Theoretische Physik Ia: Rechenmethoden der Mechanik Definitionen, Sätze, Formales…

Dr. habil. Philipp Hövel

November 14, 2024

1 Eindimensionale Analysis

Definition. Eine Funktion f heißt **differenzierbar** an der Stelle x_0, wenn der beidseitige Grenzwert der Differenzenquotienten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnet man als die **Ableitung von f an der Stelle** x_0, geschrieben $f'(x_0)$.

Ableitungsregeln:
Seien f, g, h differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

1. **Linearität:** Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

2. **Produktregel:**

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

3. **Kettenregel:** Für $h(x) = f\,(g(x))$, d.h. $f\,(y)$ mit $y = g(x)$, gilt:

$$h'(x) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dy}}\right|_{y=g(x)} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dg}} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{dx}} = f'(g(x))\, g'(x).$$

4. **Quotientenregel:**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}.$$

5. **Ableitung einer inversen Funktion:** Für eine invertierbare Funktion $f(x)$, d.h. $x = f^{-1}(y)$, gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} f^{-1}(y) = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}\right|_{x=f^{-1}(y)}}.$$

Definition. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt **n-mal stetig differenzierbar**, wenn f im Intervall D n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}(x)$ stetig ist.
(Schreibweise: $f \in \mathcal{C}^n(D)$.)

Satz (Satz von Taylor). Jede Funktion $f \in \mathcal{C}^{n+1}(D)$ auf einem offenen Intervall D lässt sich für $x, x_0 \in D$ auf folgende Weise nach Potenzen entwickeln:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}\left(x_0\right) \left(x - x_0\right)^k + R_n(x)$$

mit Restglied $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(\xi\right) \left(x - x_0\right)^{n+1}$ und ξ zwischen x und x_0.

Definition. Das **Integral** über $f(x)$ ist definiert als

$$F = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\mathrm{dx}$$

mit der zu f gehörigen Treppenfunktion, die die Werte $f\left(x_i\right)$, $i = 0, \ldots, n-1$ an den Stützstellen $x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}$ auf die entsprechenden Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ fortsetzt. Dabei gilt: $x_i = x_0 + i\frac{b-a}{n}$.

Satz (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung).
(i) Sei $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ eine stetige Funktion. Dann ist für jedes $x_0 \in I$ im Interval I die **Integralfunktion** $F : I \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x})\mathrm{d\tilde{x}},$$

differenzierbar und eine **Stammfunktion** von f.

(ii) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$ mit Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = F(b) - F(a).$$

Integrationsregeln:

1. **gleiche Integrationsgrenzen:**
$$\int_a^a f(x)\mathrm{dx} = 0.$$

2. **umgedrehte Integrationsgrenzen:**
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\mathrm{dx}.$$

3. **Additivität bzgl. der Integrationsgrenzen:**
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \int_b^c f(x)\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\mathrm{dx}.$$

4. **Linearität:** Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{dx} = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{dx}.$$

5. **Partielle Integration:**
$$\int_a^b \left(f'(x)\, g(x)\right) \mathrm{dx} = \left. f(x)\, g(x)\right|_a^b - \int_a^b \left(f(x)\, g'(x)\right) \mathrm{dx}.$$

6. **Substitution:**
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(u(x))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dx}}\mathrm{dx} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\mathrm{dt}.$$

Satz (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)*.* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion in $[a,b]$ und differenzierbar in $]a,b[$. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in]a,b[:\ f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)*.* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in [a,b]\ :\ \int_a^b f(x)\mathrm{dx} = f\left(x_0\right)\,(b-a).$$

2 Mehrdimensionale Analysis

Definition*.* Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \longmapsto f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$. Dann heißt die Ableitung nach einer Variablen (beim Festhalten aller anderen) **partielle Ableitung**:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n\right) - f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\Delta x_i}.$$

Satz (Satz von Schwarz). Für stetig differenzierbare Funktionen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen egal:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y).$$

Definition. Das **totale Differenzial** df von $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$\mathrm{df} := \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{dx_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{dx_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{dx_i}.$$

Definition. Für eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist der **Gradient** am Punkt $\mathbf{a} \in \Omega$ gegeben durch:

$$\mathrm{grad} f(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f(\mathbf{a}).$$

Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + (\nabla f(\mathbf{x_0})) \cdot \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{x_0})\Delta\mathbf{x} + O\left(|\Delta\mathbf{x}|^3\right)$$

mit der **Hesse-Matrix**

$$\mathbf{H}(\mathbf{x_0}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} f(\mathbf{x_0}) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(\mathbf{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(\mathbf{x_0}) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{x_n} f(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix}$$

Definition. Für eine stetige Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist das **(zweidimensionale) Integral** über $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ gegeben durch:

$$\int_\Omega f(x,y)\mathrm{dx\,dy} := \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{j=0}^{N_y - 1} \sum_{i=0}^{N_x - 1} f\left(x_i, y_j\right) \Delta x \Delta y$$

mit $N_x = \frac{b-a}{\Delta x}$ und $N_y = \frac{d-c}{\Delta y}$.

Satz (Satz von Fubini).

$$\int_\Omega f(x,y)\mathrm{dx\,dy} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy} = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}.$$

Definition. Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$:
Für eine stetige Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist das **Integral** über $\Omega = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ gegeben durch:

$$\int_\Omega f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{dx_1 \ldots dx_n} = \int_{I_1} \mathrm{dx_1} \int_{I_2} \mathrm{dx_2} \quad \cdots \int_{I_n} \mathrm{dx_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Integrale und Notationen:

1. **Flächenintegral ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$):**

$$\int_\Omega f(x,y)\, \mathrm{dx\, dy} \equiv \int_\Omega f(x,y) \quad \underbrace{\mathrm{dA}}_{\text{Flächenelement}}$$

2. **Volumenintegral ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$):**

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y,z)\, \mathrm{dx\, dy\, dz} &\equiv \int_\Omega f(x,y,z)\, \mathrm{d^3x} \\ &\equiv \int_\Omega f(x_1, x_2, x_3)\ \mathrm{d^3x} \\ &\equiv \int_\Omega f(x,y,z) \quad \underbrace{\mathrm{dV}}_{\text{Volumenelement}}\end{aligned}$$

3. **Volumen von $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:**

$$V = \int_\Omega 1\, \mathrm{dx\, dy\, dz} \equiv \int_\Omega 1\, \mathrm{d^3x} \equiv \int_\Omega 1\, \mathrm{dV}$$