Theoretische Physik Ia: Rechenmethoden der Mechanik Definitionen, Sätze, Formales…

Dr. habil. Philipp Hövel

February 6, 2025

1 Eindimensionale Analysis

Definition. Eine Funktion f heißt **differenzierbar** an der Stelle x_0, wenn der beidseitige Grenzwert der Differenzenquotienten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnet man als die **Ableitung von f an der Stelle** x_0, geschrieben $f'(x_0)$.

Ableitungsregeln:
Seien f, g, h differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

1. **Linearität:** Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

2. **Produktregel:**

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

3. **Kettenregel:** Für $h(x) = f\left(g(x)\right)$, d.h. $f\left(y\right)$ mit $y = g(x)$, gilt:

$$h'(x) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dy}}\right|_{y=g(x)} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dg}} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{dx}} = f'(g(x))\, g'(x).$$

4. **Quotientenregel:**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}.$$

5. **Ableitung einer inversen Funktion:** Für eine invertierbare Funktion $f(x)$, d.h. $x = f^{-1}(y)$, gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} f^{-1}(y) = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}\right|_{x=f^{-1}(y)}}.$$

Definition. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt **n-mal stetig differenzierbar**, wenn f im Intervall D n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}(x)$ stetig ist.
(Schreibweise: $f \in \mathcal{C}^n(D)$.)

Satz (Satz von Taylor). Jede Funktion $f \in \mathcal{C}^{n+1}(D)$ auf einem offenen Intervall D lässt sich für $x, x_0 \in D$ auf folgende Weise nach Potenzen entwickeln:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)^k + R_n(x)$$

mit Restglied $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\left(x - x_0\right)^{n+1}$ und ξ zwischen x und x_0.

Definition. Das **Integral** über $f(x)$ ist definiert als

$$F = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \lim_{n \to \infty} F_n = \lim_{n \to \infty} \int_a^b t_n(x)\mathrm{dx}$$

mit der zu f gehörigen Treppenfunktion, die die Werte $f\left(x_i\right)$, $i = 0, \ldots, n-1$ an den Stützstellen $x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}$ auf die entsprechenden Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ fortsetzt. Dabei gilt: $x_i = x_0 + i\frac{b-a}{n}$.

Satz (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung).
(i) Sei $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ eine stetige Funktion. Dann ist für jedes $x_0 \in I$ im Interval I die **Integralfunktion** $F : I \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x})\mathrm{d\tilde{x}},$$

differenzierbar und eine **Stammfunktion** von f.

(ii) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$ mit Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = F(b) - F(a).$$

Integrationsregeln:

1. **gleiche Integrationsgrenzen:**
$$\int_a^a f(x)\mathrm{dx} = 0.$$
2. **umgedrehte Integrationsgrenzen:**
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\mathrm{dx}.$$
3. **Additivität bzgl. der Integrationsgrenzen:**
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \int_b^c f(x)\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\mathrm{dx}.$$
4. **Linearität:** Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{dx} = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{dx}.$$
5. **Partielle Integration:**
$$\int_a^b (f'(x)\, g(x))\, \mathrm{dx} = f(x)\, g(x)|_a^b - \int_a^b (f(x)\, g'(x))\, \mathrm{dx}.$$
6. **Substitution:**
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(u(x))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dx}}\mathrm{dx} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\mathrm{dt}.$$

Satz (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in]a, b[:\ f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in [a, b] \ : \int_a^b f(x)\mathrm{dx} = f\left(x_0\right)\, (b - a).$$

2 Mehrdimensionale Analysis

Definition. Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$. Dann heißt die Ableitung nach einer Variablen (beim Festhalten aller anderen) **partielle Ableitung**:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

Satz (Satz von Schwarz). Für stetig differenzierbare Funktionen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen egal:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y).$$

Definition. Das **totale Differenzial** df von $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$\mathrm{df} := \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathrm{dx_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \mathrm{dx_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{dx_i}.$$

Definition. Für eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist der **Gradient** am Punkt $\mathbf{a} \in \Omega$ gegeben durch:

$$\mathrm{grad} f(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f(\mathbf{a}).$$

Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + (\nabla f(\mathbf{x_0})) \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{x_0}) \Delta \mathbf{x} + O\left(|\Delta \mathbf{x}|^3\right)$$

mit der **Hesse-Matrix**

$$\mathbf{H}(\mathbf{x_0}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \partial_{x_1} f(\mathbf{x_0}) & \cdots & \partial_{x_1} \partial_{x_n} f(\mathbf{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n} \partial_{x_1} f(\mathbf{x_0}) & \cdots & \partial_{x_n} \partial_{x_n} f(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix}$$

Definition. Für eine stetige Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist das **(zweidimensionale) Integral** über $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ gegeben durch:

$$\int_\Omega f(x,y) \mathrm{dx}\, \mathrm{dy} := \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{j=0}^{N_y - 1} \sum_{i=0}^{N_x - 1} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$$

mit $N_x = \frac{b-a}{\Delta x}$ und $N_y = \frac{d-c}{\Delta y}$.

Satz (Satz von Fubini).

$$\int_\Omega f(x,y)\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx}.$$

Definition. Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$:
Für eine stetige Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist das **Integral** über $\Omega = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ gegeben durch:

$$\int_\Omega f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{dx_1}\ldots\mathrm{dx_n} = \int_{I_1} \mathrm{dx_1} \int_{I_2} \mathrm{dx_2} \quad \cdots \int_{I_n} \mathrm{dx_n} f(x_1,\ldots,x_n).$$

Integrale und Notationen:

1. **Flächenintegral ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$):**

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \equiv \int_\Omega f(x,y) \quad \underbrace{\mathrm{dA}}_{\text{Flächenelement}}$$

2. **Volumenintegral ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$):**

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} &\equiv \int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d^3x} \\ &\equiv \int_\Omega f(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d^3x} \\ &\equiv \int_\Omega f(x,y,z) \quad \underbrace{\mathrm{dV}}_{\text{Volumenelement}} \end{aligned}$$

3. **Volumen von $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:**

$$V = \int_\Omega 1\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} \equiv \int_\Omega 1\,\mathrm{d^3x} \equiv \int_\Omega 1\,\mathrm{dV}$$

Polarkoordinaten: $r \in [0,\infty), \varphi \in [0,2\pi)$

$$\begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{dA} = r\,\mathrm{dr}\mathrm{d}\varphi$$

Kugelkoordinaten: $r \in [0,\infty), \varphi \in [0,2\pi), \theta \in [0,\pi]$

$$\begin{pmatrix} x(r,\theta,\varphi) \\ y(r,\theta,\varphi) \\ z(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{dV} = r^2\sin\theta\,\mathrm{dr}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Zylinderkoordinaten: $\rho \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), z \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{pmatrix} x(\rho,\varphi) \\ y(\rho,\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{dV} = \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{dz}$$

3 Vektoralgebra

Definition. Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit kartesischen Koordinaten $(a_1, \dots, a_n)$ bzw. $(b_1, \dots, b_n)$ ist definiert als eine Abbildung

$$\begin{aligned} (\bullet, \bullet) &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\longmapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n. \end{aligned}$$

Eigenschaften des Skalarprodukts: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

- **bilinear:**
  1. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \alpha\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
  2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$
- **symmetrisch:**
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$$
- **positiv definit:**
$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0 \quad \wedge \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$$
- Das Skalarprodukt ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform.
- Für $\varphi = \sphericalangle\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ folgt aus $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\,b\,\cos\varphi$:
  1. **Winkelberechnung:**
$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}\right)$$
  2. **Orthogonalität:**
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$
- **kartesische Basisvektoren:**
  Für $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:
$$\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Definition. Die **Länge/Norm** eines Vektors $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit kartesischen Koordinaten $(a_1, \dots, a_n)$ist definiert als

$$a \equiv |\mathbf{a}| \equiv \parallel \mathbf{a} \parallel := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Definition. Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten (a_1, a_2, a_3) bzw. (b_1, b_2, b_3) ist definiert als eine Abbildung

$$\begin{aligned} \bullet \times \bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &\longmapsto \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eigenschaften des Kreuzproduktes: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

- **bilinear:**
$$\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$
- **antisymmetrisch:**
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$
- im Allgemeinen **nicht assoziativ**:
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$
- **Jacobi-Indentität:**
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$
- Für $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ folgt aus $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a\, b\, \sin\varphi\, \hat{\mathbf{n}}$:
  1. **Flächenhalt** A des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms:
  $$A = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = a\, b\, \sin\varphi$$
  2. **Parallelität:**
  $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$
- **kartesische Basisvektoren:** Rechte-Hand-Regel
Für $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:
$$\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \varepsilon_{ijk}\, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \,\text{mit}\, i \neq j \neq k$$
d.h.
$$\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$$
und
$$\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = -\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = -\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = -\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$$
- Ausrichtung in dritte Dimension:
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a} \quad \wedge \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$$

Definition. Das **Levi-Citiva-Symbol** ist definiert als

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } ijk \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Graßmann-Identität: links-rechts – außen-innen

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Mehrfachprodukte:

- **bac-cab-Regel:**

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

- **Spatprodukt:**
  Volumen des von $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Parallelepipeds $= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k$$

- links-rechts – außen-innen:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ \Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= a\, b\, \sin\varphi \end{aligned}$$

4 Vektoranalysis

Definition. Ein **Vektorfeld** ist eine im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetige Abbildung

$$\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ v_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Definition. Ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ heißt $\mathcal{C}^s$**-Vektorfeld**, falls die Komponenten $v_1, \ldots, v_n$ s-fach stetig differenzierbar sind.

Definition. Ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ heißt **konservativ** (oder auch **Gradientenfeld, Potenzialfeld**), falls es sich als Gradient eines **Skalarfeldes** (oder auch **Potenzials**) ϕ schreiben lässt: $\mathbf{v} = \nabla\phi$.

Definition. Die **Rotation** (oder auch **Wirbeldichte**) eines Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{x}) \\ v_2(\mathbf{x}) \\ v_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\text{rot } \mathbf{v} \equiv \nabla \times \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{x}) \\ v_2(\mathbf{x}) \\ v_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

(oder auch $(\text{rot}\mathbf{v})_i = \sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$)

Definition. Die **Divergenz** (oder auch **Quellendichte**) eines Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{x}) \\ v_2(\mathbf{x}) \\ v_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\text{div } \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{x}) \\ v_2(\mathbf{x}) \\ v_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \partial_i v_i.$$

Definition. Der **Laplace-Operator** (angewendet auf ein Skalarfeld ϕ) ist definiert als: $\triangle := \text{div grad}$. Also:

$$\text{div grad}\phi(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1\phi \\ \partial_2\phi \\ \partial_3\phi \end{pmatrix} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

Angewendet auf ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ gilt:

$$\triangle\mathbf{A}(x) = \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Satz. Gradientenfelder sind wirbelfrei.

Satz. Jedes wirbelfreie Feld hat ein Potenzial.

Satz. Wirbelfelder sind quellenfrei.

Satz. Jedes quellenfreie Feld hat ein Vektorpotenzial.

Definition. Die **Parametrisierung** α **einer Raumkurve** C in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto \alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}.$$

Definition. Die Ableitung

$$\dot{\alpha}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n(t) \end{pmatrix}$$

liefert den **Tangentenvektor** an die von α parametrisierte Raumkurve C.

Definition. Eine Raumkurve heißt **regulär**, wenn gilt:

$$\dot{\alpha}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Satz. Für eine stetig differenzierbare **Parametrisierung** α der Kurve $C \subset \mathbb{R}^n$ gilt für die **Länge** L von C:

$$L(C) = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| \;\mathrm{dt} = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(t)^2} \,\mathrm{dt}.$$

Definition. Das **skalare Weg-/Kurvenintegral** von $f : \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x})$ über eine von α parametrisierte Kurve C ist definiert als:

$$\int_C f(\mathbf{x}) \,\mathrm{ds} := \int_a^b f(\alpha(t))\, |\dot{\alpha}(t)| \;\mathrm{dt}$$

mit dem **Bogenelement** $\mathrm{ds} = |\dot{\alpha}(t)|$ dt.

Definition. Das **vektorielle Weg-/Kurvenintegral** entlang einer von α parametrisierten Kurve C über das Vektorfeld $\mathbf{v}$ ist definiert als:

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} := \int_a^b \mathbf{v}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \,\mathrm{dt}$$

mit dem infinitesimalen **Tangentenvektor** $\mathrm{d}\mathbf{s} = \dot{\alpha}(t)\,\mathrm{dt}$.

Definition. Die **Parametrisierung Φ einer Fläche** in $\mathbb{R}^3$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung von einem zusammenhängenden Gebiet $B \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi : B \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \mathbf{x} = \Phi(u, v)$$

mit den **Tangentenvektoren** $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$.

Definition. Das **skalare Oberflächenintegral** einer skalaren Funktion $f : \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x})$ über eine von $\Phi : B \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \Phi(u.v) = \mathbf{x}$ parametrisierte Fläche F ist definiert als:

$$\int_F f(\mathbf{x})\,\mathrm{dA} := \int_B f(\mathbf{x}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| \mathrm{du}\,\mathrm{dv}$$

mit dem **Flächenelement** $\mathrm{dA} = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| \mathrm{du}\,\mathrm{dv}$.

Definition. Das **vektorielle Flussintegral** eines Vektorfeldes $\mathbf{v} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{v}(\mathbf{x})$ über eine von $\Phi : B \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \Phi(u.v) = \mathbf{x}$, parametrisierte Fläche F ist definiert als:

$$\int_F \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} := \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) \mathrm{du}\,\mathrm{dv}$$

mit dem **vektoriellen Flächenelement** $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}$.

Einheitsbasisvektoren von Kugelkoordinaten:
$r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = r\,\mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = r \sin\theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r \sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = r^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = r^2 \sin\theta\,\mathbf{e}_r$$

Einheitsbasisvektoren von Zylinderkoordinaten:
$\rho \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), z \in (-\infty, \infty)$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial \rho} \\ \frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\, \mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial z} \\ \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial z} \\ \frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}$$

Satz (Satz von Gauß). Für ein Flussintegral eines $\mathcal{C}^1$-Vektorfeldes $\mathbf{v} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{v}(\mathbf{x})$ über den Rand/Oberfläche ∂V eines Volumens V gilt:

$$\int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, \mathrm{dV}.$$

Satz (Satz von Stokes). Für ein Wegintegral eines $\mathcal{C}^1$-Vektorfeldes $\mathbf{v} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{v}(\mathbf{x})$ über den Rand ∂F einer Fläche F gilt:

$$\int_{\partial F} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}.$$

5 Komplexe Zahlen

6 Elemente der linearen Algebra

Definition. **Lineare Gleichungen** $L(u) = v$ sind definiert durch die Eigenschaften der **linearen Abbildung**/des **linearen Operators** L:

1. $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
2. $L(\alpha u) = \alpha L(u)$.

Definition. Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt **Vektorraum** über einem Körper $\mathbb{K}$ (meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), wenn für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ und $\lambda \cdot \mathbf{u} \in V$ **(Abgeschlossenheit)**
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ **(Assoziativität)**
3. $\exists\, \mathbf{0} : \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ **(neutrales Element)**
4. $\exists\, \mathbf{u}' : \mathbf{u}' + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ **(inverses Element)**
5. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ **(Kommutativität)**
6. $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$ **(Distributivität)**
7. $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}$
8. $(\lambda\mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u})$
9. $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Definition. Die Elemente eines Vektorraumes heißen **Vektoren**.

Definition. Eine nichtleere Teilemenge U eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V heißt **Untervektorraum**, wenn für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$
2. $\lambda \cdot \mathbf{u} \in U$.

Definition. Jeder Vektor der Form

$$\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{v_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}$$

heißt **Linearkombination** der Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$.

Definition. Die Menge aller Linearkombinationen aus $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ heißt ihr **Aufspann** (**lineare Hülle, Erzeugnis**): $\operatorname{span}\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$.

Definition. Ist $X \subseteq V$ und $\operatorname{span}(X) = U$ ein Teilraum von V (d.h.: Alle Elemente von U sind eine Linearkombination von X), dann heißt X **Erzeugendensystem** von U. (X erzeugt U.)

Definition. U heißt **endlich erzeugt**, wenn U ein endliches Erzeugendensystem hat.

Definition. Die Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}$ folgt: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

Alternativ/äquivalent:

Definition. Die Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ heißen **linear unabhängig**, wenn sich kein $\mathbf{v_i}$ als Linearkombination der anderen $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{i-1}}, \mathbf{v_{i+1}}, \ldots, \mathbf{v_n}$ darstellen lässt.

Definition. Die Menge $B = \{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ von Vektoren eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V heißt **Basis** von V, wenn sich jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ als genau eine Linearkombination $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b_1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{b_n}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ darstellen lässt.
Die durch $\mathbf{v}$ eindeutig bestimmten Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ heißen **Koordinaten** von $\mathbf{v}$ bzgl. der Basis B:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B .$$

Satz. $B = \{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ ist genau dann einen Basis von V, wenn gilt:

1. $\operatorname{span} B = V$
2. B ist linear unabhängig.

(Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.)

Definition. Sei B eine Basis aus n Vektoren eines endlich erzeugten Vektorraumes V. Dann heißt n die **Dimension** von V: $\dim(V) = n$.
Ist V nicht endlich erzeugt, setzen wir $\dim(V) = \infty$.

Satz. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
(Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis: *Basisauswahlsatz.*)
(Jede linear unabhängige Teilmenge von V kann durch Hinzunahme weiterer Vektoren zu einer Basis ergänzt werden: *Basisergänzungssatz*)

Aussagen zu Erzeugendensystem und Basis eines n-dimensionalen Vektorraumes V

1. Mehr als n Vektoren sind stets linear abhängig.
2. Je n linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis.
3. Jedes Erzeugendensystem von V mit n Elementen bildet eine Basis.

Satz. Sei $B = \{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ eine Basis von V. Dann ist eine lineare Abbildung L durch die Bilder der Basisvektoren $L(\mathbf{b_1}), \ldots, L(\mathbf{b_n})$ eindeutig bestimmt.

Matrizenrechnung

- Addition:
  - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
  - $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$
- skalare Multiplikation: $(\alpha\mathbf{A})_{ij} = \alpha a_{ij}$
- Multiplikation von Matrizen: $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n\times p}, \mathbf{C} \in \mathbb{K}^{m\times p}$
  - $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \equiv a_{ik}b_{kj}$ mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, p$
    Also: $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{K}^{m\times p}$
  - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{AB}$
  - $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
  - im Allgemeinen: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
  - $\mathbf{AB}$ nur definiert, wenn Anzahl der Spalten von $\mathbf{A}$ = Anzahl der Zeilen von $\mathbf{B}$.
  - $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \nRightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0} \vee \mathbf{B} = \mathbf{0}$
  - Skalarprodukt: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$

Rang einer Matrix: $L : V \longrightarrow W$ mit darstellender Matrix $\mathbf{M}_L$

- **Zeilenrang**:# linear unabhängiger Zeilenvektoren
- **Spaltenrang**:# linear unabhängiger Spaltenvektoren
- Zeilenrang = Spaltenrang = rang $(\mathbf{M}_L)$

- $L : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ **injektiv** $\Leftrightarrow$ rang $(\mathbf{M}_L) = n$
- $L : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ **surjektiv** $\Leftrightarrow$ rang $(\mathbf{M}_L) = m$
- $L : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ **bijektiv** $\Leftrightarrow$ rang $(\mathbf{M}_L) = m = n$

Definition. Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **invertierbar** (**regulär**), wenn eine Matrix $\mathbf{B}$ existiert mit: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{1}$ mit der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$.
$\mathbf{B}$ ist eindeutig bestimmt und heißt **Inverse** zu $\mathbf{A}$: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Definition. Gegeben sei eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Die **Determinante** von $\mathbf{A}$ ist definiert als:

- Für $n = 1$, d.h. $\mathbf{A} = a_{11}$: $\det \mathbf{A} = a_{11}$.
- Für $n \geq 2$, d.h. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$: $\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbf{A_{i1}}$.

Dabei geht $\mathbf{A_{ij}} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ aus $\mathbf{A}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervor.

Eigenschaften der Determinate

- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$
- $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$
- $\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow$ rang $\mathbf{A} < n$ ($\mathbf{A}$ singulär)
- $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow$ rang $\mathbf{A} = n$ ($\mathbf{A}$ regulär/invertierbar)
- $\det \mathbf{A} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det \mathbf{A_{rs}}$ (Entwicklung nach r-ter Zeile)
- $\det \mathbf{A} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det \mathbf{A_{rs}}$ (Entwicklung nach s-ter Spalte)

Definition. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{K}$ **Eigenwert** von $\mathbf{A}$, wenn es Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ gibt mit $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$.
$\mathbf{v}$ heißt **Eigenvektor** zum Eigenwert λ.
Der Unterraum $\mathrm{Eig}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n | \mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}\}$ heißt **Eigenraum** zum Eigenwert λ.

Definition. Die Funktion $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \det(\mathbf{A} - x\mathbb{1})$ heißt **charakteristisches Polynom** von $\mathbf{A}$.
Es gilt: λ ist Eigenwert von $\mathbf{A}$. $\Leftrightarrow \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

Definition. Im Komplexen ($\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, auch ohne Imaginärteile) faktorisiert das charakteristische Polynom:

$$\chi_{\mathbf{A}}(x) = (\lambda_1 - x)^{k_1} \cdots (\lambda_r - x)^{k_r}$$

mit $k_1 + \cdots + k_r = n$.
Dann heißt k_i **algebraische Vielfachheit**.
$\dim \mathrm{Eig}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ heißt **geometrische Vielfachheit**.
Für $\dim \mathrm{Eig}_{\mathbf{A}}(\lambda) > 1$ heißt der Eigenwert λ **entartet**.

Definition. $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn eine invertierbare Matrix $\mathbf{S}$ existiert, so dass

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

Diagonalform hat.

Satz. $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar, genau dann wenn eine Basis aus Eigenvektoren existiert.
Die Spalten der zugehörigen Basistransformationsmatrix $\mathbf{S}$ sind diese Eigenvektoren.

Definition. Das **komplexe Skalarprodukt** zwischen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ is definiert als

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i = (\mathbf{a}^*)^T \mathbf{b} \equiv (\bar{\mathbf{a}})^T \mathbf{b}.$$

´

Satz. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ (für uns: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) eine reell symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix. Dann gilt:

1. $\mathbf{A}$ hat n reelle Eigenwerte.
2. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
3. $\mathbf{A}$ ist orthogonal (bzw. unitär) diagonalisierbar, d.h.: Es existiert eine orthogonale (bzw. unitäre) Matrix $\mathbf{S}$ mit $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ (bzw. $\mathbf{D} = \mathbf{S}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{S}$).

Matrizen:

- transponiert: $(\mathbf{A})_{ij}^T = (\mathbf{A})_{ji}$
- adjungiert (hermitesch transponiert): $\mathbf{A}^\dagger \equiv \mathbf{A}^+ \equiv \mathbf{A}^H = \left(\mathbf{A}^T\right)^*$, d.h. $(\mathbf{A})_{ij}^\dagger = (\mathbf{A})_{ji}^* \equiv \overline{(\mathbf{A})}_{ji}$
- symmetrisch: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
- orthogonal: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbb{1}$ (Zeilen- und Spaltenvektoren bilden ein **Orthogonalsystem**)
- unitär ($\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$): $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbb{1}$
- hermitesch/selbstadjungiert: $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$

7 Differenzialgleichungen (DGLs)

Begriffe:

- **gewöhnliche** DGL: nur Funktionen einer Variablen
- **partielle** DGL: Funktionen mehrerer Variablen
- DGL n**-ter** Ordnung: Ableitungen bis n-te Ordnung
- Menge aller Lösungen (**allgemeine Lösung**) enthält n Integrationskonstanten (gegeben durch **Anfangs-** oder **Randbedingungen**).
- **lineare** DGL: enthält Funktionen und Ableitungen in 1. Potenz.
- **inhomogene** DGL: mit additivem Term
- **homogene** DGL: ohne additivem Term

Lösungsstrategien:

- direkte Integration
- Trennung der Variablen
- Ansatz/Raten
- Variation der Konstanten
- Potenzreihenansatz
- Separationsansatz (partielle DGLs)