Theoretische Physik Ia

Rechenmethoden der Mechanik – Tutorium 12

Vektor oder kein Vektor: Aufgabe 33

Evaluation

Matrixoperationen

Vektor oder kein Vektor: Aufgabe 33

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Aufgabe 33 *Flussintegral und Oberflächen-Parametrierung* *(8 Punkte)*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 2zy \\ x^2 \end{pmatrix} .$$

Im Folgenden soll der Fluss von $\mathbf{v}$ durch den Zylindermantel $Z = \{x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2\}$ berechnet werden.

a) Gebt zunächst die Parametrierung $\boldsymbol{\phi}(x, y, z)$ des Zylindermantels Z in geeigneten Koordinaten an. *(2 Punkte)*

b) Berechnet den Normalenvektor $\hat{n}$ von Z und gebt damit das Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{A}$ des Zylindermantels an. *(2 Punkte)*

c) Berechnet nun den Fluss von $\mathbf{v}$ durch den Zylindermantel mithilfe der Integration $\int_Z \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$. *(4 Punkte)*

Vektor oder kein Vektor???

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Definition. Das **skalare Oberflächenintegral** einer skalaren Funktion $\boxed{f : \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x})}$ über eine von $\Phi : B \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto \Phi(u.v) = \mathbf{x}$ parametrisierte Fläche F ist definiert als:

$$\int_F f(\mathbf{x})\,\mathrm{dA} := \int_B f(\mathbf{x}(u,v)) \boxed{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

Definition. Das **vektorielle Flussintegral** eines Vektorfeldes $\boxed{\mathbf{v} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{v}(\mathbf{x})}$ über eine von $\Phi : B \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto \Phi(u.v) = \mathbf{x}$, parametrisierte Fläche F ist definiert als:

$$\int_F \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} := \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u,v)) \boxed{\cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

mit dem **vektoriellen Flächenelement** $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$

Was brauchen wir hier?

$$\underline{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 2zy \\ x^2 \end{pmatrix} \quad , \quad Z = \{ x^2+y^2 = 4 \, , \, 0 \le z \le 2 \}$$

a) $$\vec{\phi}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \le \varphi \le 2\pi \, , \, 0 \le z \le 2$$

b) $$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow d\underline{A} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \, dz$$

Vektor oder ~~kein Vektor~~

$$c)\quad \int_Z \underline{v} \cdot d\underline{A} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dz \begin{pmatrix} z^2 \\ 4z\sin\varphi \\ 4\cos^2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dz \left(\underbrace{2z^2\cos\varphi}_{=0,\ \text{da } \int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = 0} + 8z\sin^2\varphi \right) d\varphi\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{8}{2} z^2 \sin^2\varphi \right]_0^2 = 16 \int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin^2\varphi$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi) \right) = 16 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi}$$

$$= 16\pi$$

Flächen- und Volumenelemente

Koordinatensystem	Koordinaten	Umrechnung in kartesische Koordinaten	Determinante der Jakobi-Matrix	Volumenlement/ Flächenelement
kartesisch	x, y, z	-	-	$\mathrm{d}A_1 = \mathrm{dx} \cdot \mathrm{d}y$ $\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}y \cdot \mathrm{dz}$ $\mathrm{d}A_3 = \mathrm{dx} \cdot \mathrm{dz}$ $\mathrm{d}V = \mathrm{dx} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{dz}$
polar	r, φ	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$	r	$dA = r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$
zylindrisch	r, φ, z	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $z = z$	r	$\mathrm{d}A_{\text{Fläche}} = r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ $\mathrm{d}A_{\text{Mantel}} = r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{dz}$ $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{dz}$
sphärisch	r, φ, θ	$x = r\cos\varphi\sin\theta$ $y = r\sin\varphi\sin\theta$ $z = r\cos\theta$	$r^2\sin\theta$	$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$ $\mathrm{d}A_{\mathrm{O}} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

Matrixoperationen

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Transponieren $\mathbf{A}^T$

$$a_{ij} \longrightarrow a_{ji}$$

1. $$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjungieren $\mathbf{C}^\dagger \equiv \mathbf{C}^H = (\mathbf{C}^*)^T$

$$a_{mn} + ib_{mn} \longrightarrow a_{nm} - ib_{nm}$$

3. $$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}$$

4. $$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} i & 1+2i & 3-4i \end{pmatrix}$$

Matrixoperationen

Transponieren $\mathbf{A}^T$

$$a_{ij} \longrightarrow a_{ji}$$

1. $$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -4 \\ -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjungieren $\mathbf{C}^\dagger \equiv \mathbf{C}^H = (\mathbf{C}^*)^T$

$$a_{mn} + ib_{mn} \longrightarrow a_{nm} - ib_{nm}$$

3 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{C}^\dagger = \begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{C}$$

schiefhermitesch

4. $$\mathbf{C}^\dagger = \begin{pmatrix} -i \\ 1-2i \\ 3+4i \end{pmatrix}$$

Zentrale Evaluation: eure Meinung zählt!!!

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- Übungen und Tutorien

https://tinyurl.com/UdS-TPIa-UE

- Vorlesungen

https://tinyurl.com/UdS-TPIa-VL

Matrixoperationen: **C=A B**

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}$$

Multiplikationen: Welche Dimension ist zu erwarten?

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 x 2

2. $$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

4 x 3

3. $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3 x 1

Matrixoperationen

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}$$

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Multiplikationen

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ready

Set

Go

Matrixoperationen

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}$$

Multiplikationen

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 & -4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}-1 & 12 \end{pmatrix}$$

2. $$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+3 & -2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -3 & 1+2\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ -\sqrt{3} & -4 & 5 \\ -1 & 2\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$

3. $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrixoperationen

- Drehungen

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Betrachte $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Drehung um x-Achse $\boldsymbol{y} = R_x(\frac{\pi}{2})\boldsymbol{x}$

b) Drehung um y-Achse $\boldsymbol{y} = R_y(\frac{\pi}{4})\boldsymbol{x}$.

c) Drehung um z-Achse $\boldsymbol{y} = R_z(\pi)\boldsymbol{x}$.

d) Drehung um x und z-Achse $\boldsymbol{y} = R_z(\pi)R_x(\frac{\pi}{2})\boldsymbol{x}$

e) Drehung um z und x-Achse $\boldsymbol{y} = R_x(\frac{\pi}{2})R_z(\pi)\boldsymbol{x}$.

Matrixoperationen

a) $$\vec{y}_a = \overleftrightarrow{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \overleftrightarrow{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{y}_b = \overleftrightarrow{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \overleftrightarrow{R}_y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

c) $$\vec{y}_c = \overleftrightarrow{R}_z(\pi)\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \overleftrightarrow{R}_z(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $$\vec{y}_d = \overleftrightarrow{R}_z(\pi)\,\overleftrightarrow{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{x}$$
$$= \overleftrightarrow{R}_z(\pi)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) $$\vec{y}_e = \overleftrightarrow{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Big\}\neq!$ $\Rightarrow$ Rotationen in 3 dim vertauschen nicht! (Man mache sich das anschaulich klar)

Bis 23.1.