



Theoretische Physik Ia

Rechenmethoden der Mechanik – Tutorium 11

komplexe Einheitswurzeln

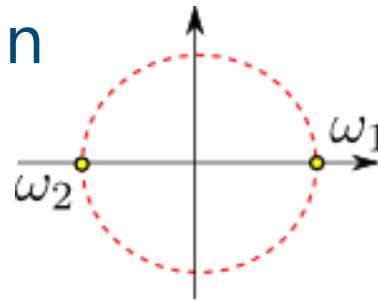
lineare Unabhängigkeit

Matrixoperationen

komplexe (Einheits-)Wurzeln

1. Wurzeln aus 1

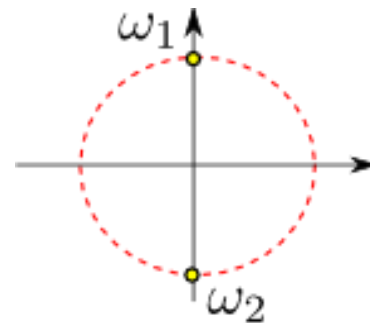
(n-te Einheitswurzeln)



$$n = 2$$

$$\{1, -1\}$$

2. Wurzeln aus -1



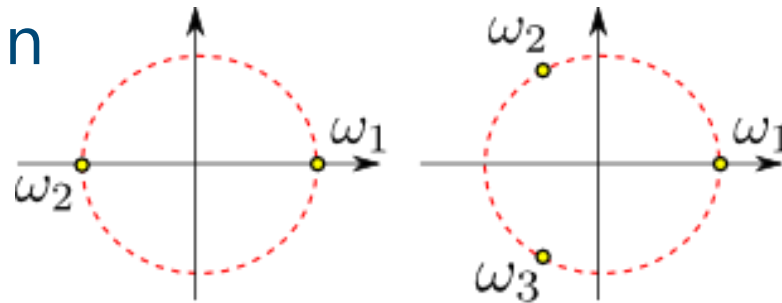
$$n = 2$$

$$\{i, -i\}$$

komplexe (Einheits-)Wurzeln

1. Wurzeln aus 1

(n-te Einheitswurzeln)

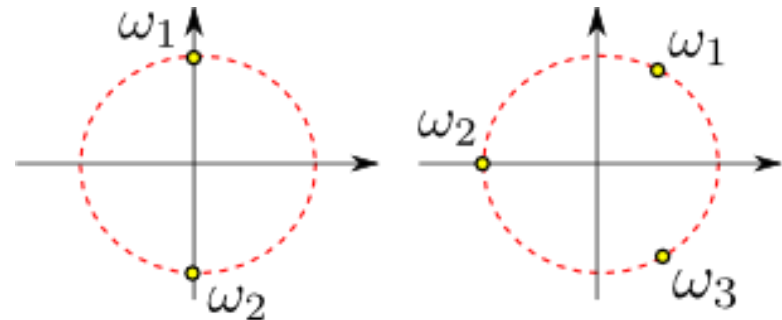


$n = 2$

$n = 3$

$$\{1, -1\} \quad \left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$$

2. Wurzeln aus -1



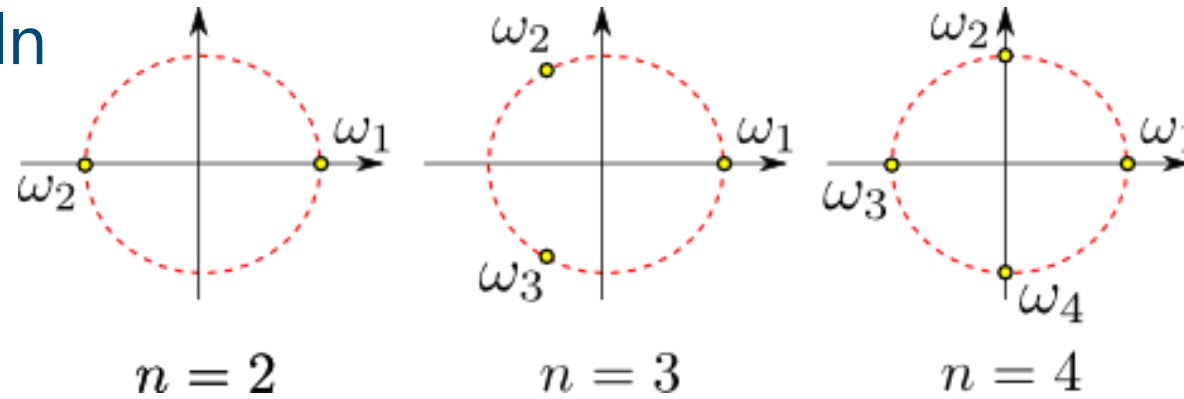
$n = 2$

$n = 3$

$$\{i, -i\} \quad \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}}, \underbrace{e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}}}_{e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\pi}}, \underbrace{e^{i\frac{\pi+4\pi}{3}}}_{e^{i\frac{5\pi}{3}}} \right\}$$

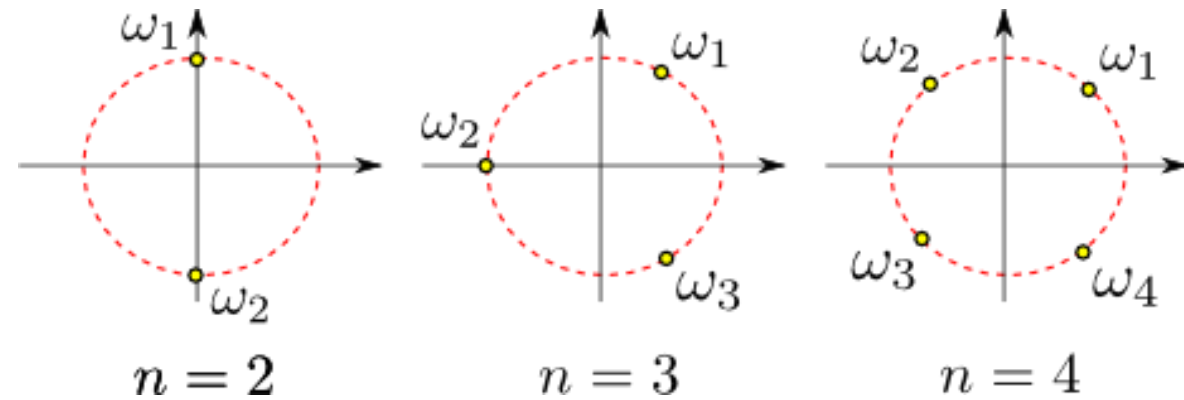
komplexe (Einheits-)Wurzeln

1. Einheitswurzeln aus 1



$$\{1, -1\} \quad \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\} \quad \left\{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\} = \{1, i, -1, -i\}$$

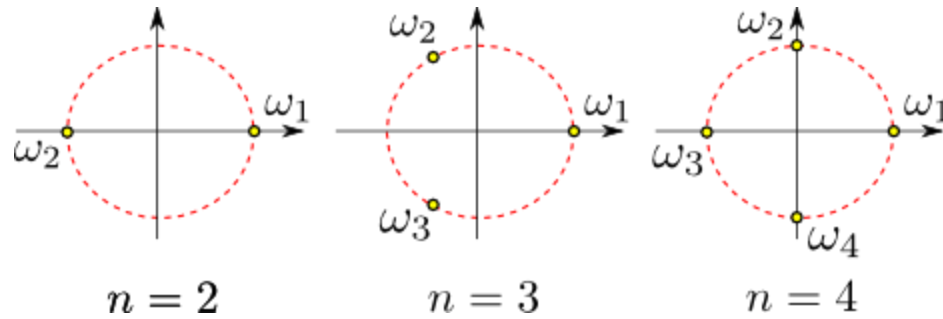
2. Wurzeln aus -1



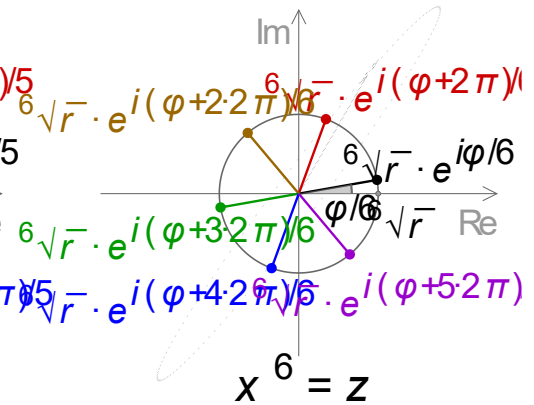
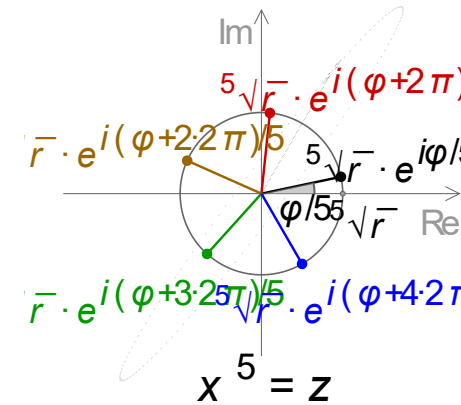
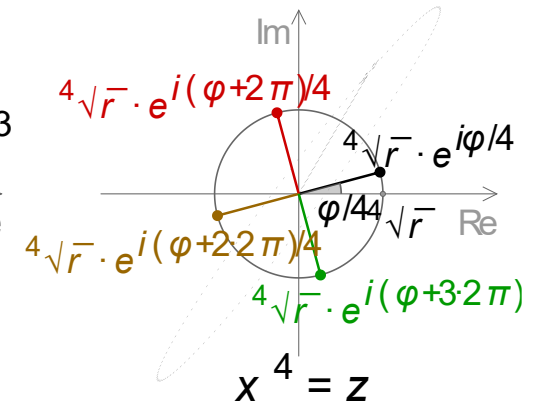
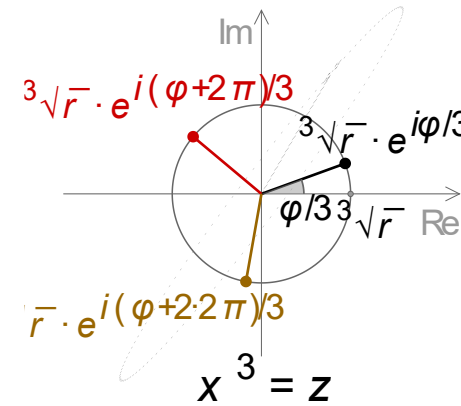
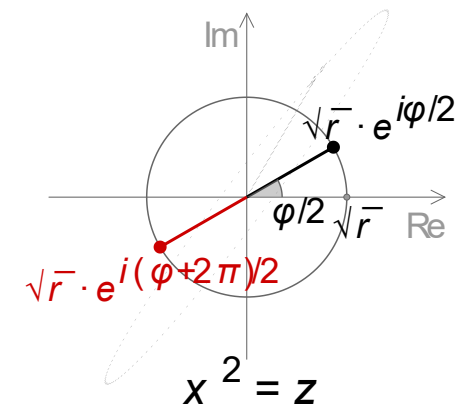
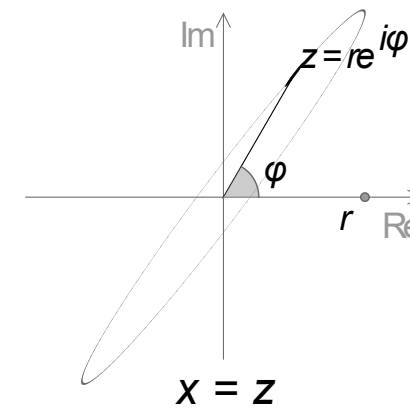
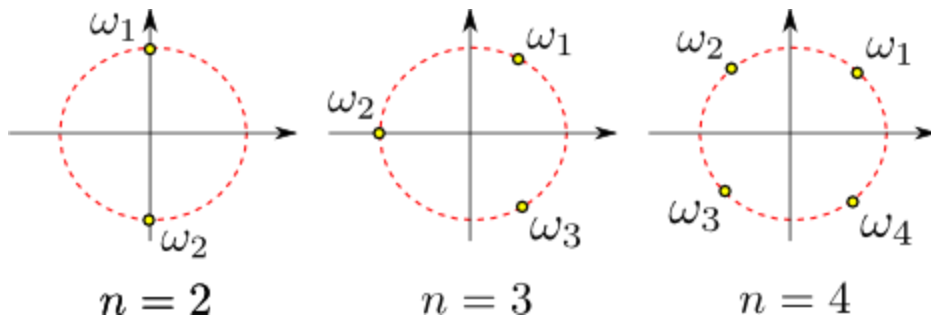
$$\{i, -i\} \quad \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}, \underbrace{e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}}}_{e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})}=e^{i\pi}}, \underbrace{e^{i\frac{\pi+4\pi}{3}}}_{e^{i\frac{5\pi}{3}}}\right\} \quad \left\{e^{i\frac{\pi}{4}}, \underbrace{e^{i\frac{\pi+2\pi}{4}}}_{e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})}}, \underbrace{e^{i\frac{\pi+4\pi}{4}}}_{e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)}}, \underbrace{e^{i\frac{\pi+6\pi}{4}}}_{e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})}}\right\}$$

komplexe (Einheits-)Wurzeln

1. Wurzeln aus 1 (n-te Einheitswurzeln)



2. Wurzeln aus -1



komplexe Einheitswurzeln

3. Wurzeln aus $z = -2 + 2i$

1. Bestimme Betrag und Argument
2. Berechne alle 3 Wurzeln
 - Betrag
 - Argumente
3. Zeichne die Ergebnisse in der komplexen Ebene ein

3. Wurzeln aus $z = -2 + 2i$

1. Bestimme Betrag und Argument: $r = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}, \varphi = \frac{3\pi}{4}$

2. Berechne alle 3 Wurzeln

- Betrag
- Argumente

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$
$$\varphi_0 = \frac{3\pi}{4} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi_n = \frac{\pi}{4} + \frac{n2\pi}{3} \Rightarrow \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\}$$

3. Zeichne die Ergebnisse
in der komplexen Ebene ein

komplexe Einheitswurzeln

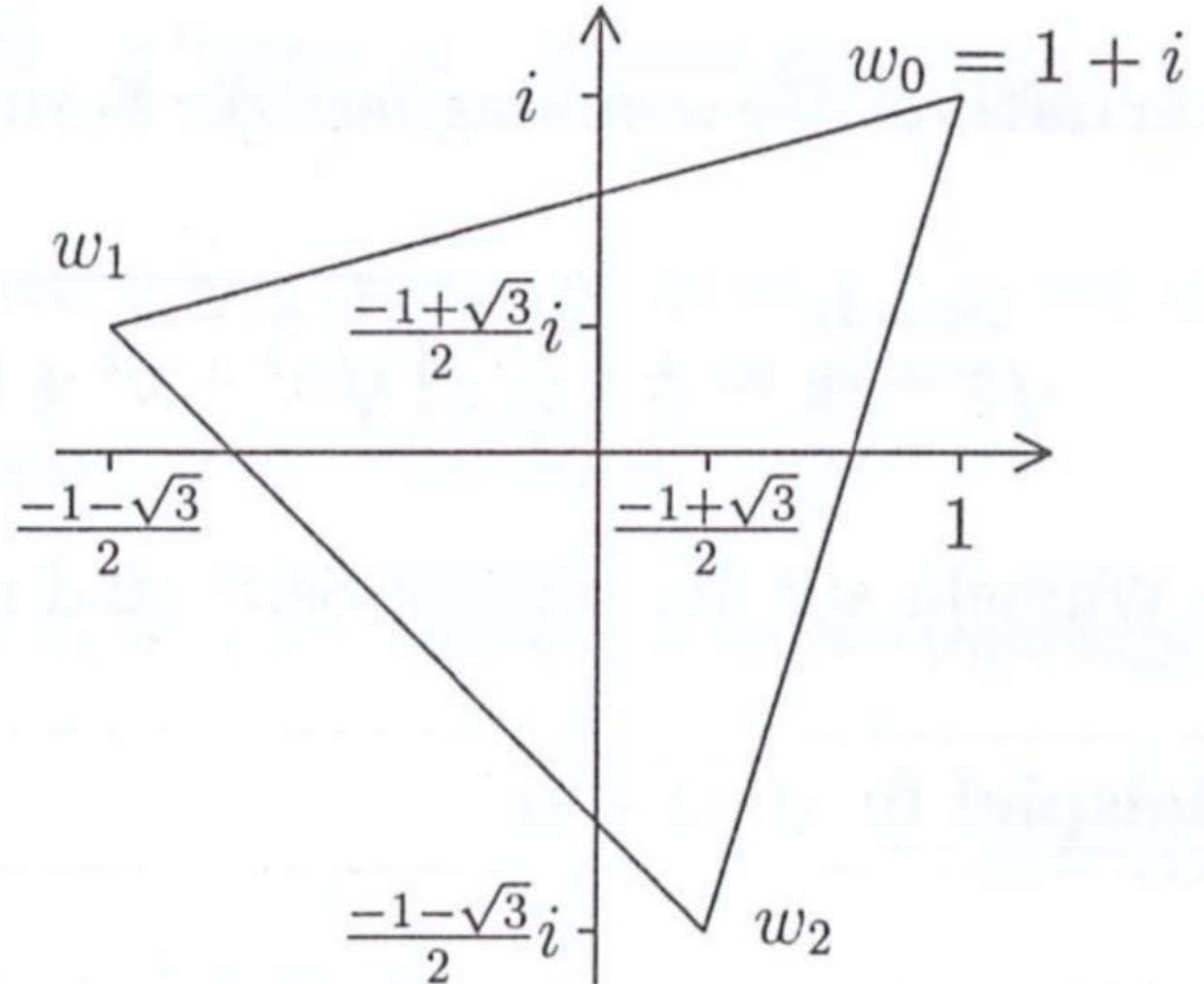
3. Wurzeln aus $z = -2 + 2i$

1. Bestimme Betrag und Argument:

2. Berechne alle 3 Wurzeln

- Betrag
- Argumente

3. Zeichne die Ergebnisse in der komplexen Ebene ein



lineare Unabhängigkeit???

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \ln 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{100!} \\ \sin 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 45 \\ 102 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nicht linear unabhängig, weil zu viert

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \ln 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{100!} \\ \sin 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 45 \\ 102 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

lineare Unabhängigkeit???

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

lineare Unabghängigkeit???

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Nope: $\mathbf{v}_1 = -2 \mathbf{v}_2$

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Jawohl!

lineare Unabhängigkeit???

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Nope: $\mathbf{v}_1 = -2 \mathbf{v}_2$

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Jawohl!

3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

lineare Unabghängigkeit???

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Nope: $\mathbf{v}_1 = -2 \mathbf{v}_2$

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Jawohl!

3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Jawohl!

4. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Nope: $\mathbf{v}_1 = 2 \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$

Transponieren

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ready

Set

Go

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj}$$

Multiplikationen: Welche Dimension ist zu erwarten?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Matrixoperationen: **C=A B**

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj}$$

Multiplikationen: Welche Dimension ist zu erwarten?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2 x 2

2. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$
4 x 3

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3 x 1

Matrixoperationen

Multiplikationen

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj}$$

Ready

Set

Go

Matrixoperationen

Multiplikationen

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 & -4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}-1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+3 & -2\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -3 & 1+2\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ -\sqrt{3} & -4 & 5 \\ -1 & 2\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrixoperationen

- Drehungen

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Betrachte $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Drehung um x-Achse $\mathbf{y} = R_x(\frac{\pi}{2})\mathbf{x}$

b) Drehung um y-Achse $\mathbf{y} = R_y(\frac{\pi}{4})\mathbf{x}$.

c) Drehung um z-Achse $\mathbf{y} = R_z(\pi)\mathbf{x}$.

d) Drehung um x und z-Achse $\mathbf{y} = R_z(\pi)R_x(\frac{\pi}{2})\mathbf{x}$

e) Drehung um z und x-Achse $\mathbf{y} = R_x(\frac{\pi}{2})R_z(\pi)\mathbf{x}$.

Matrixoperationen

$$a) \quad \vec{y}_a = \vec{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \vec{y}_b = \vec{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \vec{y}_c = \vec{R}_z(\pi) \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{R}_z(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad \vec{y}_d = \vec{R}_z(\pi) \vec{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \vec{x} \\ = \vec{R}_z(\pi) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e) \quad \vec{y}_e = \vec{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

} ≠ ! ⇒ Rotationen in 3dim vertauschen
nicht ! (Man mache sich das
anschaulich klar)



Bis 16.1.