Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung
Definitionen

Dr. habil. Philipp Hövel

May 23, 2024

1 Einführung: Dynamische Systeme

Definition 1 *Sei* $\mathbf{x}^*$ *Fixpunkt des dynamischem Systems* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$*. Dann heißt* $\mathbf{x}^*$ ***(Ljapunov-)stabil****, wenn es zu jeder Umgebung* U *von* $\mathbf{x}^*$ *eine Umgebung* V *von* $\mathbf{x}^*$ *gibt, so dass gilt:*

$$\mathbf{x} \in V \Rightarrow \Phi(\mathbf{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0.$$

Definition 2 *Ein Fixpunkt* $\mathbf{x}^*$ *heißt* ***asymptotisch stabil****, wenn zu* $\mathbf{x}^*$ *eine Umgebung existiert, so dass gilt:*

(i) $\Phi(U, t_2) \subset \Phi(U, t_1) \subset U$ *für* $0 < t_1 < t_2$.

(ii) $\lim_{t \to \infty} \Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^*$ *für alle* $\mathbf{x} \in U$.

Definition 3 *Sei* $\mathbf{F}$ *ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit* M *(für uns in aller Regel* $M = \mathbb{R}^n$*). Eine abgeschlossene, unter dem Fluss* Φ_t *von* $\mathbf{F}$ *invariante (*$\Phi_t(A) \subseteq A$*), unzerlegbare Teilmenge* $A \subset M$ *heißt* ***Attraktor****, falls*

(i) eine offene Umgebung U_0 *von* A*, d.h.* $A \subset U_0$*, existiert, so dass gilt:* $\Phi_t(U_0) \subseteq U_0$ *für* $t > 0$.

(ii) für alle V *mit* $A \subset V \subset U_0$ *existiert ein* $T > 0$*, so dass* $\Phi_t(U_0) \subseteq V$ *für* $t > T$.
(D.h.: Es gibt ein ***Attraktorbecken*** U_0*, aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor* A *läuft.)*

2 Bifurkationen

Definition 4 *Sei* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ *ein dynamisches System mit* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\mathbf{S}$ *ein* $(n-1)$*-dimensionaler Schnitt, durch den der Fluss von* $\mathbf{F}$ *hindurchfließt. Dann definiert die* ***Poincaré-Abbildung*** $\mathbf{P}$ *die Abbildung der aufeinander folgenden Durchstoßpunkte* $\mathbf{x}_k \in \mathbf{S}, k = 0, 1, 2, \ldots$*:*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_k).$$

3 Chaos

Definition 5 *Eine aperiodische Bewegung heißt* ***chaotisch****, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.*

Definition 6 *Die Stabilität eines (deterministisch) chaotischen Systems* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ *ist durch die* ***Ljapunov-Exponenten*** $\bar{\lambda}_j$ *gegeben:*

$$\bar{\lambda}_j = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_j(t)}{p_j(0)}.$$

Dabei bezeichnet $p_j(0)$ *eine n-dimensionale Kugel um Anfangswert* $\mathbf{x_0}$ *und* $p_j(t)$ *deren zeitliche Entwicklung gemäß des Flusses* Φ_t *von* $\mathbf{F}$.