

Didaktik der Mathematik in der Primarstufe III

Didaktik der Geometrie

**13 - Pläne & Maßstäbe,
Wiederholung & Fragen I**

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Melanie Platz

Themenübersicht

Zur Lagebeschreibung von Punkten können auf Linien, Flächen und im Raum Koordinatensysteme eingeführt werden, welche die Grundlage für die analytische Geometrie und für die graphische Darstellung von Funktionen bilden.



Datum	Nr.	Thema	Grundidee
11.04.23	01	Organisatorisches & Einführung	
18.04.23	02	Entwicklung räumlicher Fähigkeiten	
25.04.23	03	Geometrische Begriffe und Wissenserwerb	
02.05.23	04	Zeichnen und Konstruieren	Formen und ihre Konstruktion
09.05.23	05	Ebene Figuren I	
16.05.23	06	Ebene Figuren II & Räumliche Objekte	
23.05.23	07	Symmetrie I (Kongruenzabbildungen)	Operieren mit Formen
30.05.23	08 (entfällt)	--	
06.06.23	09	Symmetrie II (Muster, Bandornamente, Parkette)	
13.06.23	10	Falten	
20.06.23	11	Längen, Flächen und Volumina I	Maße und Formeln
27.06.23	12	Längen, Flächen und Volumina II	Geom. Gesetzm. & Muster
04.07.23	13	Pläne & Maßstäbe, Wiederholung & Fragen I	Koordinaten
11.07.23	14 (online)	Wiederholung & Fragen II	
18.07.23	15	Klausur	



http://www.dimensions-math.org/Dim_DE.htm

- fundamentale Idee der **Geometrisierung von Zusammenhängen unserer Welt**
- nur **bestimmte Aspekte und Ausschnitte** unserer Umwelt können dargestellt werden

Pläne und Maßstäbe

- Verkleinern und Vergrößern
- Maßstab
- Koordinaten

Ich kann...

- erläutern, wann zwei Figuren ähnlich sind.
 - Lernsituationen zum Anregen reflektierter Handlungen zum Erzeugen von ähnlichen Figuren erstellen.
 - „Maßstab“ definieren und Anwendungsaufgaben zum Thema Maßstab lösen und erstellen.
 - „Kartesisches Koordinatensystem“ definieren und Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen mittels Koordinaten beschreiben.
-

Verkleinern und Vergrößern

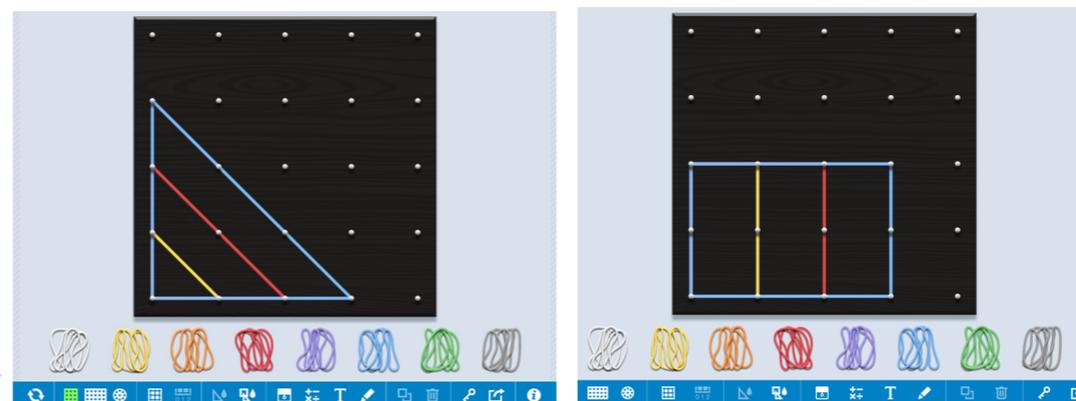
Ähnlich ◦ ◦ ◦

In der Grundschule:
„Figuren mit der gleichen
Form“

Mathematisch sind zwei Figuren zueinander ähnlich, wenn durch **Vergößern oder Verkleinern** einer der Figuren ein der anderen Figur **in allen räumlichen Verhältnissen entsprechendes Bild** erzeugt werden kann.

- **Im Unterricht: reflektierte Handlungen zum Erzeugen von ähnlichen Figuren**
- Die Kinder sollen intuitiv erfassen, dass bei der Vergrößerung oder Verkleinerung alle Teile in einem konstanten Verhältnis zueinander abgebildet werden.
- Diese Einsicht wenden die Kinder an, wenn sie bewusst selbst Figuren vergrößert oder verkleinert legen oder auf dem Geobrett spannen.

<https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>



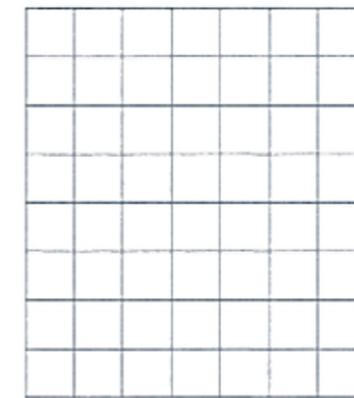
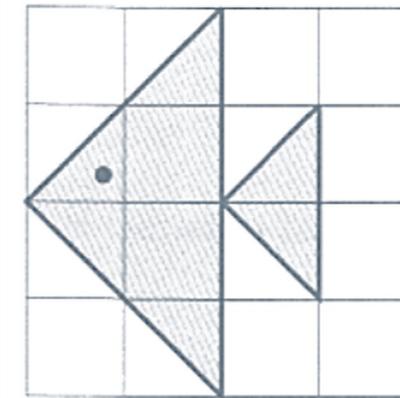
Franke & Reinhold (2016), S. 358f

Vergrößern und Verkleinern

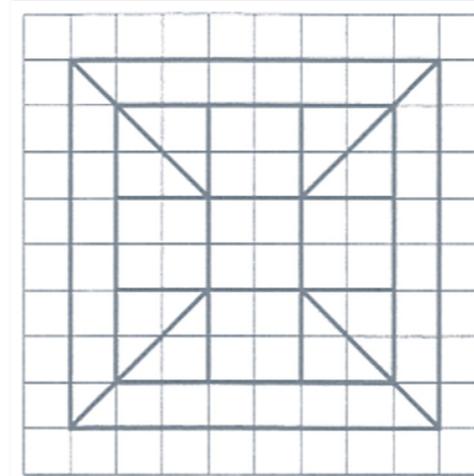
Exemplarische Aufgabenformate

Verkleinern oder Vergrößern von Figuren ...

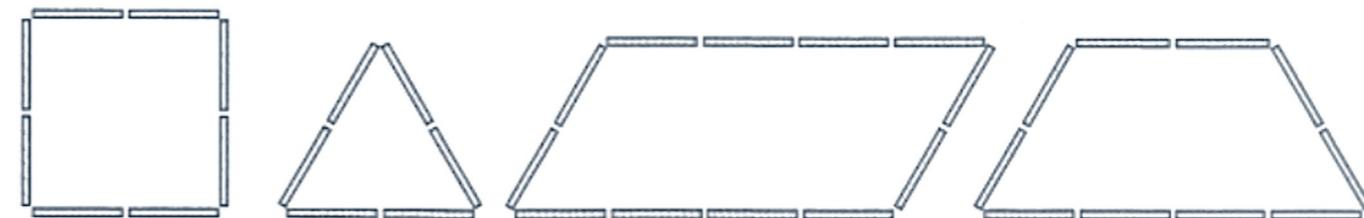
- ... von großen Kästchen auf kleinere oder größere Kästchen
- ..., die auf Kästchenpapier gleicher Größe gezeichnet sind
- ..., die ohne Kästchenpapier oder in anderen Gittern vorgegeben sind



Übertrage die Figur in dein Heft.



Zeichne das Muster halb so groß in dein Heft.



Lege die Figuren mit Stäbchen. Lege dann jede Figur noch einmal so, dass jede Seite nur noch halb so lang wird.

Tangram-Zauberer



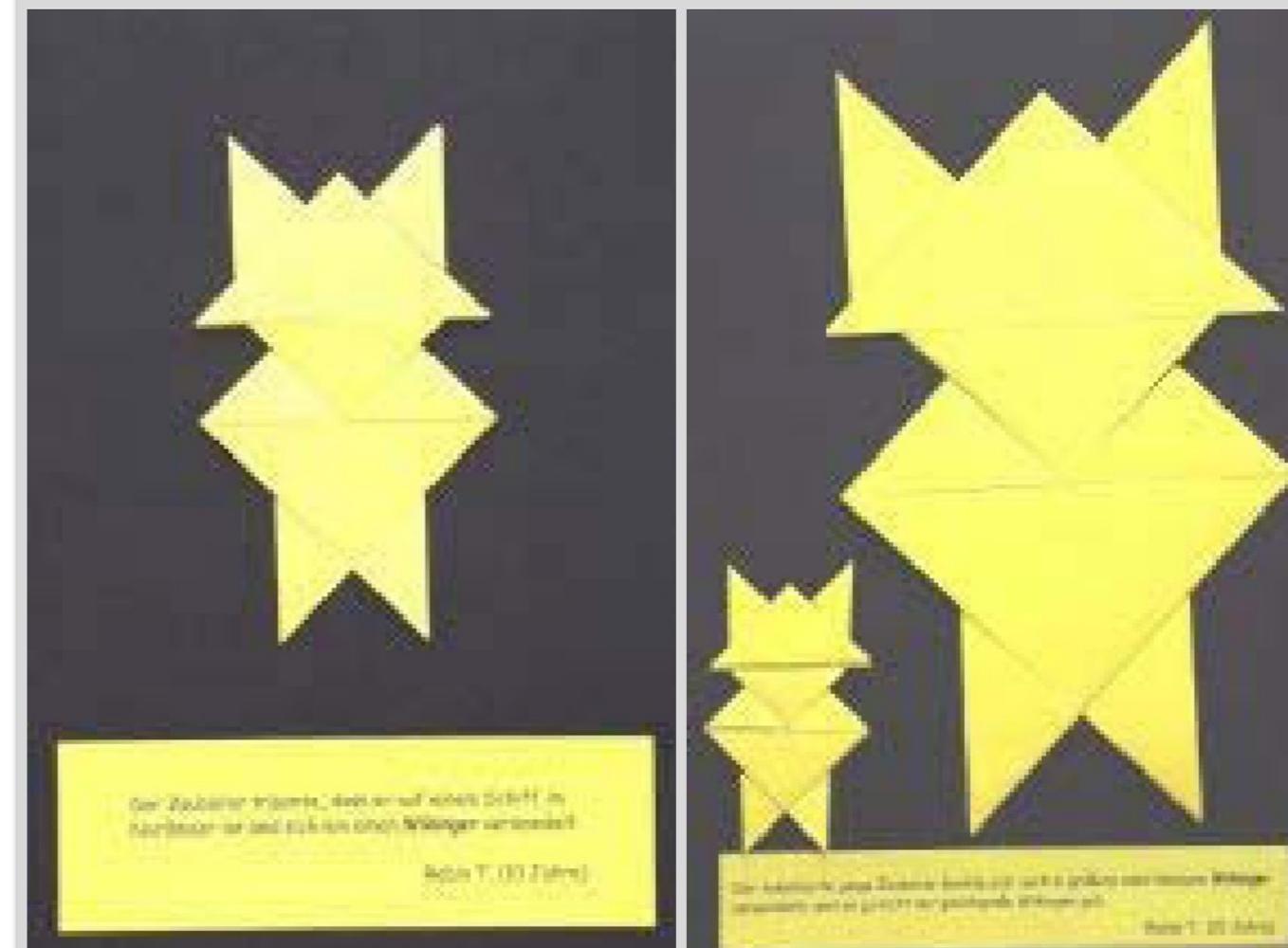
1. "Es war einmal ein junger Zauberer, der träumte von fernen Welten. In seinen Träumen verwandelte er sich in verschiedene Wesen..."
2. "Der Zauberer sieht sich im Spiegel.", "Er sieht sich in einem See.", "Er kann sich neben sich selber stellen.", "Er kann sich in Zwillinge verwandeln, oder in Drillinge." , "Er verwandelt sich in zwei Vögel."
3. "Nach langem Üben beherrscht der Zauberer nun einen weiteren schwierigen Trick: Er kann sich vergrößern oder verkleinern, ganz wie es ihm gefällt.", "Der Zauberer kann sich in seine drei Zwergfreunde verwandeln." , "Der Zauberer verwandelt sich in einen großen und einen kleinen Vogel"

Kongruenz

Ähnlichkeit

Tangram-Zauberer

„Der Zauberer träumte, dass er auf einem Schiff im Nordmeer ist und sich in einen Wikinger verwandelt. Der talentierte junge Zauberer konnte sich auch in größere oder kleinere Wikinger verwandeln, weil es ja nicht nur gleichgroße Wikinger gab.“ (Robin T., 10 Jahre)



Wollring (2002), S. 56

Tangram-Zauberer

„Der Zauberer verwandelt sich in
eine große und eine kleine
Kobra.“ (Gesa, 9 Jahre)



Wollring (2002), S. 54

Maßstab

Definition: Maßstab

Als Maßstab m wird das **Verhältnis** zwischen einer Größe auf einem Abbild s_A (z. B. einer Streckenlänge auf der Karte) und der entsprechenden Größe s_R in der Realität (Streckenlänge im Gelände) bezeichnet:

$$m = \frac{s_A}{s_R}$$

Den Wert des Kehrbrechts, also $\frac{1}{m} = \frac{s_R}{s_A}$, nennt man auch

Maßstabszahl.

- Maßstäbe werden üblicherweise noch **normiert**, d. h. so umgerechnet, dass sie in der Form „1 : Maßstabszahl“ wie z. B. in 1 : 100.000 angegeben werden können.
- Wichtig für die korrekte Ermittlung eines Maßstabs ist, dass beide Streckenlängen – in Bild und Realität – in der **gleichen Einheit** angegeben werden.

Übung 11



Helmerich & Lengnink (2016), S. 229

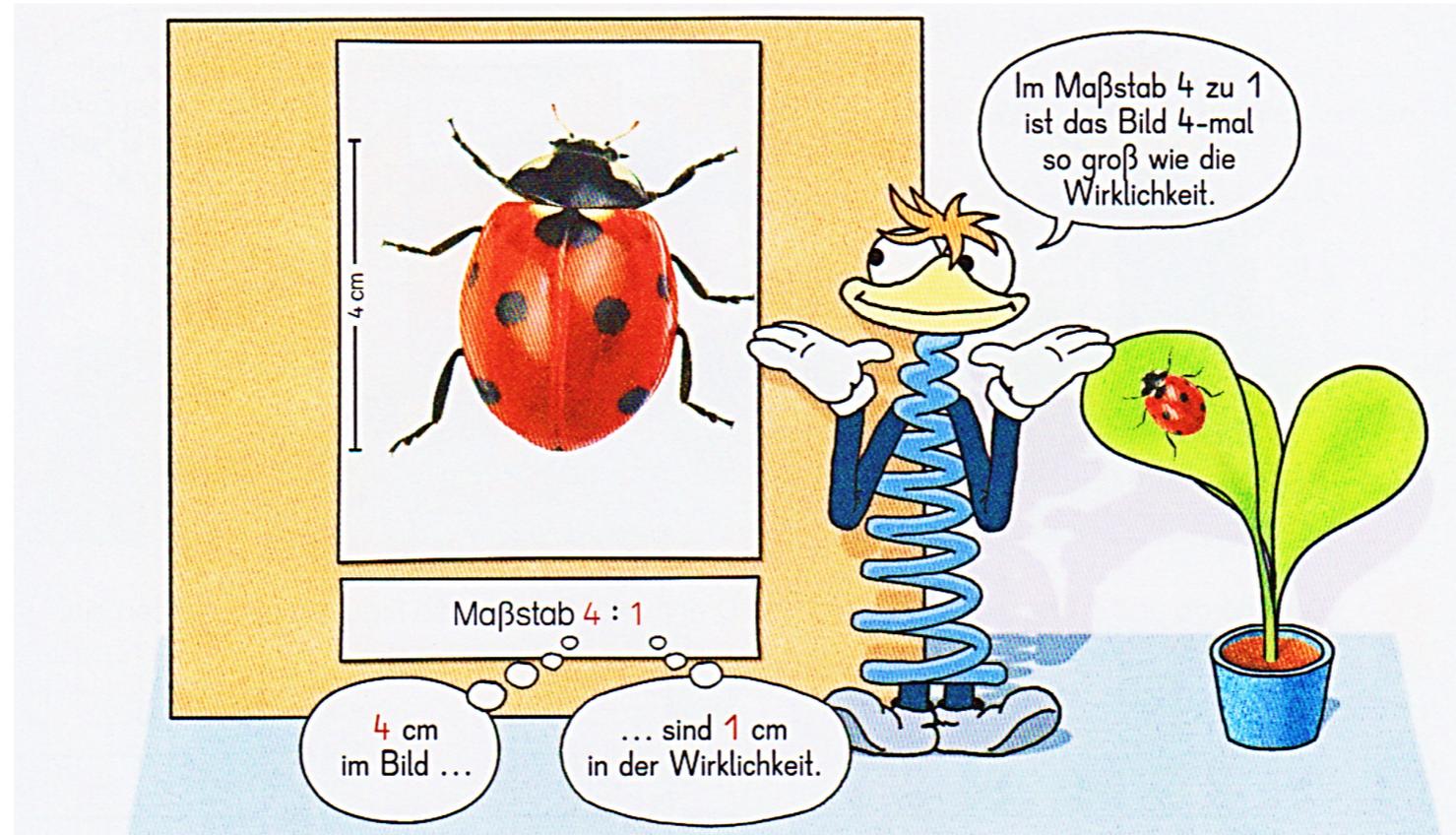
Mithilfe des Maßstabs kann man zwei wesentliche

Anwendungsaufgaben lösen:

- Aus einer Karte bzw. einem Plan mit gegebenem Maßstab kann man die Größen und Längen von Objekten und Wegen in der Realität bestimmen.
- Mit einem gegebenen Maßstab kann man ein Objekt oder eine Lagesituation mit Verbindungslinien (wie z. B. Straßen zwischen Städten oder Gebäudepläne) verkleinert oder auch vergrößert in einer Abbildung, z. B. einem Plan oder einer Karte, darstellen.

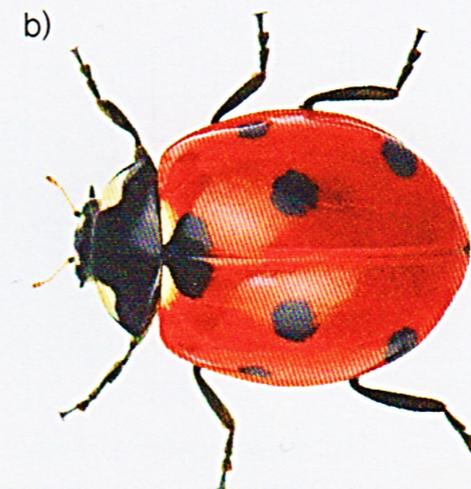
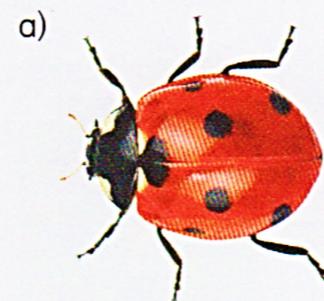
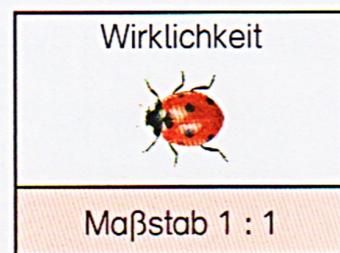
Helmerich & Lengnink (2016), S. 230f

Anwendungen des Maßstabs



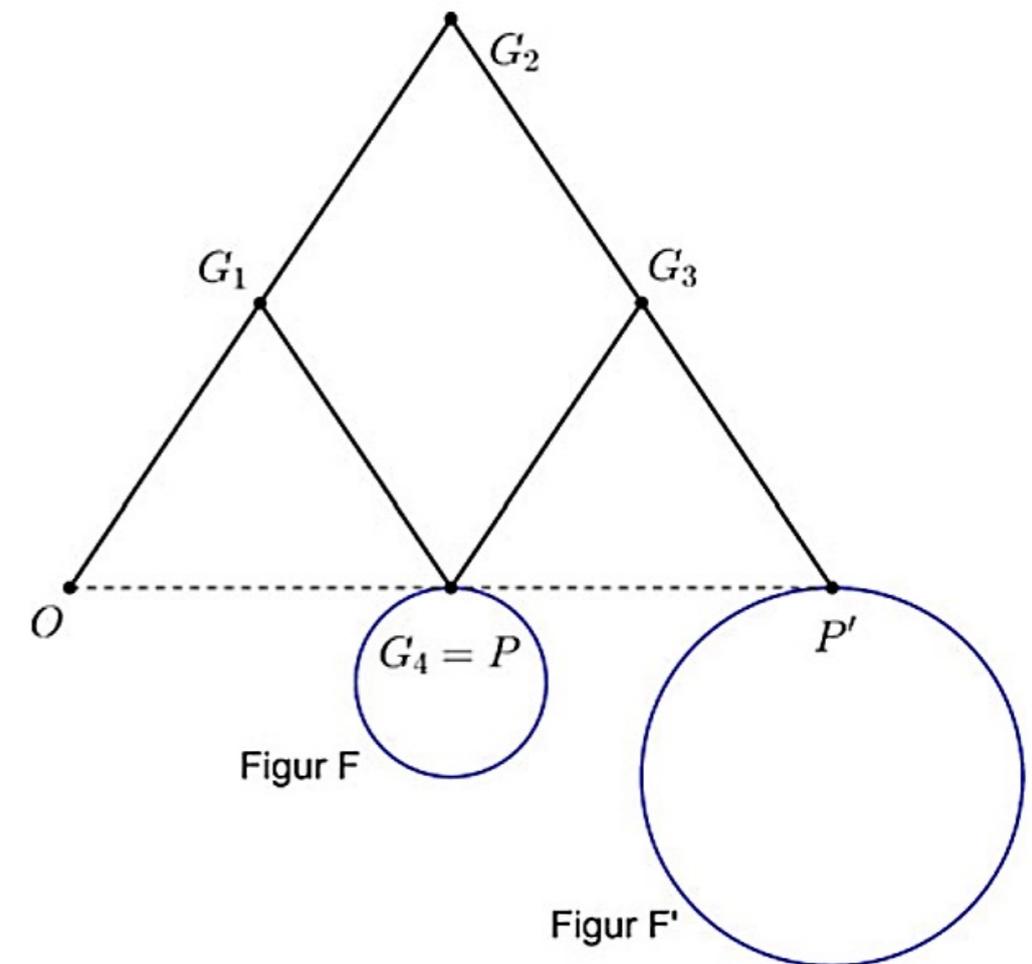
1 In welchem Maßstab wurde der Marienkäfer vergrößert?
Miss die Länge der Käfer und notiere den Maßstab.

1 a)	Maßstab	:	1
------	---------	---	---



Vervielfältigen, Verkleinern und Vergrößern

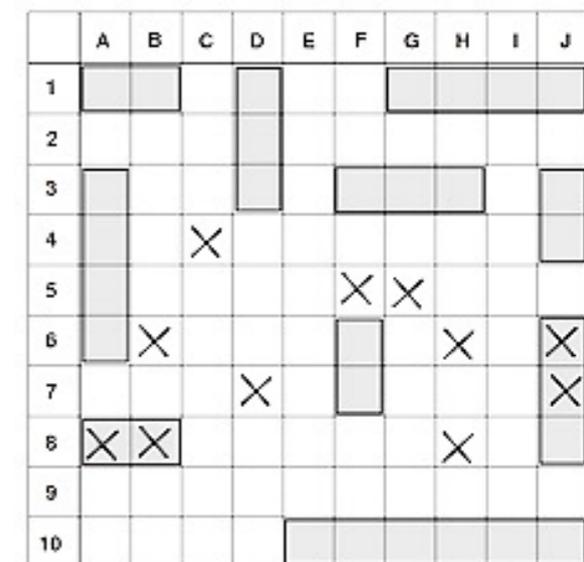
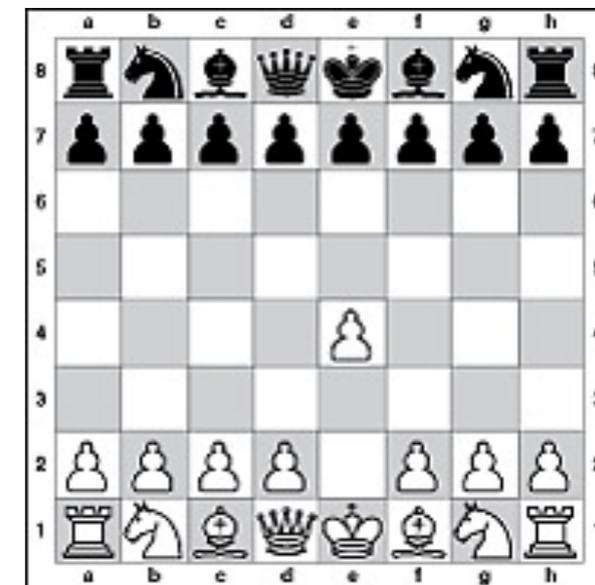
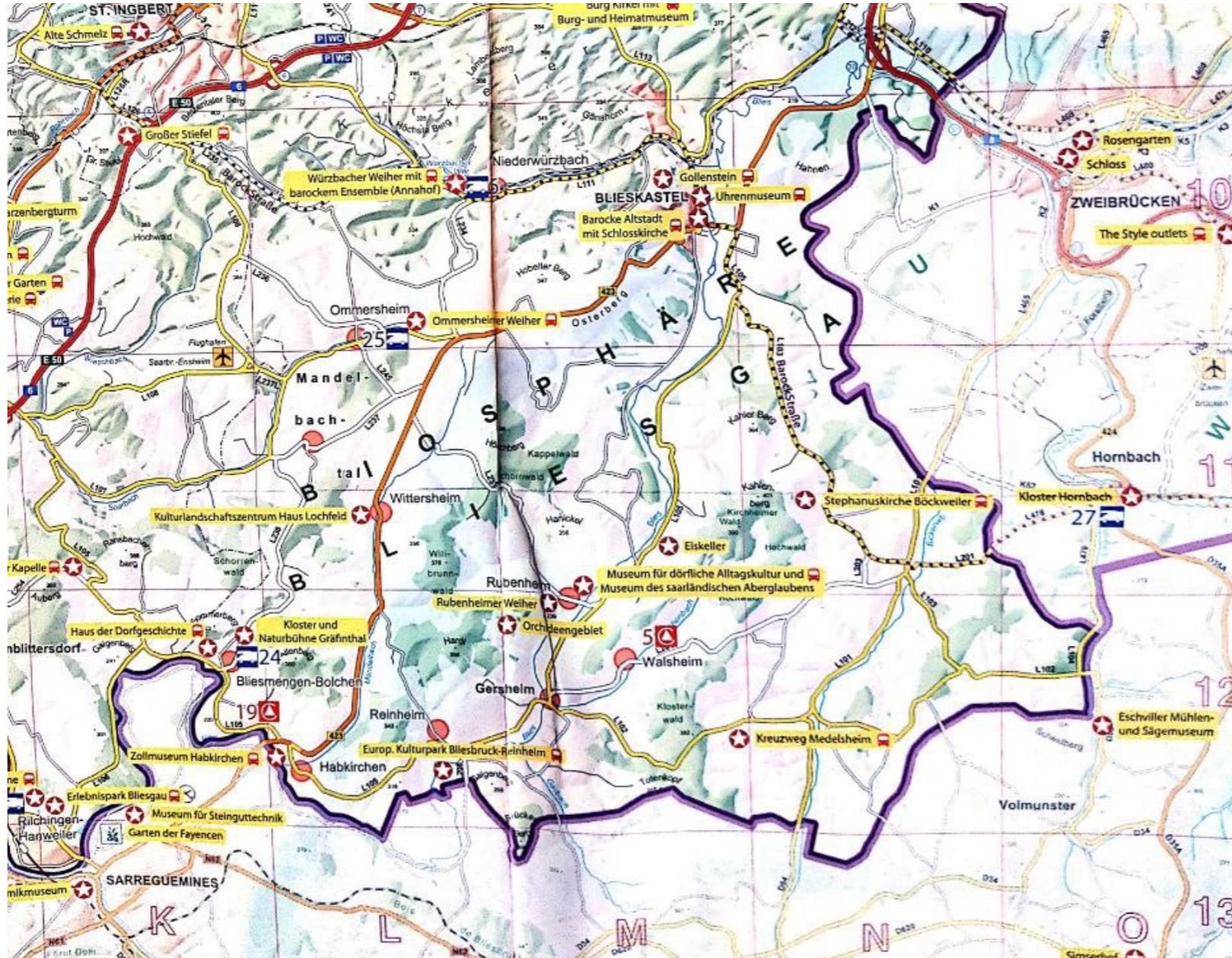
Pantograf



Helmerich & Lengnink (2016), S. 232f

Koordinaten

Karte mit Planquadraten

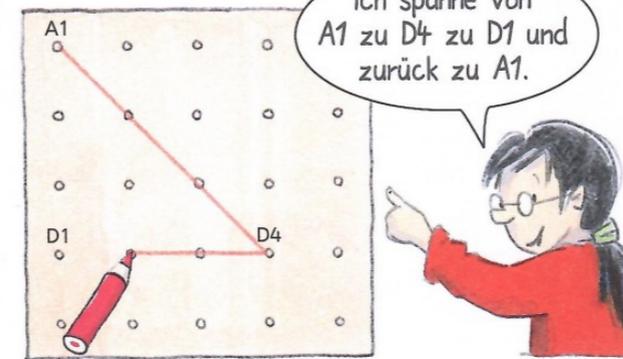


Abbildungsquellen: Saarland Hingucker Karte;
<https://www.schuenemann-verlag.de/schach-magazin/index.php?include=3011;>
https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/imp/gym/bp2016/fb1/3_i3_run/2_kopiervorlagen/5_protokoll/pics/schiffe.png

Koordinaten

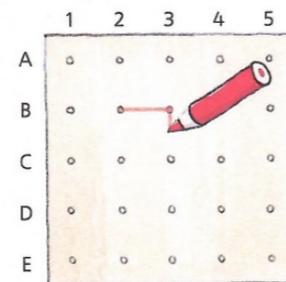
	1	2	3	4	5
A	A1	A2	A3	A4	A5
B	B1	B2	B3	B4	B5
C	C1	C2	C3	C4	C5
D	D1	D2	D3	D4	D5
E	E1	E2	E3	E4	E5

1 Vervollständige die Zeichnung.
A1–D4–D1–A1

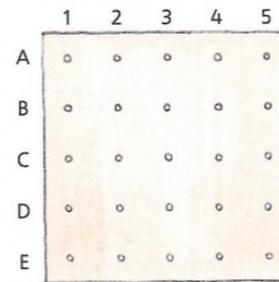


2 Spanne und zeichne von Punkt zu Punkt.

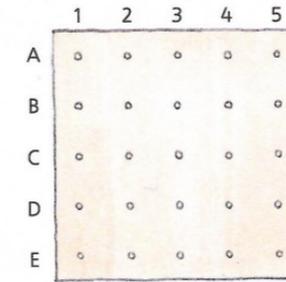
a) B2–B3–C3–C2–B2



b) C2–B4–C4–C2

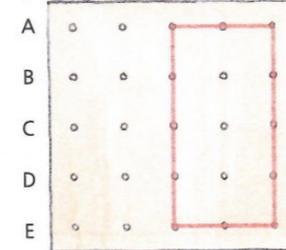


c) C4–D4–D1–C1–C4



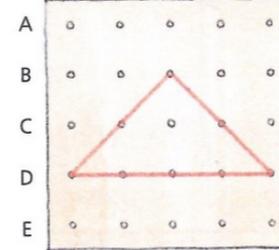
3 Schreibe auf, um welche Eckpunkte gespannt wurde.

a) 1 2 3 4 5

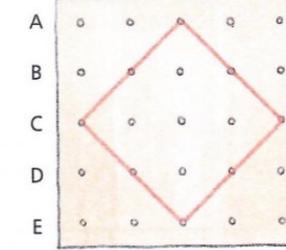


A3–A5–

b) 1 2 3 4 5

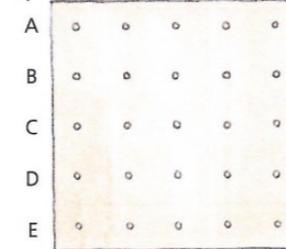


c) 1 2 3 4 5

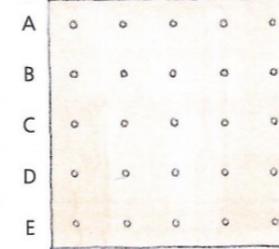


4 Diktiere deinem Partner Figuren. Spannt und zeichnet.

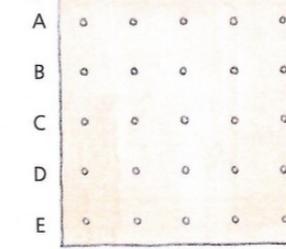
a) 1 2 3 4 5



b) 1 2 3 4 5



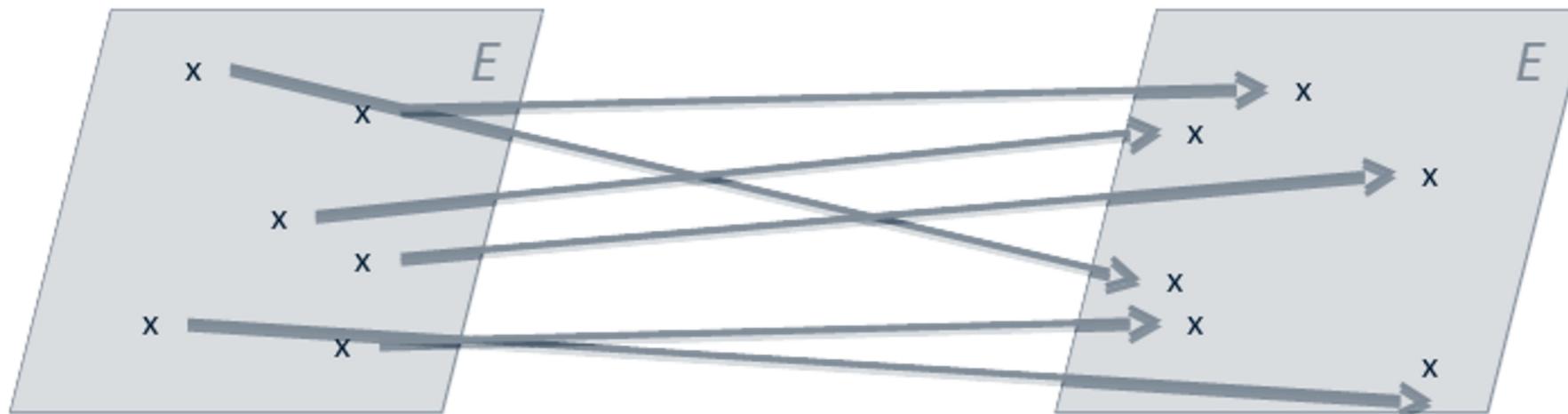
c) 1 2 3 4 5



Definition: Abbildung

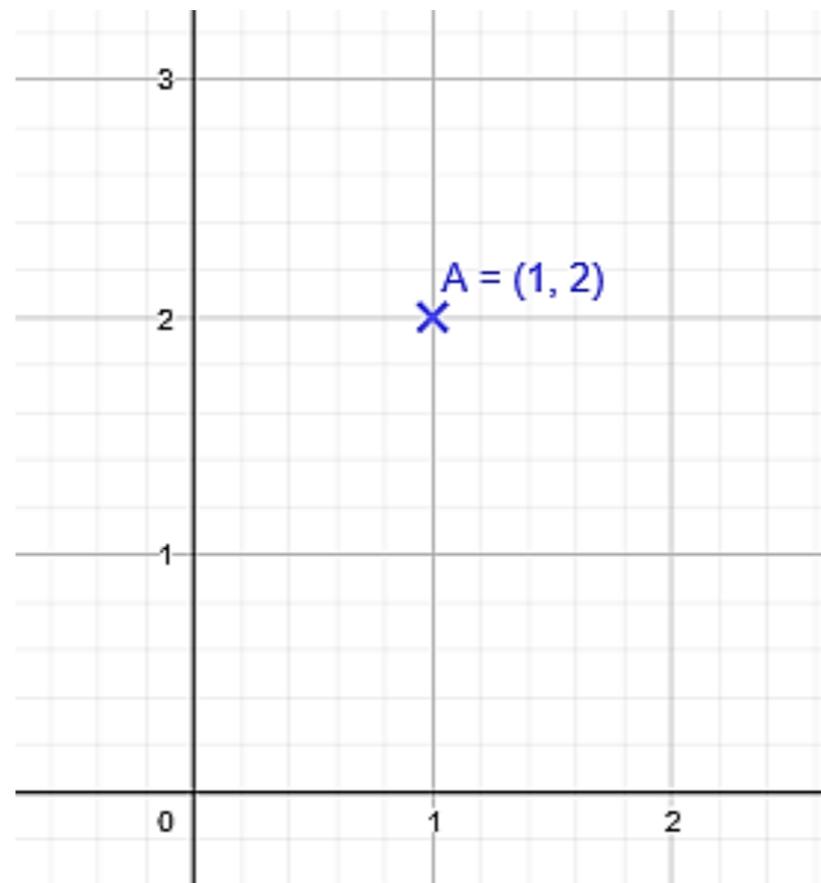
Eine Zuordnung f , die jedem Punkt P der Ebene E genau einen Punkt P' derselben Ebene zuordnet, heißt **Abbildung**.

Kurzschreibweise: $f : E \rightarrow E, P \mapsto P'$



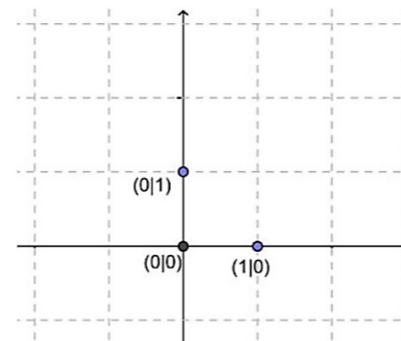
(stellen Sie sich die „beiden“ Ebenen übereinandergelegt vor)

- Wir haben bisher die Lage geometrischer Objekte über ihre geometrischen Relationen beschrieben.
- **Neue Idee:** Verwendung von Zahlen (Koordinaten) zur Beschreibung von Punkten in der Ebene, z. B. $A = (1|2)$.



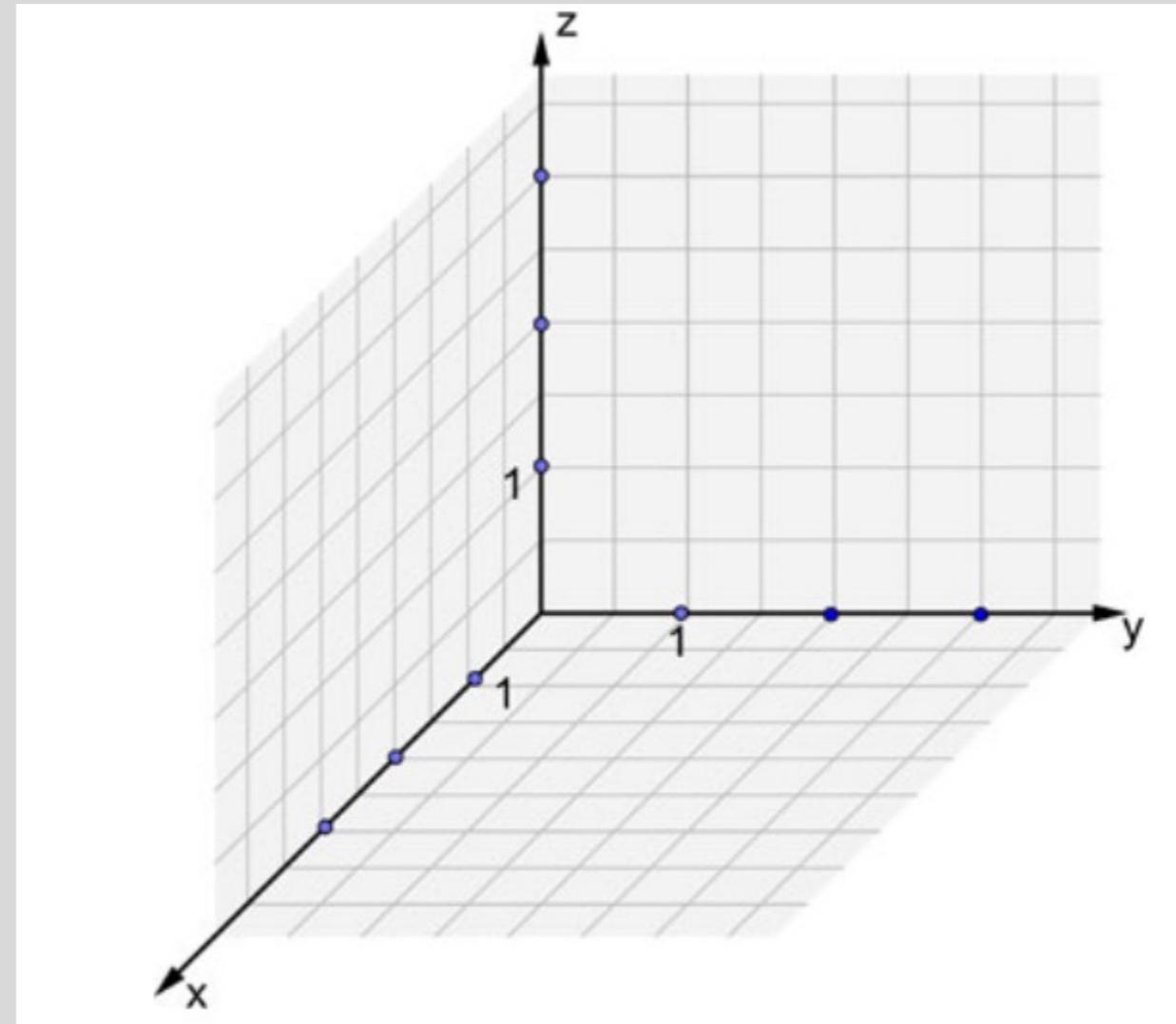
Definition: Kartesisches Koordinatensystem

Wir wählen eine Gerade g und eine zu g senkrechte Gerade h . Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt. Dieser sei mit den Koordinaten $(0|0)$ benannt und wird auch Ursprung genannt. Auf beiden Geraden g und h wird jeweils ein Punkt mit den Koordinaten $(1|0)$ und einer mit den Koordinaten $(0|1)$ festgelegt, und zwar in der Orientierung, dass $(1|0)$, $(0|0)$ und $(0|1)$ einen 90° -Winkel im Gegenuhrzeigersinn einschließen. Die Gerade, auf der der Punkt $(1|0)$ liegt, wird häufig x -Achse, die mit dem Punkt $(0|1)$ wird y -Achse genannt.



Dreidimensionales Koordinatensystem

Um Punkte im Raum angeben zu können, muss das zweidimensionale Achsenkreuz um eine weitere Raumrichtung Achse erweitert werden. Für die Koordinaten eines Punktes müssen dann drei Angaben gemacht werden: die Maßangabe für die „Schritte“ auf der x -Achse, der y -Achse und der z -Achse.



Helmerich & Lengnink (2016), S. 31

Es wird jeweils das grüne Haus auf das blaue abgebildet.

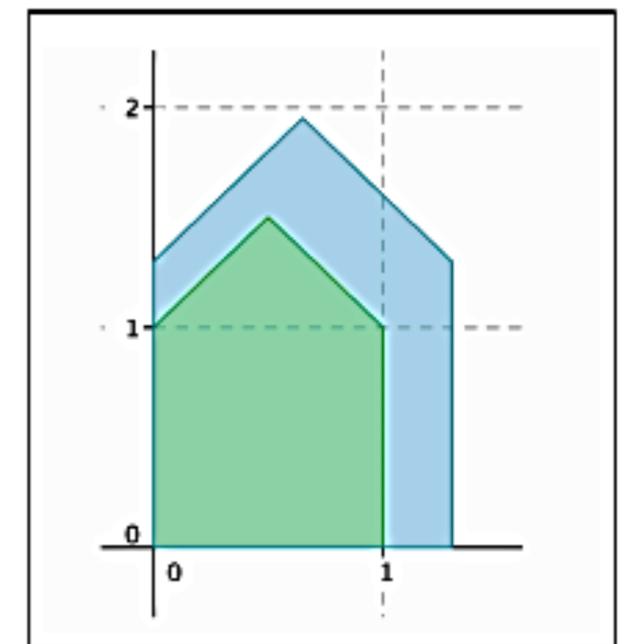
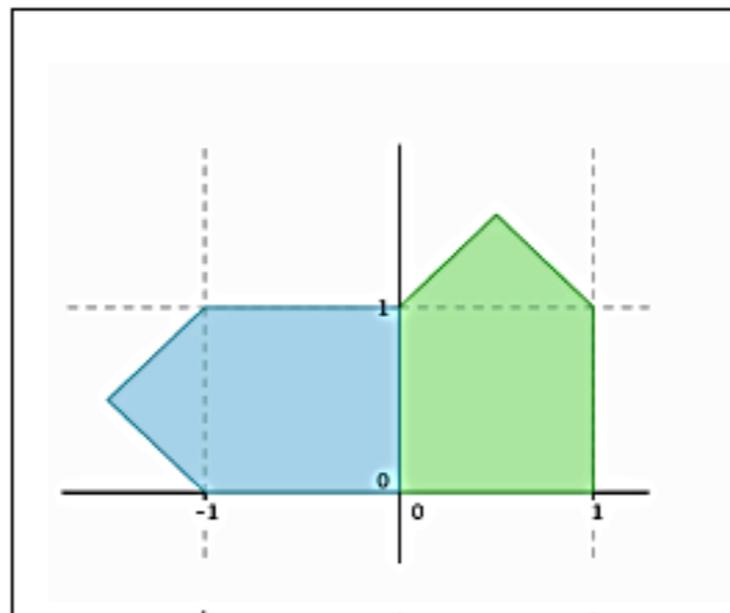
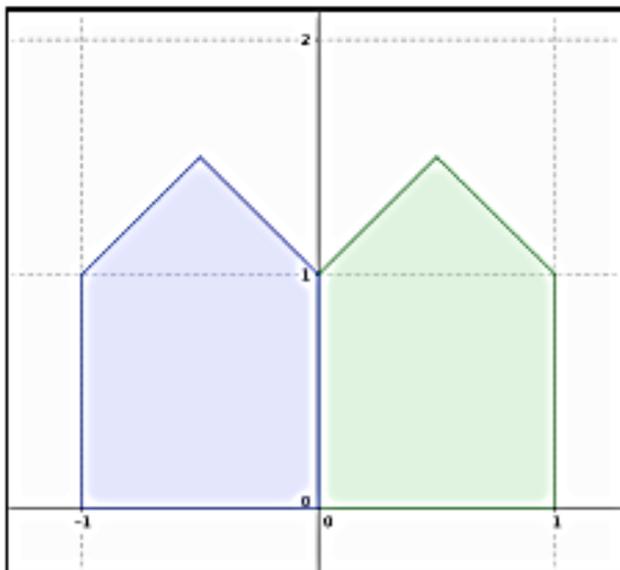


Abb. Mitte und rechts: Leuders, 2016, S. 132

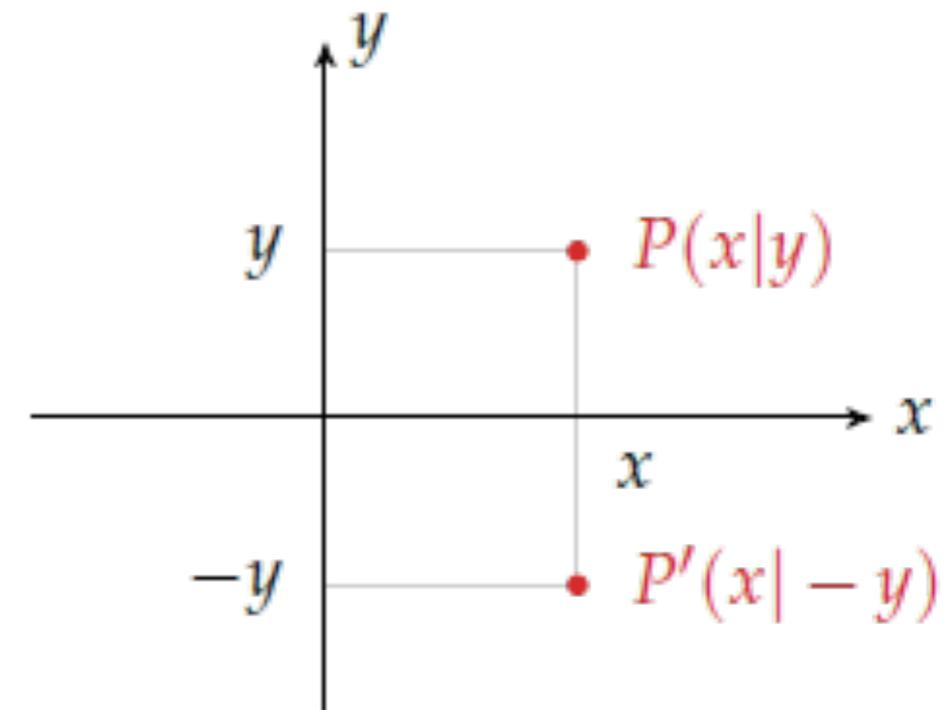
1. Beschreiben Sie die Abbildung in Worten.
2. Geben Sie jeweils die Koordinaten ausgewählter Punkte (x,y) und ihrer Bildpunkte (x',y') an. Können Sie den Zusammenhang allgemein notieren?
3. Betrachten Sie weitere Sonderfälle, z.B.
 - Drehung um den Ursprung um 180°
 - Spiegelung an der x-Achse

Beispiele

Spiegelung an der x-Achse

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

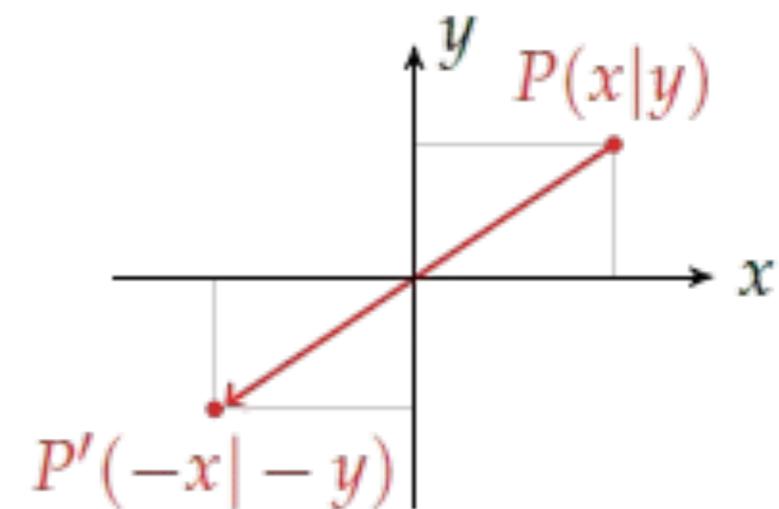


Spiegelung am Ursprung

(Drehung am Ursprung um 180°)

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$



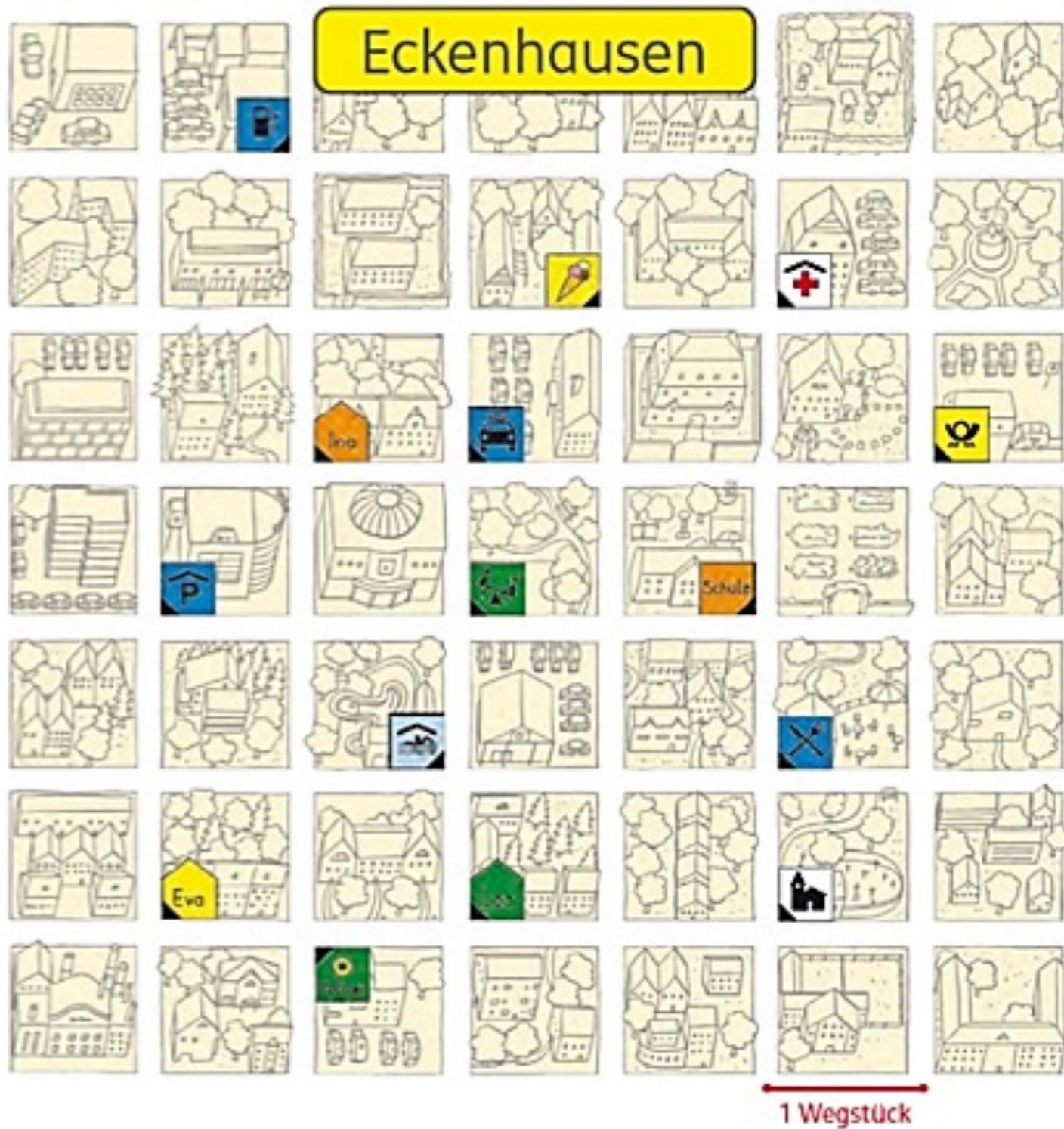
Sind die Koordinaten von zwei Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ gegeben, kann man den Abstand d in der „üblichen“ sog.

Euklidischen Metrik berechnen:

Satz des Pythagoras (Vorlesung 11)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Eckenhausen



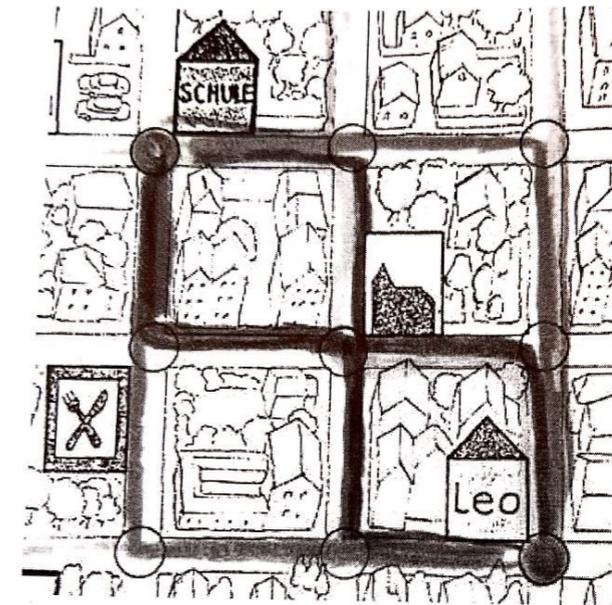
Was ist der kürzeste Weg zur
Schule für Leo?

Zahlenbuch 2, S. 104

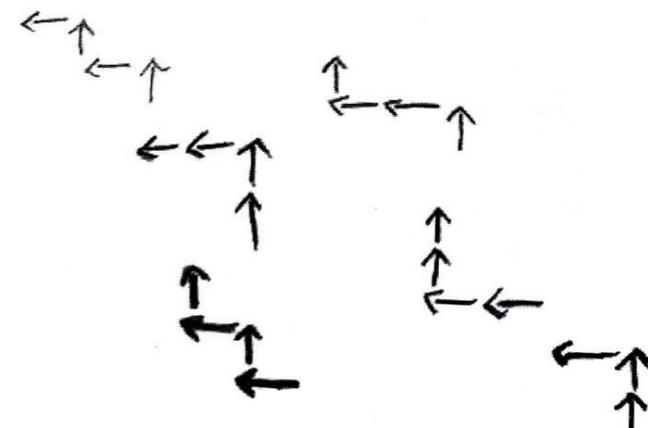
<https://primakom.dzlm.de/inhalte/raum-und-form/raumorientierung/unterricht>

Hengartner, Hirt & Wälti (2018), S. 238

Eckenhausen



Leo hat 6 Möglichkeiten um in die Schule zu kommen.



Was ist der kürzeste Weg zur Schule für Leo?

Zahlenbuch 2, S. 104

<https://primakom.dzlm.de/inhalte/raum-und-form/raumorientierung/unterricht>

Hengartner, Hirt & Wälti (2018), S. 238

Eckenhausen



1 Wegstück

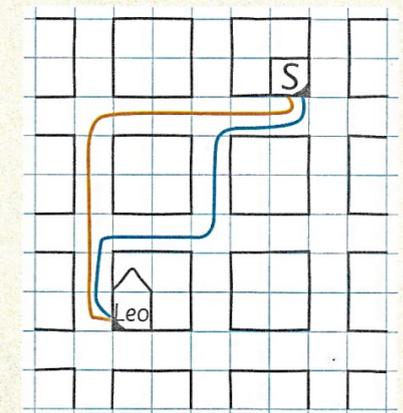
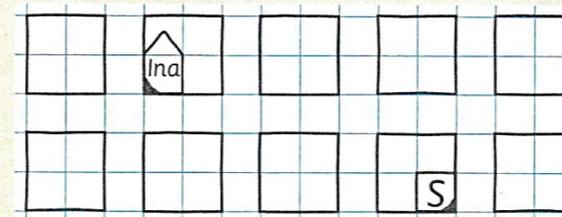
Forschen und Finden



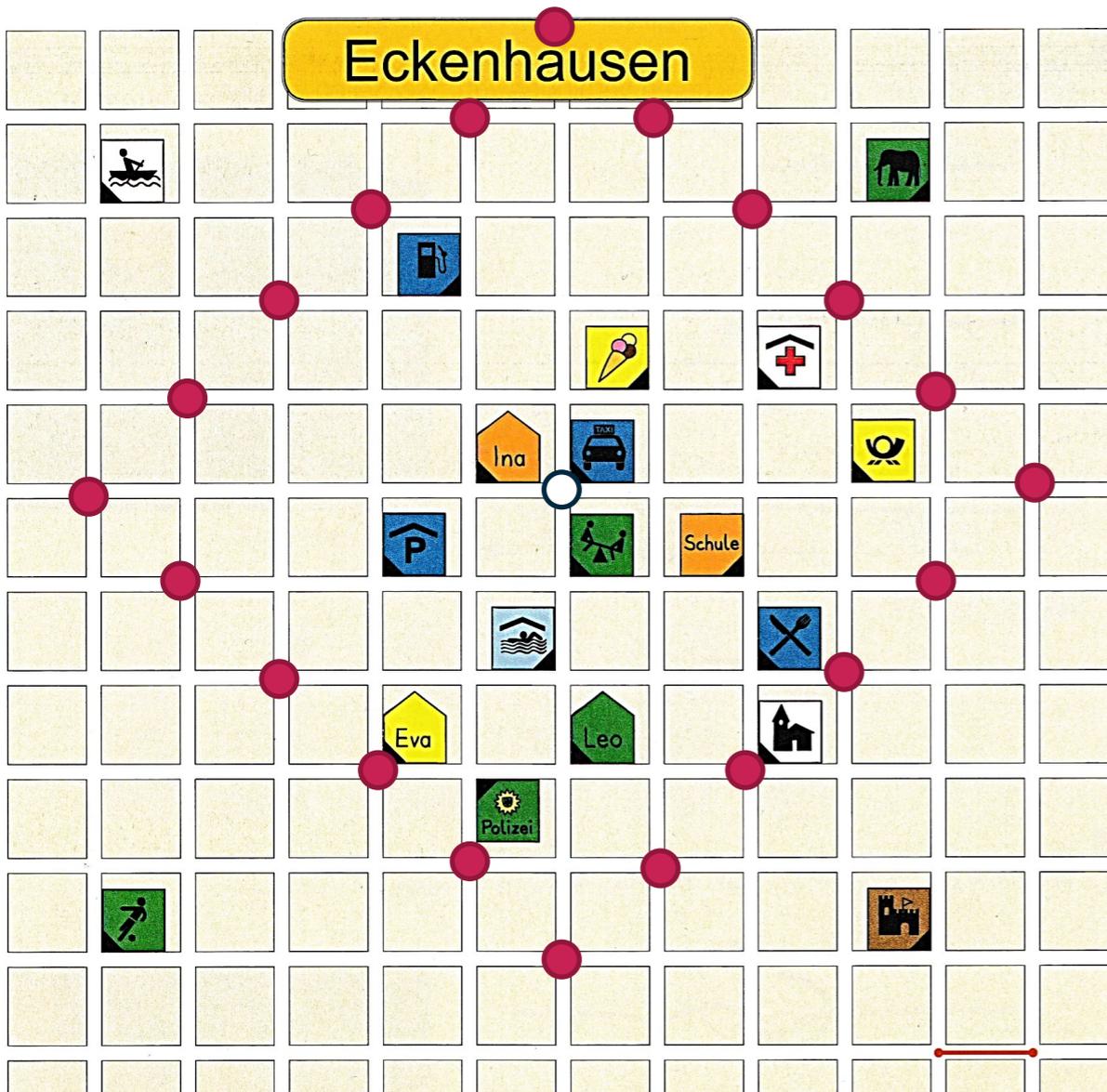
6 Das Taxi fährt immer 5 Wegstücke. Wohin kann es gelangen?

7 a) Leo kann auf 6 verschiedenen Wegen zur Schule gehen, wenn er keinen Umweg macht. Zeichne einen Plan ins Heft und trage alle Wege ein.

b) Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann Ina zur Schule gehen?



c) Finde und löse ähnliche Aufgaben.

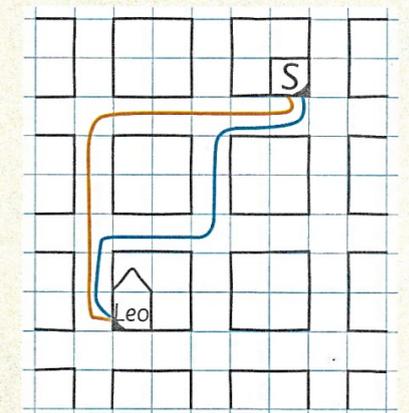
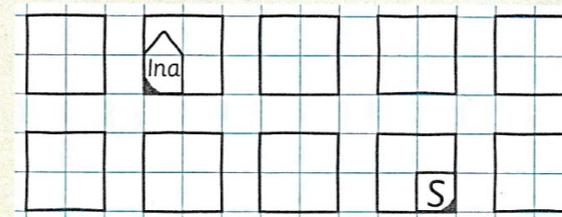


Forschen und Finden

6 Das Taxi fährt immer 5 Wegstücke. Wohin kann es gelangen?

7 a) Leo kann auf 6 verschiedenen Wegen zur Schule gehen, wenn er keinen Umweg macht. Zeichne einen Plan ins Heft und trage alle Wege ein.

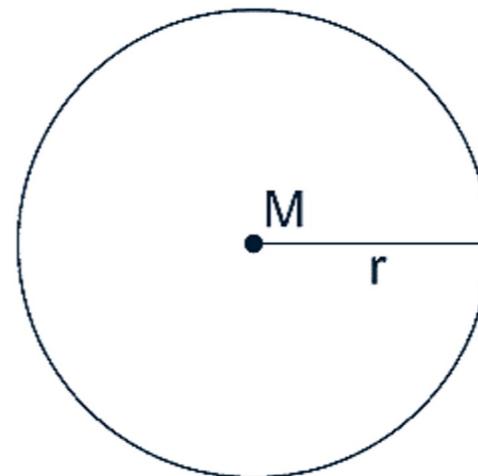
b) Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann Ina zur Schule gehen?



c) Finde und löse ähnliche Aufgaben.

Definition: Kreis

Ein **Kreis** $K_{M;r}$ ist die **Menge aller Punkte** einer Ebene, die einen **konstanten Abstand zu einem vorgegebenen Punkt** dieser Ebene, dem **Mittelpunkt M**, haben. Der Abstand der Kreispunkte zum Mittelpunkt ist der **Radius r** des Kreises, er ist eine positive reelle Zahl.



- Bei Kreisen haben die Kinder keine Probleme beim identifizieren
→ Denn: Alle Kreise sind ähnlich.

- Am Ende der 4. Klasse sollten die Kinder wissen:

Ein Kreis ist eine ebene Figur. Jeder Punkt der Kreislinie hat den gleichen Abstand vom Mittelpunkt. Diesen Abstand nennt man Radius.

Eckenhausen

Taxi-Geometrie (oder auch: City-Block-,
Manhattan-, Minkowski-Geometrie)

Sind die Koordinaten von zwei
Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$
gegeben, kann man den
Abstand d in folgender Metrik
berechnen:

$$d = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$



Pascalsches Dreieck

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$\begin{matrix} & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \end{matrix}$$

Eckenhausen



1 Wegstück

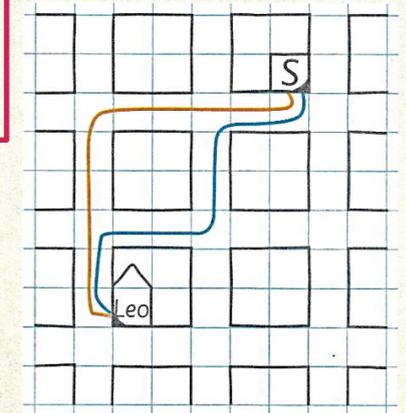
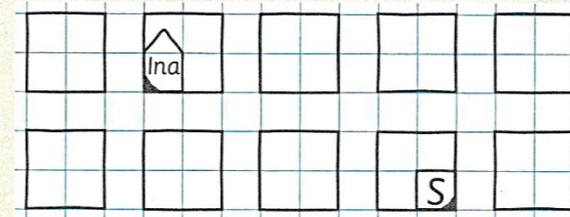
Forschen und Finden



6 Das Taxi fährt immer 5 Wegstücke. Wohin kann es gelangen?

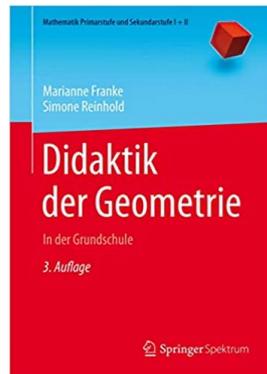
7 a) Leo kann auf 6 verschiedenen Wegen zur Schule gehen, wenn er keinen Umweg macht. Zeichne einen Plan ins Heft und trage alle Wege ein.

b) Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann Ina zur Schule gehen?



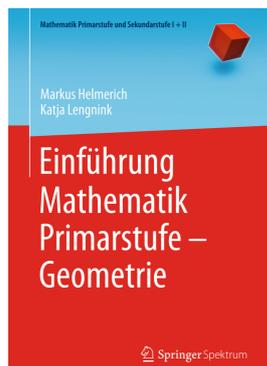
c) Finde und löse ähnliche Aufgaben.

- Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.
- Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Leuders, T. (2016). *Erlebnis Algebra: zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Springer-Verlag.
- Wollring, B. (2002). Mathematikdidaktisches Labor: Beispiele zu realen und virtuellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In *Selbständiges Lernen mit Neuen Medien. Workshop der Studienwerkstätten für Lehrerbildung an der Universität Kassel am 21. Februar 2002* (pp. 47-62).



Didaktischer Hintergrund (Primarstufe):

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag. **Abschnitt 11.2.6 „Verkleinern und Vergrößern“**.



Fachlicher Hintergrund:

Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie*. Berlin Heidelberg: Springer. (<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-47206-4>). **Abschnitt 2.4 „Koordinatisierung und Maße“ und Abschnitt 6.3 „Pläne und maßstäbliches Arbeiten“**

Ich kann...

- erläutern, wann zwei Figuren ähnlich sind.
 - Lernsituationen zum Anregen reflektierter Handlungen zum Erzeugen von ähnlichen Figuren erstellen.
 - „Maßstab“ definieren und Anwendungsaufgaben zum Thema Maßstab lösen und erstellen.
 - „Kartesisches Koordinatensystem“ definieren und Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen mittels Koordinaten beschreiben.
-

Wiederholung & Fragen I

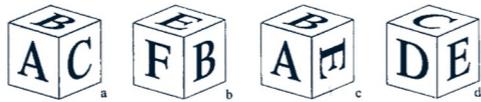
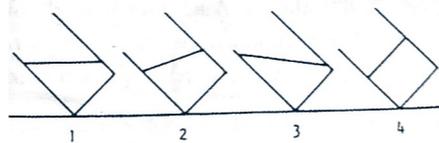
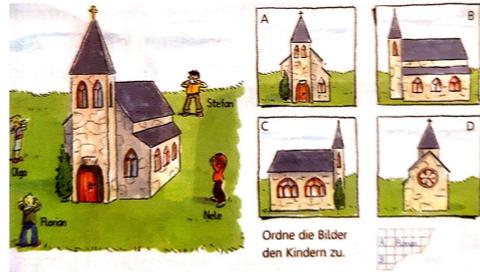
Für die Wiederholung wurden folgende Themen gewünscht:

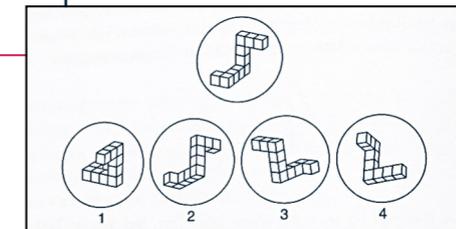
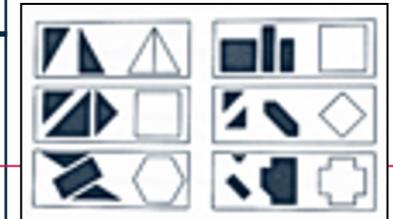
- die Bestandteile des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Verknüpfungstafeln

<p>In meiner Vorstellung</p> <p>Ich befinde mich</p>	<p>... bewege ich die Dinge nicht</p>	<p>... bewege ich die Dinge</p>
<p>... außerhalb der Situation</p>	<p>Räumliche Beziehungen</p>	<p>a) Veranschaulichung (ich bewege Teile des Objekts)</p> <p>b) Gedankliches Bewegen (Mentale Rotation) (ich bewege das Objekt als Ganzes)</p>
<p>... in der Situation</p>	<p>Räumliche Wahrnehmung</p>	<p>Räumliche Orientierung</p>

Selter & Zannetin (2019, S. 101)

Räumliches Vorstellungsvermögen

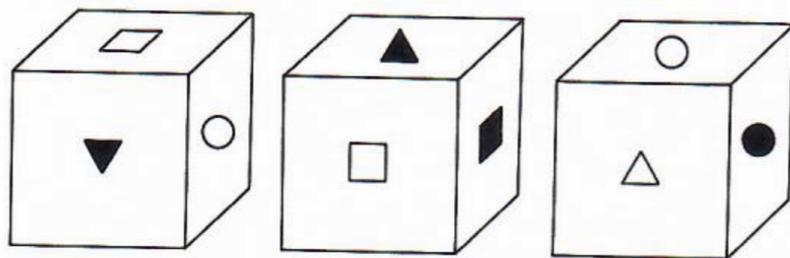
<p>In meiner Vorstellung</p> <p>Ich befinde mich</p>	<p>... bewege ich die Dinge nicht</p>	<p>... bewege ich die Dinge</p>
<p>... außerhalb der Situation</p>	<p>Räumliche Beziehungen</p> <p>Das Vorstellen und Beschreiben von räumlichen Lagebeziehungen unbewegter Objekte.</p> <p>Drei der vier Schrägbilder zeigen denselben Würfel. Welches Bild zeigt einen anderen?</p> 	<p>a) Veranschaulichung (ich bewege Teile des Objekts)</p> <p>die gedankliche Vorstellung von Bewegungen wie Drehungen, Verschiebungen und Faltungen von Teilen eines Objekts.</p> <p>b) Gedankliches Bewegen (Mentale Rotation) (ich bewege das Objekt als Ganzes)</p> <p>die Fähigkeit, sich Rotationen eines zwei- oder dreidimensionalen Objektes als Ganzes schnell und präzise vorstellen zu können.</p>
<p>... in der Situation</p>	<p>Räumliche Wahrnehmung</p> <p>Fähigkeit, Objekte und Lagebeziehungen von Objekten bezüglich des eigenen Körpers wahrzunehmen.</p> 	<p>Räumliche Orientierung</p> <p>Fähigkeit, die eigene Person gedanklich richtig in eine räumliche Situation einzuordnen, sich real und mental im Raum zurechtzufinden.</p> 



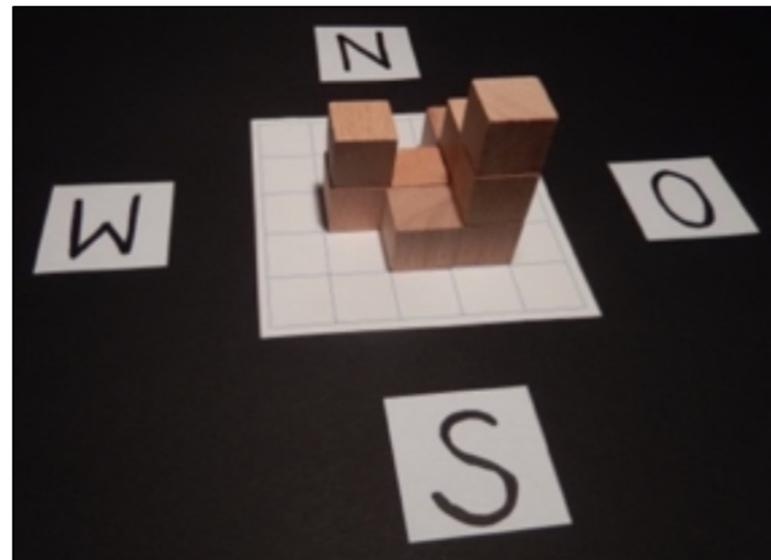
Räumliches Vorstellungsvermögen

Ordnen Sie zu.

Hier siehst du drei verschiedene Ansichten dieses Würfels:

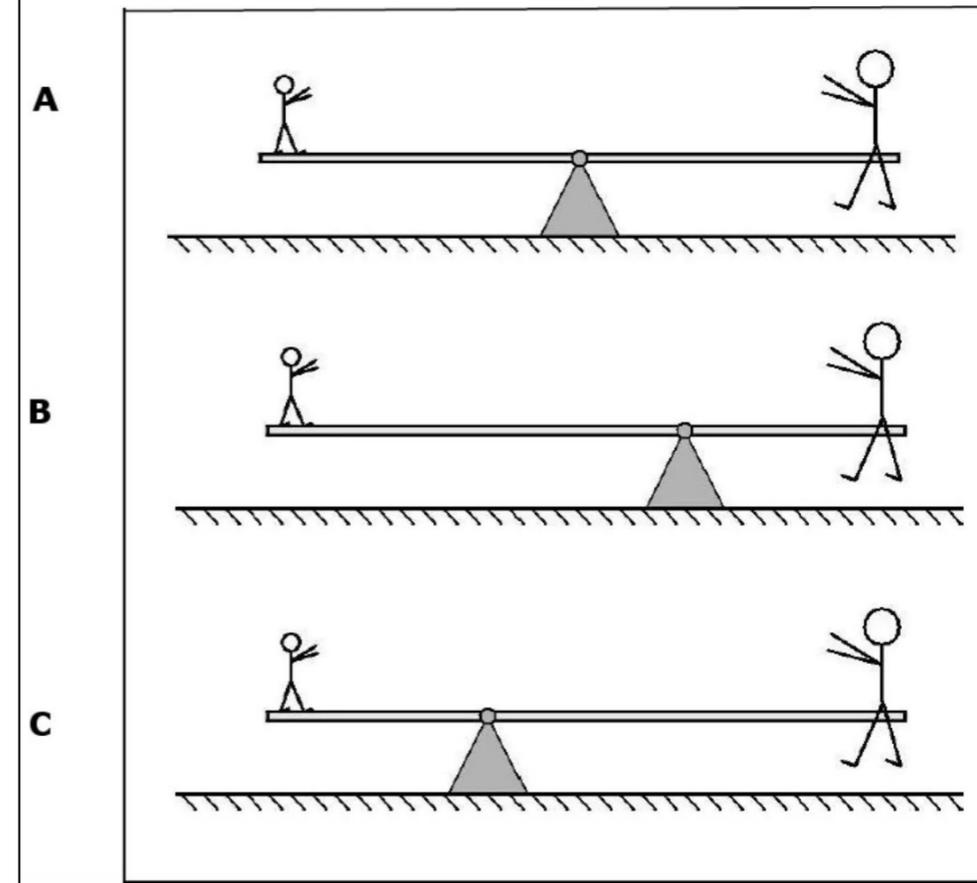


Welches Zeichen befindet sich auf der gegenüberliegenden Seite von \bigcirc (\blacktriangle , \square) ?

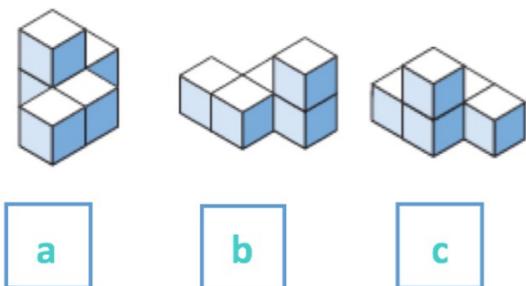


Wer sieht was?

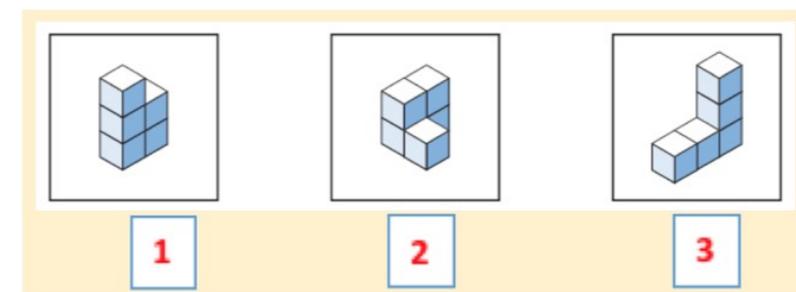
Welche Darstellung ist richtig? Wann befindet sich die Wippe im Gleichgewicht?



Eigenaktivität: Welche der drei abgebildeten Darstellungen stimmen überein?



Von Karte zu Karte darf nur ein Würfel versetzt werden. Ordnen Sie die Karten in der Reihenfolge, wie Sie sie ablegen könnten.

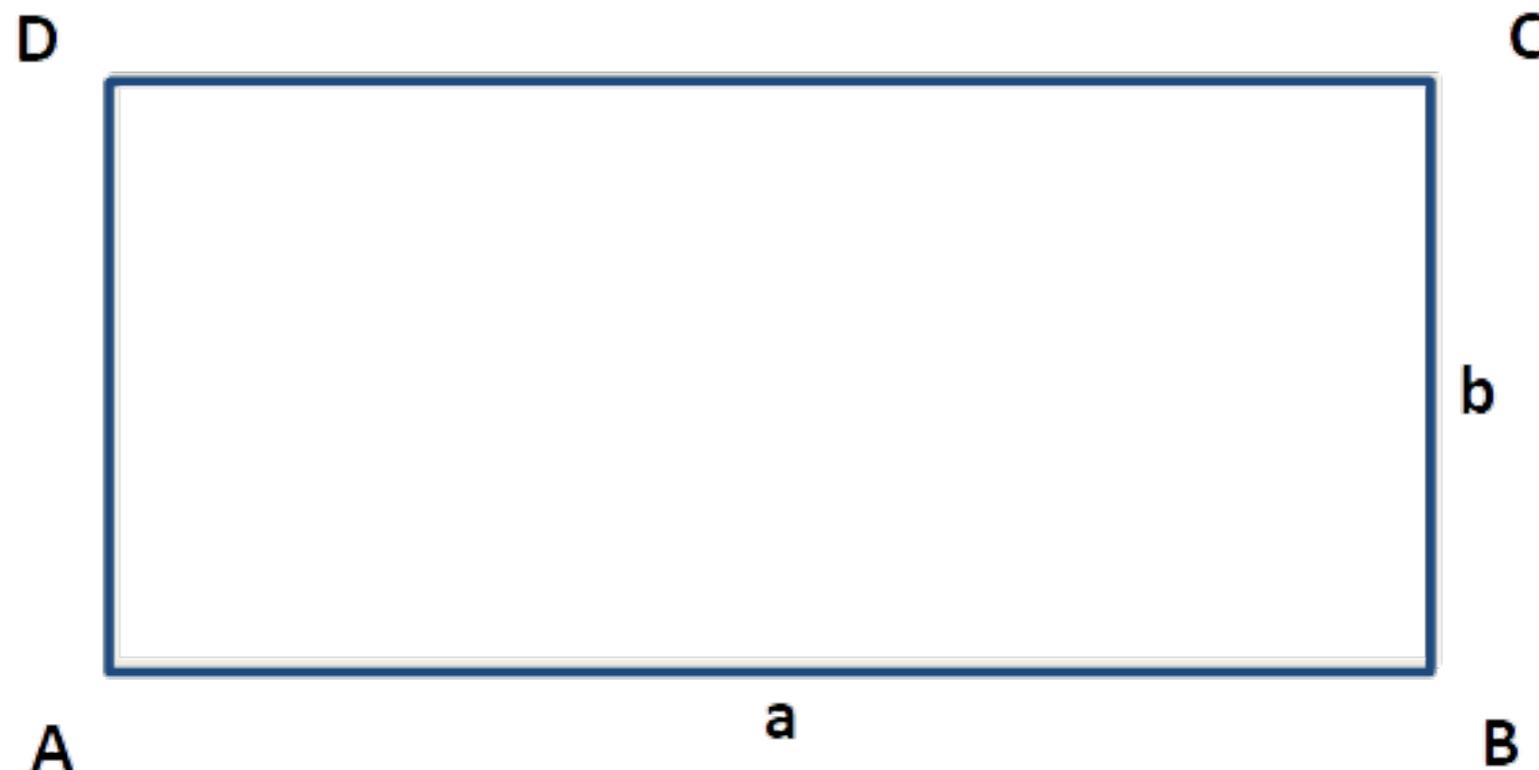


Deckabbildungen des Rechtecks

vgl. Vorlesung 7

EIMa WiSe
22/23

Welche Deckabbildungen hat das Rechteck?

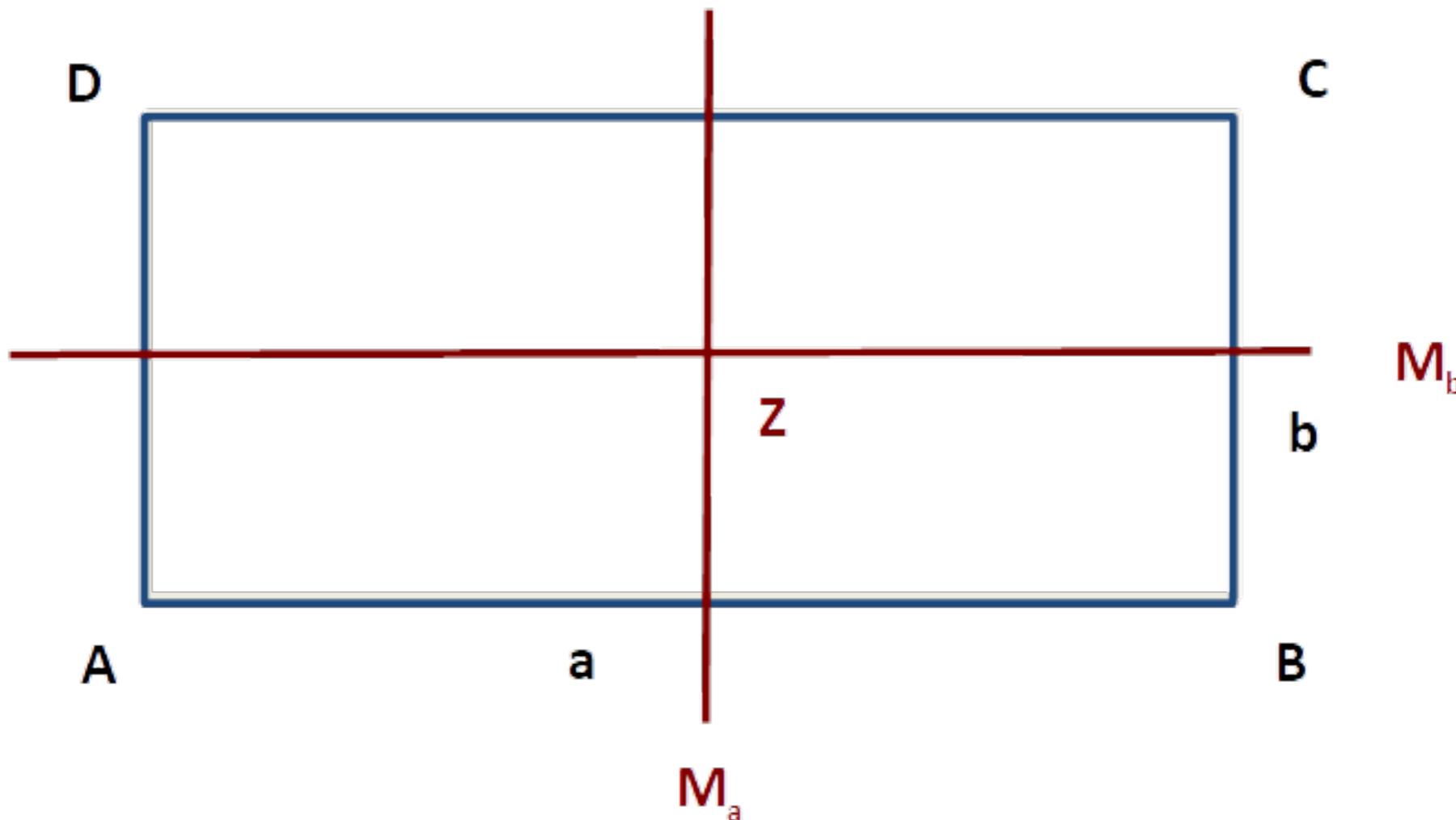


Deckabbildungen des Rechtecks

vgl. Vorlesung 7

Welche Deckabbildungen hat das Rechteck?

1. Id = Identität
2. $D_{Z;180}$ = Drehung um Z um 180°
3. S_{M_a} = Spiegelung an M_a
4. S_{M_b} = Spiegelung an M_b



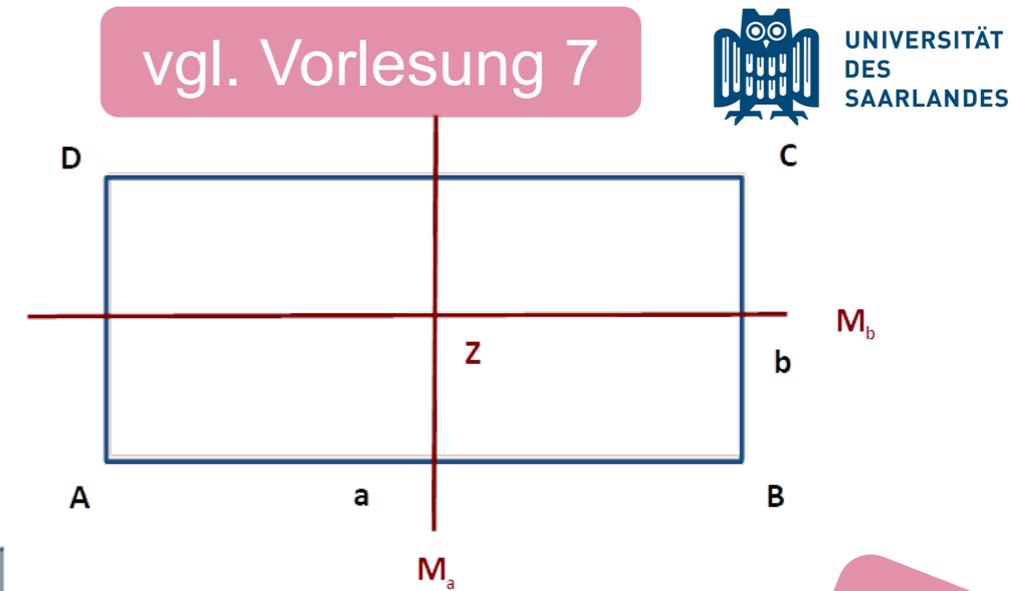
EIMa WiSe
22/23

Benölken, Gorski, & Müller-Philipp (2018), S. 220

Deckabbildungen des Rechtecks

Verknüpfungstafel

\circ (erst \rightarrow , dann \downarrow)	Id	$D_{Z;180}$	S_{Ma}	S_{Mb}
Id	Id	$D_{Z;180}$	S_{Ma}	S_{Mb}
$D_{Z;180}$	$D_{Z;180}$	Id	S_{Mb}	S_{Ma}
S_{Ma}	S_{Ma}	S_{Mb}	Id	$D_{Z;180}$
S_{Mb}	S_{Mb}	S_{Ma}	$D_{Z;180}$	Id



EIMa WiSe
22/23

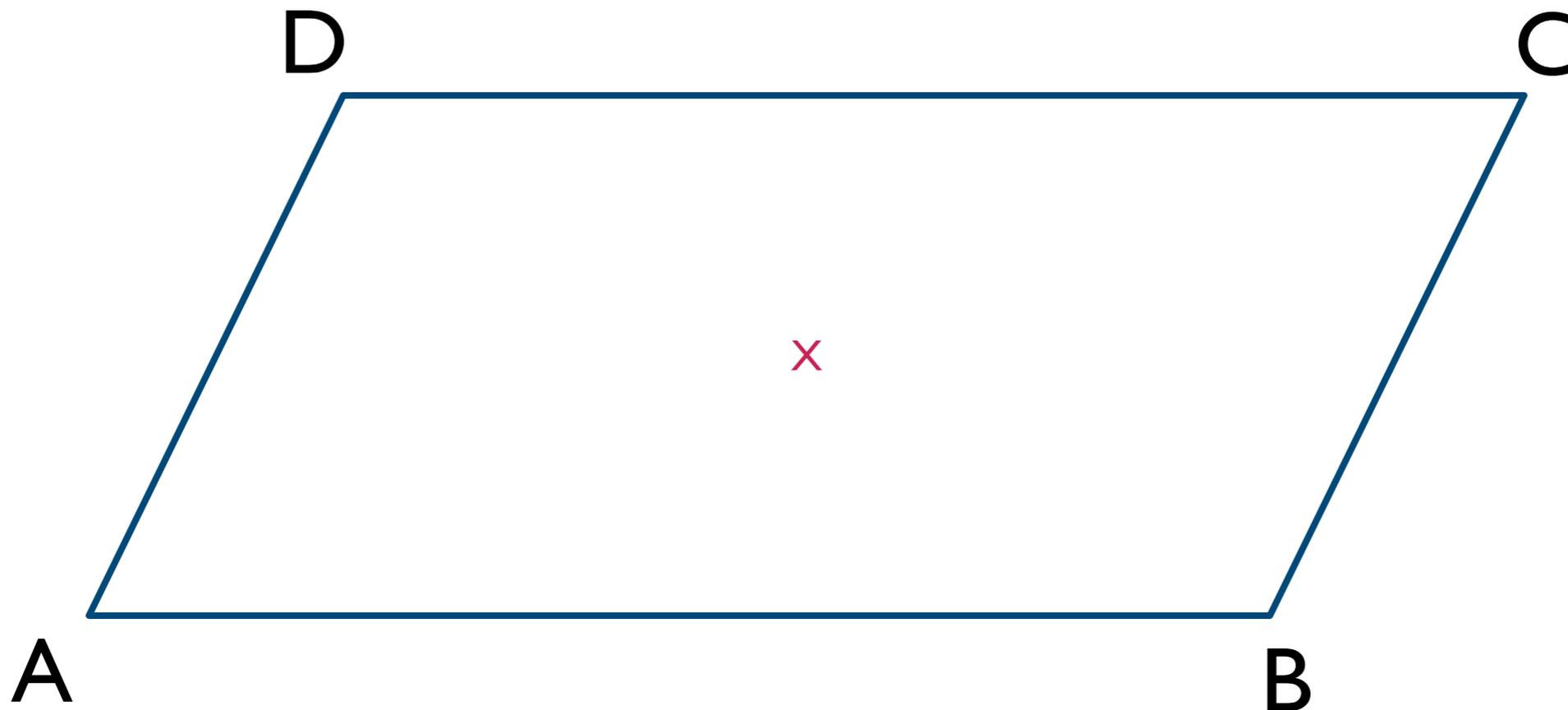
Deckabbildungen des Parallelogramms

Welche Deckabbildungen hat das Parallelogramm?



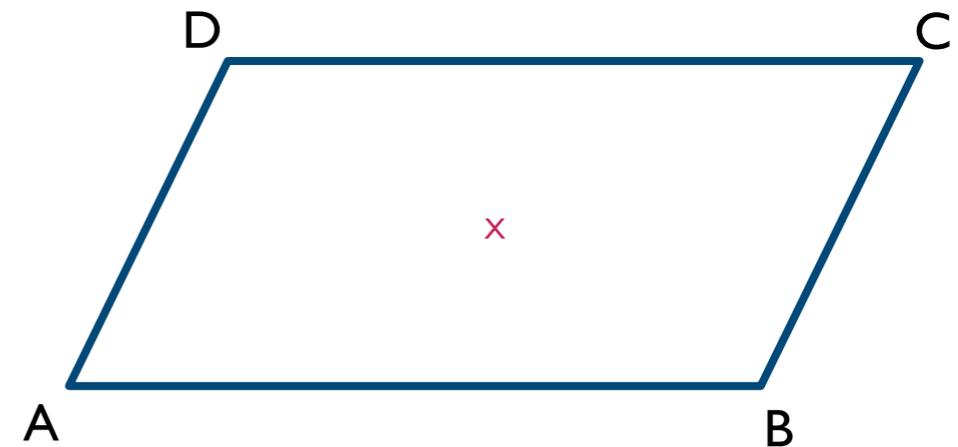
Deckabbildungen des Parallelogramms

1. Id = Identität
2. $D_{Z;180}$ = Drehung um Z um 180°



Deckabbildungen des Parallelogramms

Verknüpfungstafel



\circ (erst \rightarrow , dann \downarrow)	Id	$D_{Z;180}$
Id	Id	$D_{Z;180}$
$D_{Z;180}$	$D_{Z;180}$	Id

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Mitarbeit
und bis nächsten Dienstag (online)!

