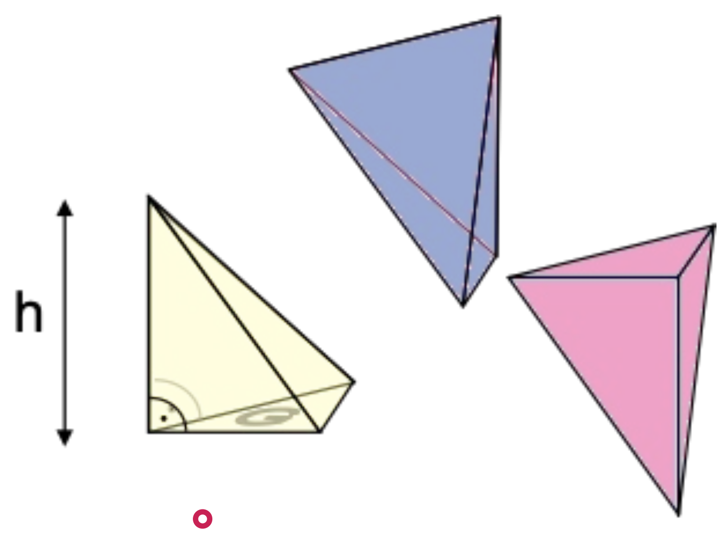
Warum sind das keine Beweise für die Volumenformel der allgemeinen Pyramide?

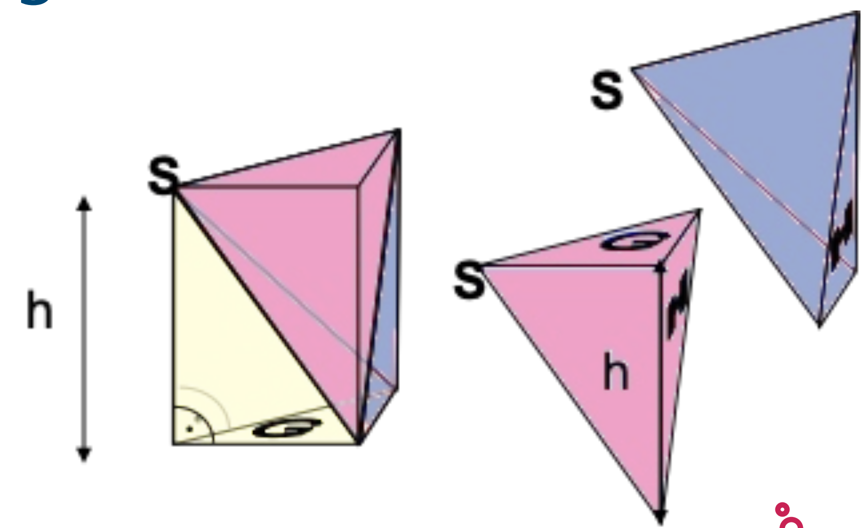
Herleitung des Volumens anderer Körper

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Spezielle Dreieckspyramide

Gegeben ist eine Pyramide, bei der die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche G liegt.





Wir Ergänzen diese Pyramide durch zwei weitere Pyramiden, sodass ein senkrechtes Dreiecksprisma entsteht.

Dieses Verfahren lässt sich auch auf allgemeine Dreieckspyramiden anwenden!

Damit folgt: $V(Pyramide) = \frac{1}{3}\, V(Prisma)$

Und damit:

$$\boxed{V(Pyramide) = \frac{1}{3}\, G \cdot h}$$

Herleitung des Volumens anderer Körper

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Pyramide

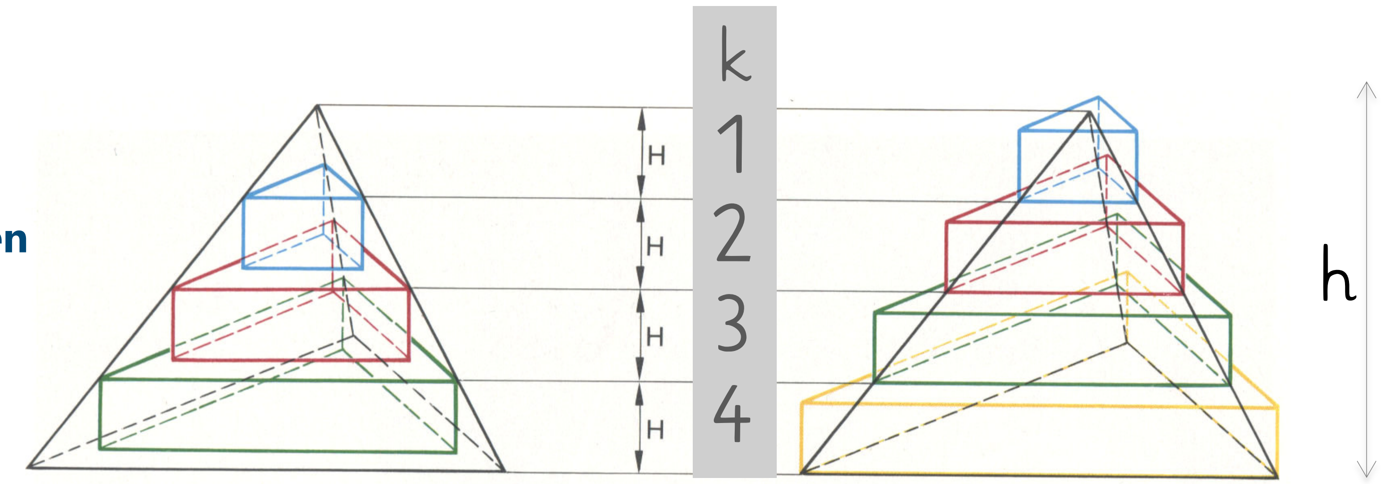
Annäherung durch Treppenkörper

Wir gehen aus von einer Dreieckspyramide mit Grundfläche *G* und Höhe *h*. Wir teilen die Höhe in n gleiche Teile und betrachten einen einbeschriebenen und einen umbeschriebenen Treppenkörper.

Diese bestehen aus Prismen der Höhe H = $\frac{h}{n}$.

Dann ist V(innen)< V(Pyramide) < V(außen).

Für das *k*-te Prisma (k = 1, 2, …, n) im **äußeren Treppenkörper** (innerer analog) gilt für die Grundfläche (nach Strahlensatz): $G_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot G$
und damit für sein Volumen



$$V_k = G_k \cdot \frac{h}{n} = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot k^2$$

Damit gilt:
$$V_{außen} = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot 1^2 + \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot 2^2 + \ldots + \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot n^2 = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

Für die Summe der ersten n Quadratzahlen kann man zeigen: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Damit folgt: $V_{außen} = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = G \cdot h \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$

Wegen $lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}$ folgt die bekannte Formel.

Rauminhalte & Oberflächen

Sekundarstufe I

„berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern“

Bildungsstandards Mittlerer Schulabschluss, S. 10

- unser Beispiel: Die Pyramide

Rauminhalte & Oberflächen

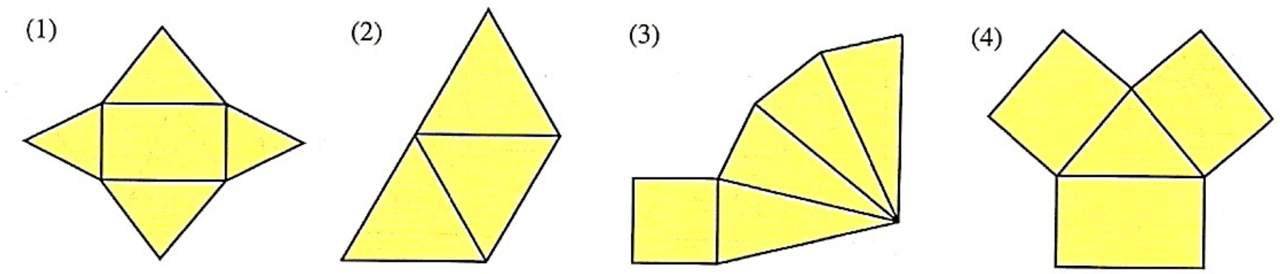
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Sekundarstufe I

- Begriffe: Grundfläche, Mantelfläche, Höhe
- Pyramidennetze
- Sachaufgaben
- Modellierungen

Nicht nur stures Einsetzen in Formeln…

8. Welche Figur ist kein Pyramidennetz? Begründe.



12.

Das pyramidenförmige Dach eines Pavillons mit sechseckiger regelmäßiger Grundfläche soll mit Kupferblech gedeckt werden. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 3,50 m; das Dach ist 1,90 m hoch.

a) Wie groß ist die Dachfläche?

b) Von einer Firma wird die Arbeit für 105 € pro m^2 übernommen. Wie teuer sind die Dacharbeiten?

Pyramide

9. Die größte Pyramide ist die um 2600 v. Chr. erbaute Cheops-Pyramide. Sie war ursprünglich 146 m hoch, die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche betrug ca. 233 m.

a) Berechne die ursprüngliche Größe der Grundfläche. Verwandle in ha.

b) Berechne das ursprüngliche Volumen der Cheops-Pyramide.

c) Heute beträgt die Länge der Grundseite nur noch ungefähr 227 m, die Höhe nur ungefähr 137 m. Wie viel m^3 Stein sind inzwischen verwittert? Gib diesen Anteil auch in Prozent an.

Mathematik heute 10 (Realschule), S. 102f

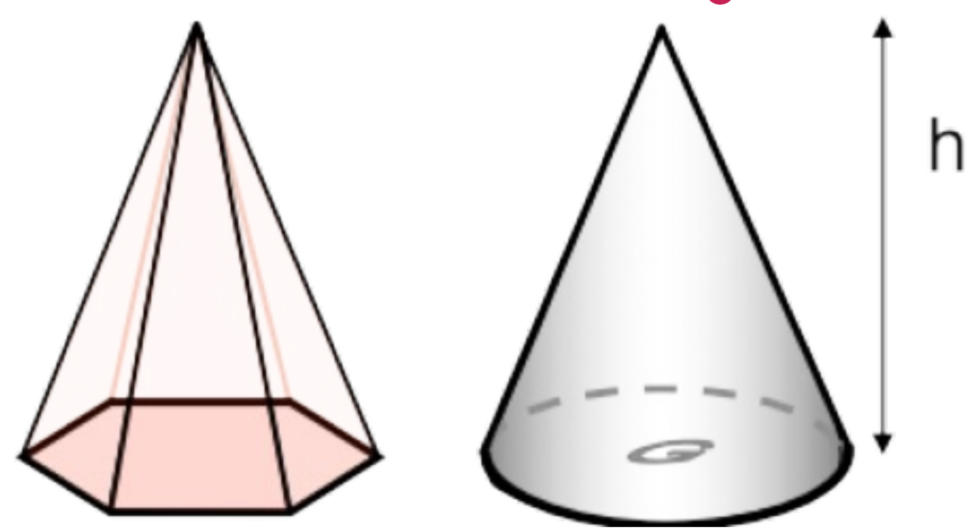
Herleitung des Volumens anderer Körper

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Ein Kegel mit einem Kreis als Grundfläche G und der Höhe h kann von innen und außen durch Pyramiden beliebig genau angenähert werden.

Kegel

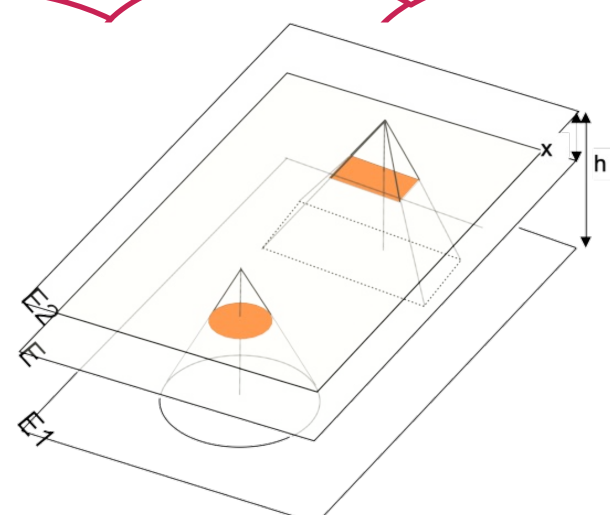
Annäherung durch Pyramiden



Also: $V(Kegel) = Grenzwert\ von\ V\ (n - Ecks - Pyramide) = Gernzwert\ von\ \frac{1}{3}\, G_n \cdot h$

$$\boxed{V(Kegel) = \frac{1}{3} G \cdot h}$$

Alternative:
Anwendung des Prinzips von Cavalieri.



Herleitung des Volumens anderer Körper

Kegel

Anwendung des Prinzips von Cavalieri

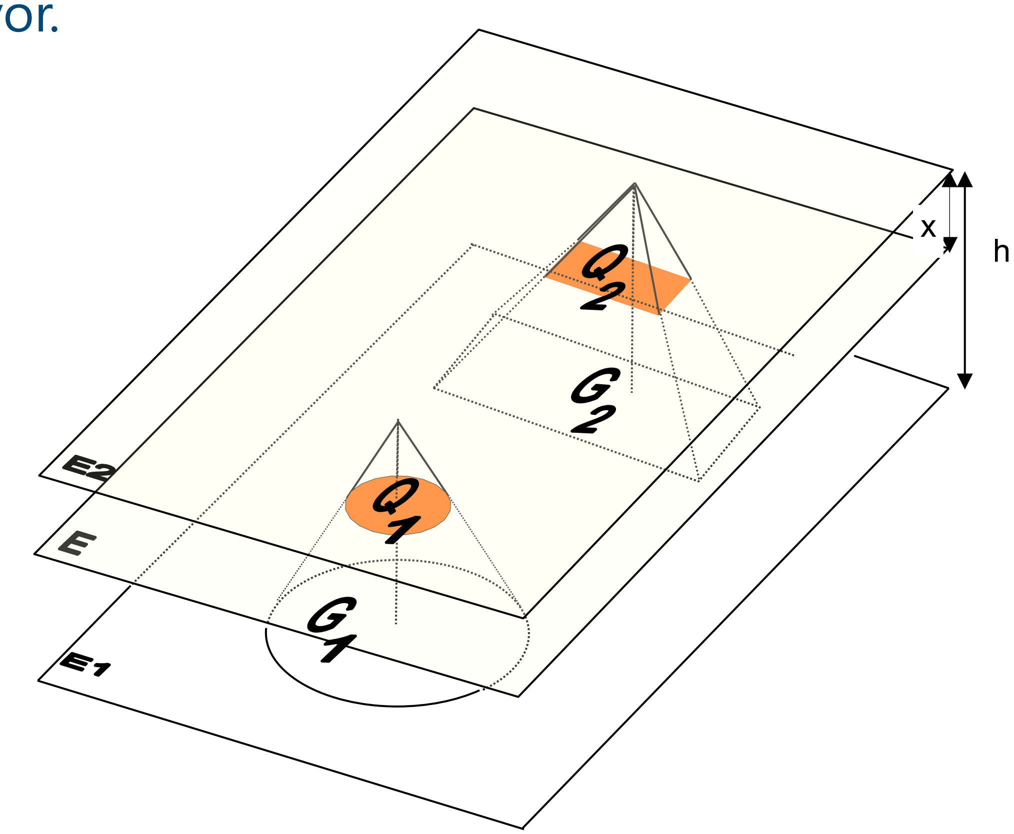
Wir betrachten einen Kegel und eine Pyramide mit gleicher Höhe und flächengleicher Grundfläche. Die Schnittflächen Q_1 und Q_2 gehen durch zentrische Streckung aus den flächeninhaltsgleichen Grundflächen G_1 und G_2 hervor.

Der Streckfaktor ist jeweils $\frac{x}{h}$.

Damit ist $Q_1 = \left(\frac{x}{h}\right)^2 G_1$ und $Q_2 = \left(\frac{x}{h}\right)^2 G_2$

Q_1 und Q_2 haben also gleichen Flächeninhalt.

Nach Cavalieri folgt die Gleichheit der Volumina.

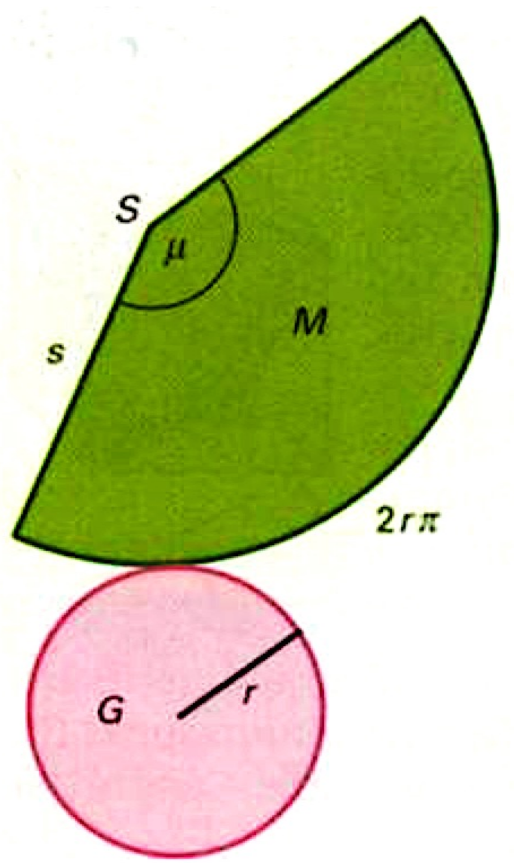


Oberflächeninhalt

Kegel

Die Oberfläche setzt sich zusammen aus

- Kreis mit Radius r
- Kreissektor mit Radius $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ (h Kegelhöhe)



Netz des Kegels

Die Mantelfläche kann als Kreissektor mit dem Maß μ des Mittelpunktswinkels, dem Radius s (Mantellinie) und der Bogenlänge $b = 2r\pi$ in die Ebene abgewickelt werden.

Für die Bogenlänge b des Kreissektors mit dem Radius s gilt:

$$b = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 2s\pi \iff 2r\pi = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 2s\pi \iff \frac{\mu}{360^\circ} = \frac{2r\pi}{2s\pi} \iff \mu = \frac{r}{s} \cdot 360^\circ$$

Mittelpunktswinkel des abgewickelten Kegelmantels: $\mu = \frac{r}{s} \cdot 360^\circ$

Für den Inhalt eines Kreissektors mit dem Radius s und dem Bogen b gilt:

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot s \iff A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot s \iff A_{\text{Sektor}} = r\pi s$$

Dieser Kreissektor ist flächengleich mit dem Mantel des Kegels.

Inhalt der Mantelfläche des Kegels: $M = r\pi s$

Die Oberfläche des geraden Kegels setzt sich zusammen aus der Grundfläche und der Mantelfläche.

$$O = A_G + M \iff O = r^2\pi + r\pi s \iff O = r\pi\,(r + s)$$

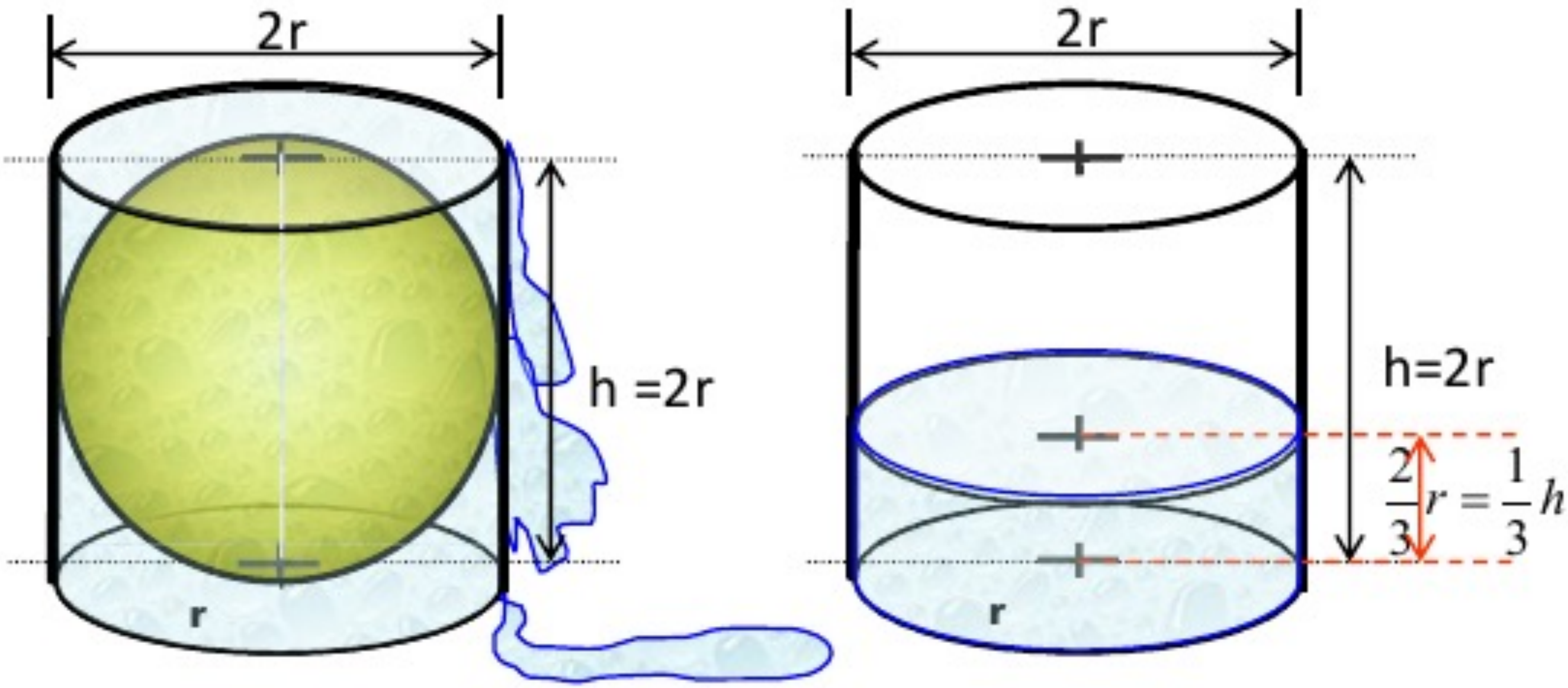
Inhalt der Oberfläche des Kegels: $O = r\pi\,(r + s)$

Herleitung des Volumens anderer Körper

Universität des Saarlandes

Kugel

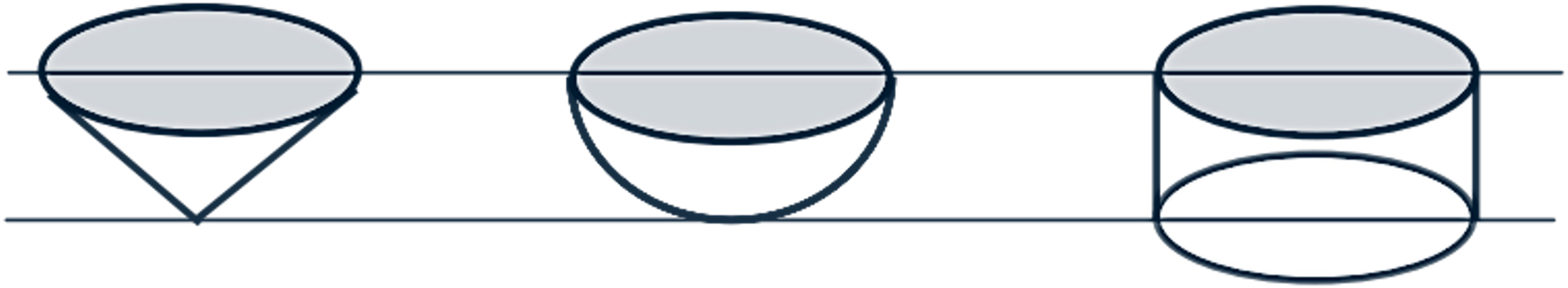
Eine Kugel wird in einen geeigneten mit Wasser gefüllten Zylinder eingetaucht (h=2r).



Das lässt vermuten: $V(Kugel) = V\left(\frac{2}{3}(V(Zylinder)\right) = \frac{2}{3}r^2\pi \cdot 2r = \frac{4}{3}\pi r^3$

Herleitung des Volumens anderer Körper

Kugel

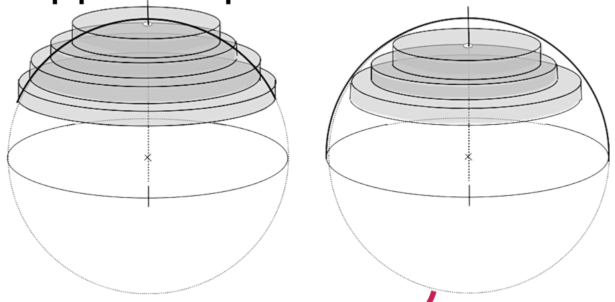


Kegelvolumen	:	Halbkugelvolumen	:	Zylindervolumen
1	:	2	:	3

Krauter & Bescherer (2012), S. 139

Herleitung des Volumens anderer Körper

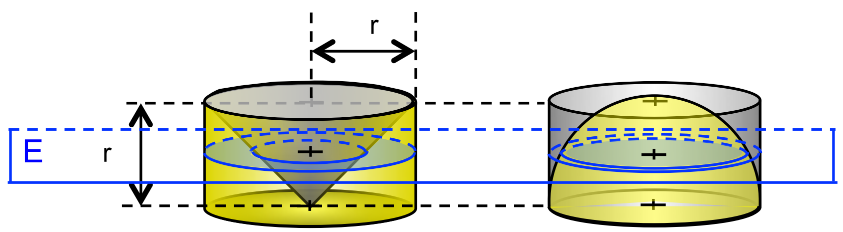
Alternative: Annäherung durch Treppenkörper
Ähnlich wie bei der Pyramide können wir auch bei der Kugel einbeschriebene und umbeschriebene Treppenkörper betrachten.

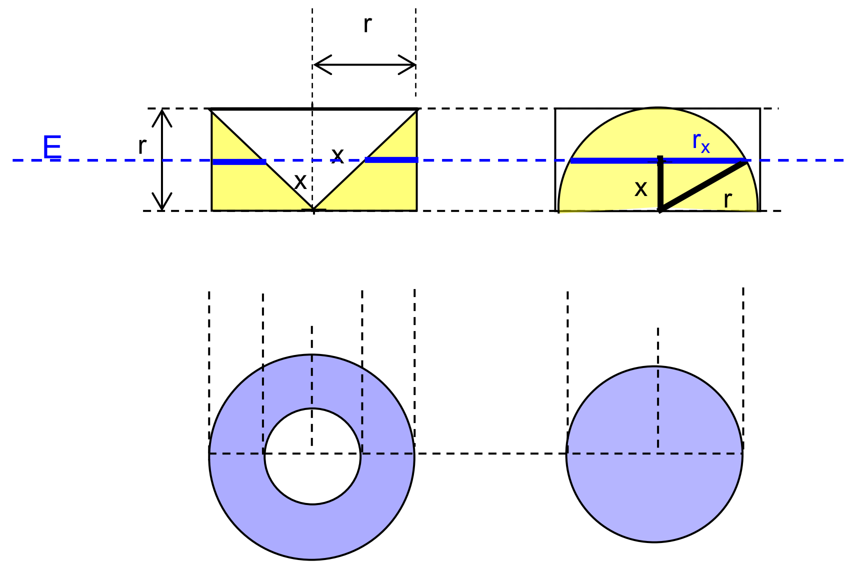


Kugel

Prinzip von Cavalieri

Wir vergleichen das Volumen einer Halbkugel mit dem Volumen des Restkörpers aus einem Zylinder mit Radius und Höhe r, aus dem ein Kegel mit der Höhe und dem Radius r entfernt wurde.





Für die Schnittflächen auf der Höhe x gilt:

$$A_{Halbkugel} = r_x^2\pi = (r^2 - x^2)\pi \text{ (Pythagoras)}$$

$$A_{Vergleichskörper} = r^2\pi - x^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri folgt

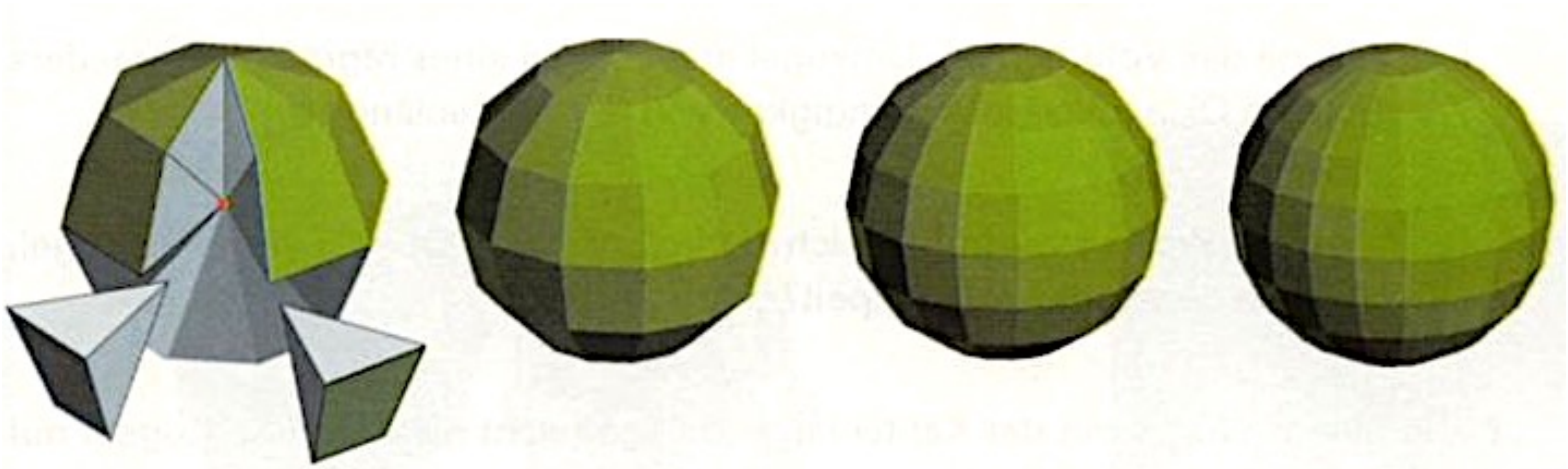
$$V_{Kugel} = 2 \cdot (V_{Zylinder} - V_{Kegel}) = 2 \cdot \left(r^2\pi r - \frac{1}{3}r^2\pi r\right) = \frac{4}{3}r^3\pi$$

$$\boxed{V(Kugel) = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Oberflächeninhalt

Kugel

Wir stellen uns die Kugel in n kleine Kugelsektoren zerteilt vor, die alle Pyramiden sind. Dann ergibt sich das Kugelvolumen für $n \to \infty$ als Summe der Pyramidenvolumina (deren Höhen dann jeweils r entspricht).



$$V(Kugel) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3} G_i \cdot r\right) = \frac{1}{3} r \cdot \sum_{i=1}^{n} G_i = \frac{1}{3} r \cdot O(Kugel)$$

$$\Longrightarrow O(Kugel) = \frac{3}{r} \cdot V(Kugel) = \frac{3}{r} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^2$$

Fußball und Erde

Lösen Sie die Aufgabe.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wenn man eine Schnur mit der Umkreislänge eines Fußballs um 1 m verlängert und wieder um den Fußball legt, hat diese überall den Abstand 15,9 cm vom Fußball.

Wie viel beträgt der Abstand, wenn man eine Schnur um den Äquator der Erde um 1 m verlängert?

Zusammenschau

Vergleichen

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

eine sprachliche Zusammenschau des Begriffs Vergleichen

Größenbereich	Repräsentanten	Bezeichnungen/Einheiten	Äquivalenzrelation	Ordnungsrelation
Längen	Ketten, Stäbe, Strecken, (Straßen, Eisenbahnschienen)	lang, kurz, dick, dünn, ... (qualitativ) 1 km, 1 m, (1 dm), 1 cm, 1 mm	deckungsgleich ... hat die gleiche Länge wie ... ... ist ebenso lang wie ...	... ist kürzer als ... ... ist länger als ...
Flächeninhalte	Spielfelder, Platten, Legeplättchen, Einheitsplättchen, Blattgröße (A4)	groß, klein (qualitativ) (km^2, ha, a, m^2, cm^2, mm^2)	zerlegungsgleich ... hat genauso viel Fläche wie ...	... hat weniger Fläche als ... ... hat mehr Fläche als ...
Rauminhalte, Hohlmaße (Volumina)	Töpfe, Flaschen, Eimer, Kannen	viel, wenig, voll, leer (qualitativ) 1 l (hl, ml) (m^3, cm^3)	inhaltsgleich ... hat genauso viel Inhalt wie ...	... hat weniger Inhalt als ... ... hat mehr Inhalt als ...

Franke & Ruwisch (2010), S. 181

Literatur

Dahl, K & Lepp, M (2000). Wollen wir Mathe spielen? Hamburg: Verlag Friedrich Oetinger.

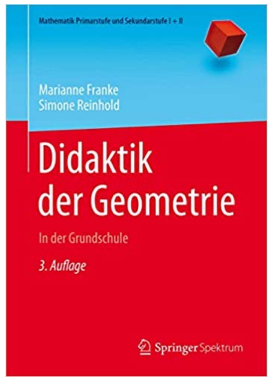
Franke, M., & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Springer-Verlag.

Hessisches Kultusministerium (HKM) (2005). Zentrale Lernstandserhebungen.

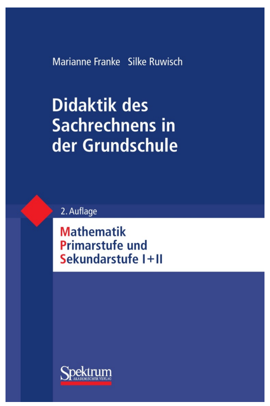
Weigand, H. G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., ... & Wittmann, G. (2014). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Springer Berlin Heidelberg.

Zum Nach- und Weiterlesen

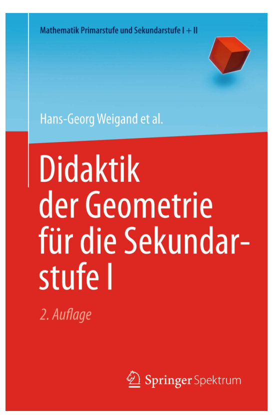


Didaktischer Hintergrund (Primarstufe):

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule.* Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag. **Kapitel 10 „Messen geometrischer Objekte“**



Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule.* Springer-Verlag. (https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-8274-2695-6.pdf). **Kapitel 6 „Größen und Messen“**



Didaktischer Hintergrund (Sekundarstufe):

Weigand, H.-G. (2014): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I, Heidelberg, Spektrum Verlag. (https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-37968-0). **Kapitel VII „Flächeninhalt und Volumen“**

Längen, Flächen & Volumina II

	Ich kann…
☐	Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel definieren.
☐	herausfinden, ob zwei Objekte den gleichen Rauminhalt haben und mein Vorgehen begründen.
☐	Das Prinzip von Cavalieri beschreiben und anwenden.
☐	Das Volumen und Oberflächeninhalt von Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel bestimmen und mein Vorgehen begründen.

Literatur

Dahl, K & Lepp, M (2000). Wollen wir Mathe spielen? Hamburg: Verlag Friedrich Oetinger.

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.

Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie*. Berlin Heidelberg: Springer.

Weigand, H. G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., ... & Wittmann, G. (2014). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Springer Berlin Heidelberg.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Mitarbeit und bis nächsten Dienstag!