Theoretische Physik Ia

Rechenmethoden der Mechanik – Tutorium 06

A12: Satz von Schwarz

A15: Plotten/Skizzieren

Rückmeldung - Stimmungsbild

Satz von Schwarz

Aufgabe 12 *Satz von Schwarz, Vertauschen der partiellen Ableitungen (9 Punkte)*

In physikalischen Anwendungen gilt der Satz von Schwarz fast immer. Hier wollen wir den Satz einmal bestätigen, dann ein Gegenbeispiel untersuchen. Betrachtet dazu die beiden Funktionen

$$f_1(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2}\sin(y) \quad \text{und} \quad f_2(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} \text{ mit } f_2(0,0) = 0,$$

a) Welche Bedingungen müssen an diese Funktion f gestellt werden, damit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

gilt? *(1 Punkt)*

b) Berechnet $\partial_x\partial_y f_1(x,y)$ und $\partial_y\partial_x f_1(x,y)$. Gilt der Satz von Schwarz? *(4 Punkte)*

c) Zeigt, dass der Satz von Schwarz bei $(x,y) = (0,0)$ für f_2 nicht gilt.

Anleitung: Berechnet zunächst $\partial_x f_2(x,y)$ und $\partial_y f_2(x,y)$. Bestimmt nun $\partial_y\partial_x f_2(x,y)$ sowie $\partial_x\partial_y f_2(x,y)$, indem ihr den Differenzenquotienten bei $(0,0)$ auswerten.
Bestätigt, dass die Voraussetzung des Satzes von Schwarz tatsächlich verletzt ist, indem ihr zeigt, dass $\partial_x\partial_x f_2(x,y)$ bei $(0,0)$ nicht stetig ist. *(4 Punkte)*

a) Alle Ableitungen müssen im betrachteten Punkt / Intervall stetig sein

b) $f_1 = e^{-x^2} \sin y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = -2x e^{-x^2} \cdot \cos y$

$\rightarrow \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = -2x e^{-x^2} \cos y$

gilt $f_{1_{xy}} = f_{1_{yx}}$

c) f_2: $\partial_x f_2 = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$; $\partial_y f_2 = x\frac{(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$

Zweite Abl. in Punkt $(0,0)$ direkt mit Differenzenquotient:

$$\partial_y(\partial_x f_2)(0,0) \overset{x=0}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\frac{-h^4}{h^4}-0\right) = -1$$

$$\partial_x(\partial_y f_2)(0,0) \overset{y=0}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\frac{+h^4}{h^4}-0\right) = +1$$

$\rightarrow$ 2. Abl. an $(0,0)$ nicht gleich

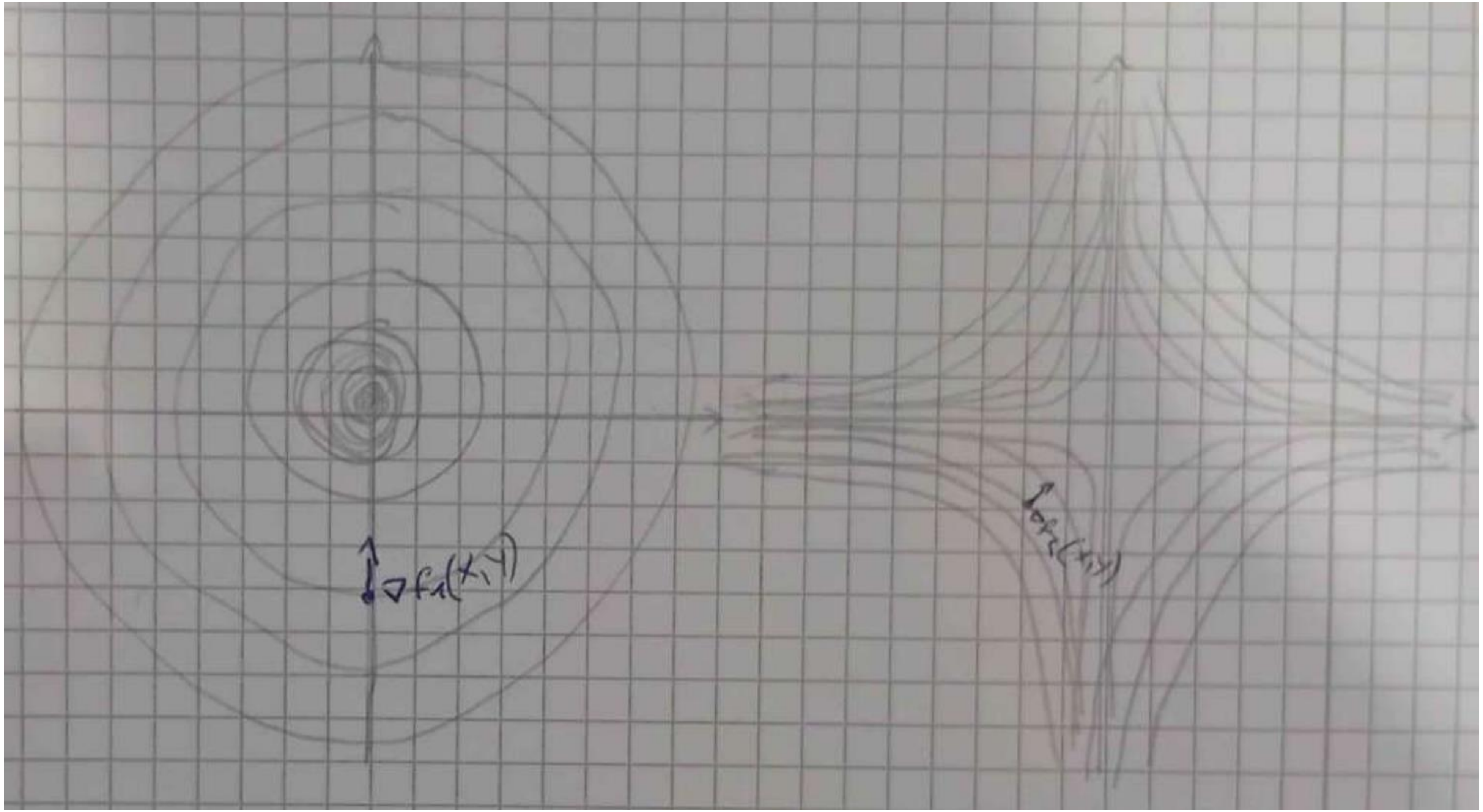
klar da eg: $\partial_x^2 f_2 = -\frac{4xy^3x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3}$ an $x=0$, $y=0$ nicht stetig!!!

A15: Plotten/Skizzieren

b) Skizziert die Höhenlinien der Funktionen $f_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und $f_2(x, y) = -x^2y^2$. Ihr dürfen dabei gerne ein geeignetes Computerprogramm zu Rate ziehen. *(2 Punkte)*

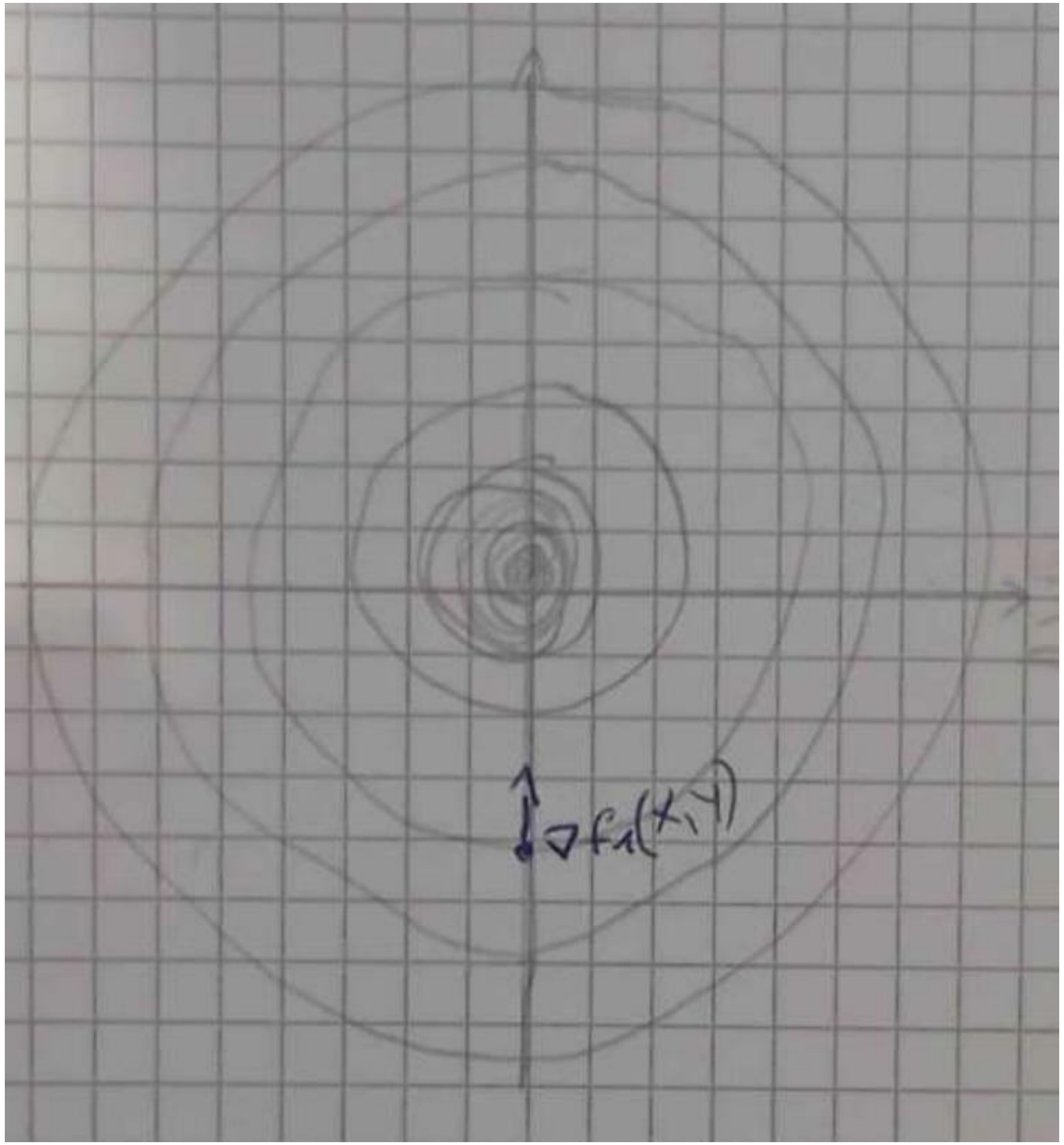
c) Berechnet die Gradienten $\nabla f_1(x, y)$ und $\nabla f_2(x, y)$. *(2 Punkte)*

d) Zeichnen die Gradienten in die Skizzen mit den Höhenlinien ein. Welche Richtung hat der Gradient? *(2 Punkte)*
Hinweis: Der Gradientenvektor einer Funktion an einem bestimmten Punkt steht stets senkrecht auf der Höhenlinie der Funktion, die diesen Punkt durchläuft.

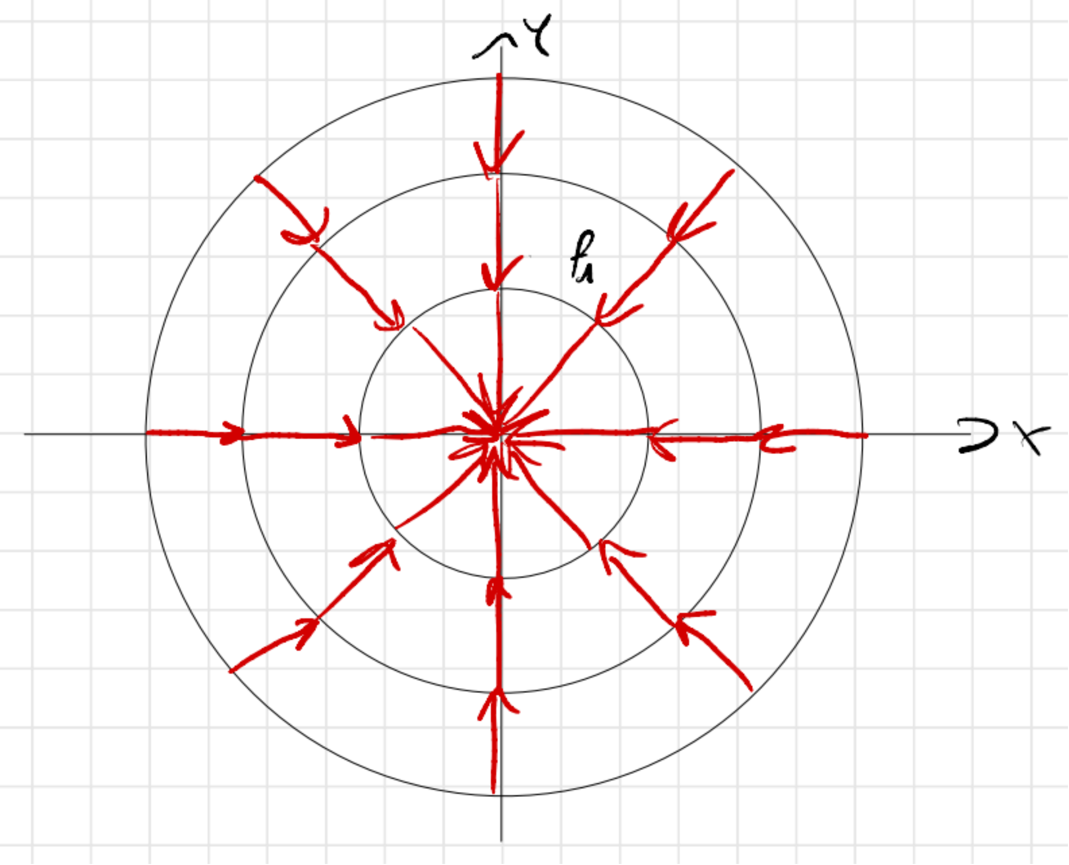


UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

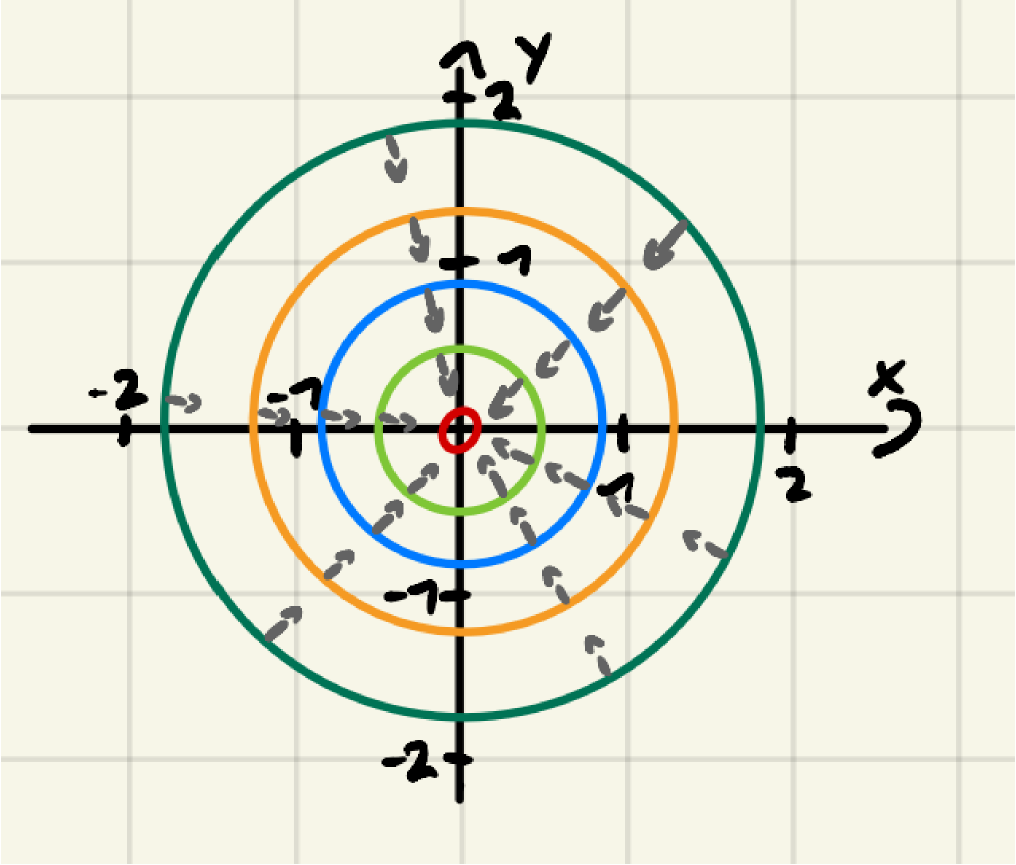
Wofür gibt es Punkte? Was fehlt?



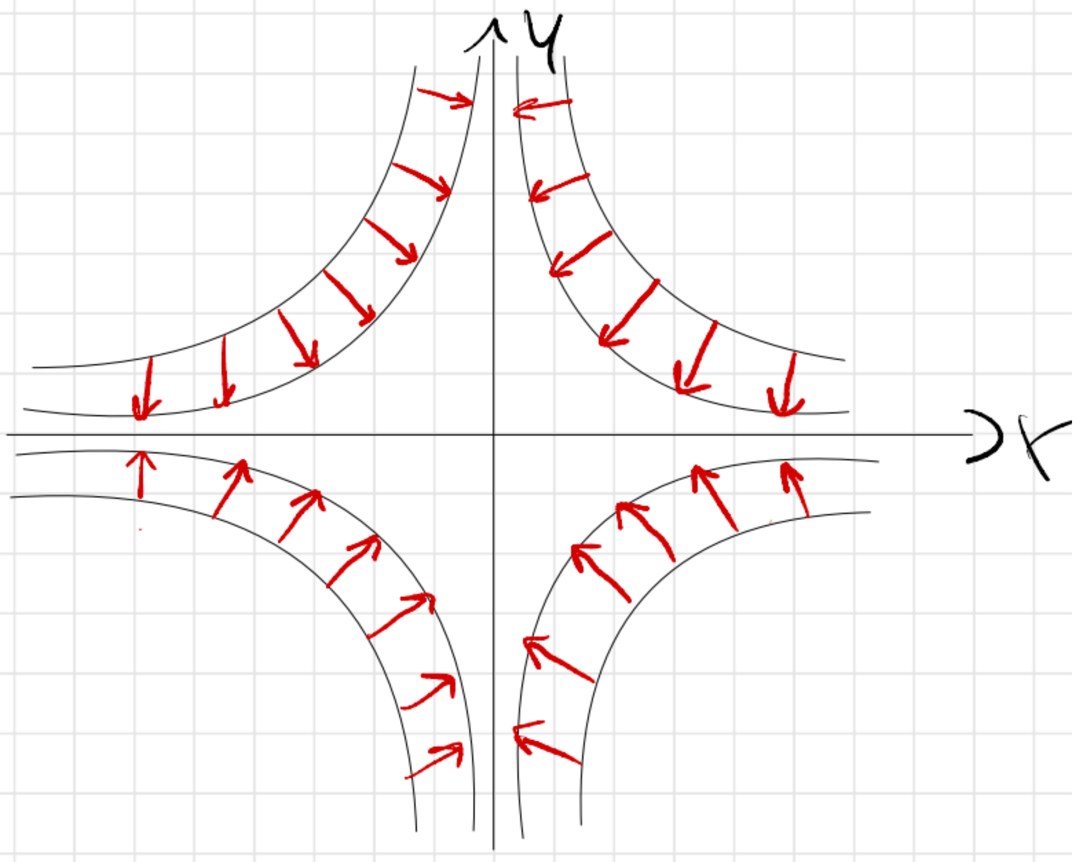
- Achsenbeschriftungen
- Gradient existiert in jedem Punkt (x,y)
- Länge der Pfeile wichtig
- Werte an den Höhenlinien
- Schlüsselorte (Ursprung…)

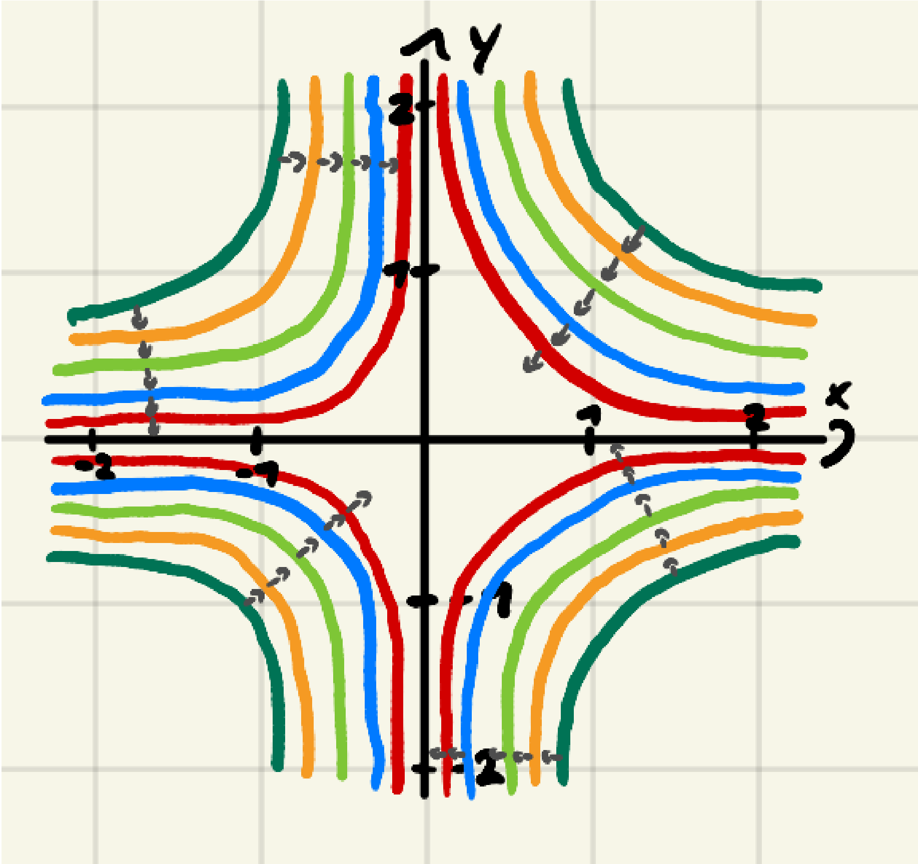


Y
X

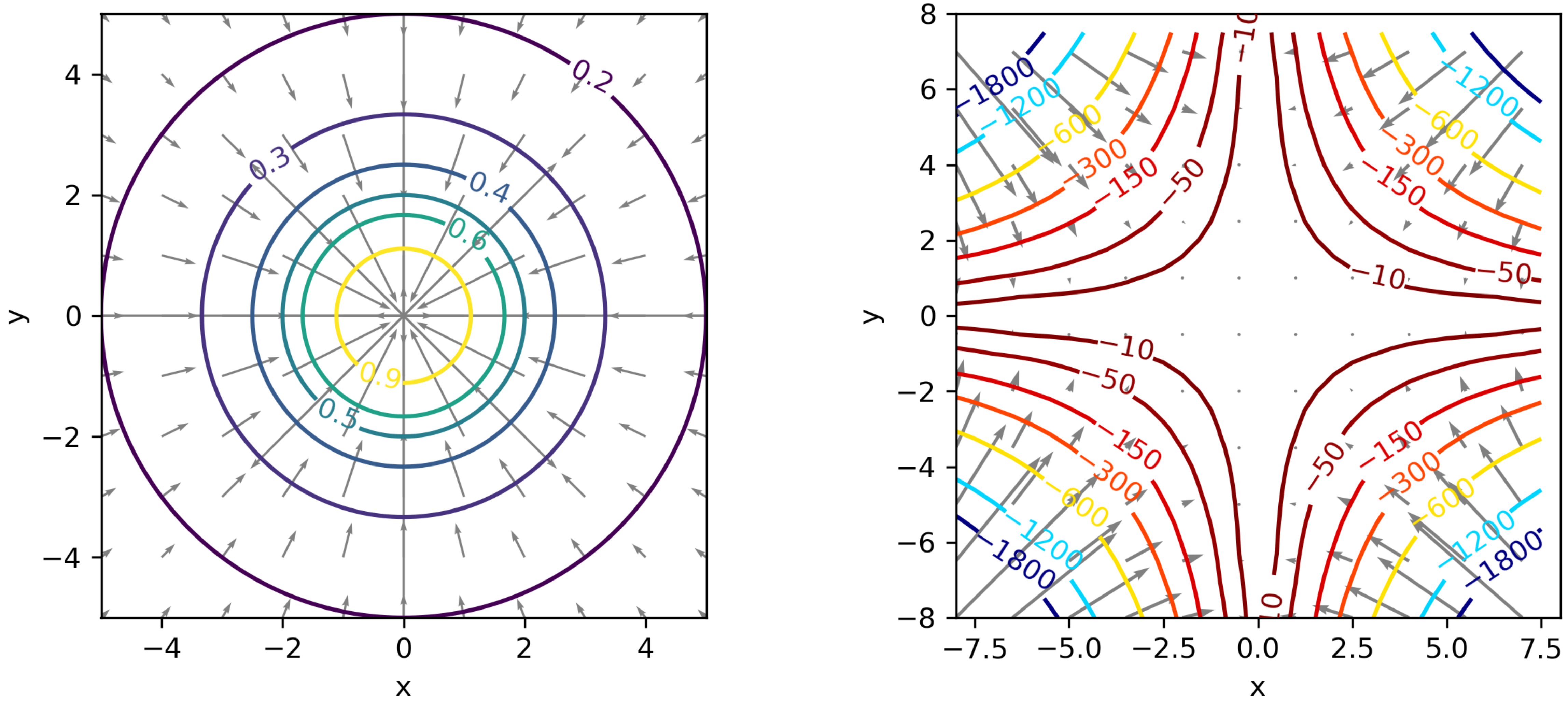


Y
X
2
1
-2
-1


y
x


y
x
2
1
-1
-2
1
2
-2
-1

Philipps Vorschlag



Rückmeldung - Stimmungsbild

Sonstiges:

- Motivation aktuell niedrig, weil schlechtes Wetter
- Studium macht Spaß und Motivation ist auch vorhanden.

  Ohne Analysis wäre es aber besser.
- Nicht wirklich motiviert, manchmal macht es Spaß, manchmal überhaupt nicht

Rückmeldung - Stimmungsbild

Schwierigkeiten beim Studienstart (Hier hat es gehakt…) :

- Tempo hoch/viel Stoff
- Zeitmanagement
- Formalitäten: mathematische Symbolik
- "Ich kenne niemanden"

Rückmeldung - Stimmungsbild (Tipps&Tricks)

- Etwas zu einem Thema aus dem Studium lesen, was man sehr spannend findet
  => steigert die Motivation
- Vorbereitung und Anfang Nachbereitung im Zug
- Man gewöhnt sich ein gutes Time Management an, läuft immer besser
- neue Verfahren des Zeitmanagements lernen
- Übungsaufgaben rechnen ist das Wichtigste.
- Kontakt zu höheren Semestern bilden
- direkt von Beginn an alles nach-/vorzubereiten, um in die Routine zu kommen.

Wer kennt das?

Future Skills für Studierende

"Lernen Sie schon heute, wie Sie Ihre persönlichen Ziele erreichen können, um in der Arbeitswelt von morgen erfolgreich zu bestehen! Das hilft Ihnen, auch im Studium. Denn schon hier müssen Sie Ihre Lernziele sowie Ihre Lern- und Arbeitsprozesse eigenständig initiieren, regulieren und reflektieren, gerade auch bei Lehrveranstaltungen mit verstärktem Selbststudium und in der Prüfungsvorbereitung. Dabei kommt es auf Sie selber an – und Sie können es gezielt lernen!"

Quelle: https://www.uni-saarland.de/studieren/digitalelehre/future-skills-fuer-studierende.html

Erinnerung: offene Sprechstunde

- Max Lauer
- Dienstags 12-14 Uhr im E2 6, Raum E0.12, Start: 29.10.
- Musterlösungen der Übungsblätter
- Verständnisfragen zur Vorlesung
- Kummerkasten
- …

Bis 28.11.