Theoretische Physik Ia

Rechenmethoden der Mechanik – Tutorium 14

Aufgabe 38/Beweise

Erwartungen…

Klausur: Spickzettel…

Aufgabe 38 *Eigenschaften der Matrizenmultiplikation* *(11 Punkte)*

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ mit $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Zeigt, dass das Matrizenprodukt assoziativ ist, das heißt es gilt: $A(BC) = (AB)C \in \mathbb{R}^{m\times q}$. *(3 Punkte)*

Es sei

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die sogenannte Einheitsmatrix. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt invertierbar, falls eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existiert, sodass $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ gilt.

b) Zeigt, dass für eine beliebige Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $M\mathbb{1} = M$ und $\mathbb{1}M = M$. *(2 Punkte)*

c) Zeigt die Eindeutigkeit der Einheitsmatrix, also dass $\mathbb{1}$ die *einzige* Matrix ist, für die für alle $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $M\mathbb{1} = M = \mathbb{1}M$. *(2 Punkte)*

d) Nutzt b) und c) um zu zeigen: Ist $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist auch $M^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und es gilt $(M^{-1})^{-1} = M$. *(2 Punkte)*

e) Zeigt: Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist auch AB invertierbar. Wie lautet also die Inverse $(AB)^{-1}$? *(2 Punkte)*

Aufgabe 38 *Eigenschaften der Matrizenmultiplikation* *(11 Punkte)*

a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ mit $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Zeigt, dass das Matrizenprodukt assoziativ ist, das heißt es gilt: $A(BC) = (AB)C \in \mathbb{R}^{m\times q}$. *(3 Punkte)*

Es sei

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die sogenannte Einheitsmatrix. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt invertierbar, falls eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existiert, sodass $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ gilt.

b) Zeigt, dass für eine beliebige Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $M\mathbb{1} = M$ und $\mathbb{1}M = M$. *(2 Punkte)*

c) Zeigt die Eindeutigkeit der Einheitsmatrix, also dass $\mathbb{1}$ die *einzige* Matrix ist, für die für alle $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $M\mathbb{1} = M = \mathbb{1}M$. *(2 Punkte)*

d) Nutzt b) und c) um zu zeigen: Ist $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist auch $M^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und es gilt $(M^{-1})^{-1} = M$. *(2 Punkte)*

e) Zeigt: Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist auch AB invertierbar. Wie lautet also die Inverse $(AB)^{-1}$? *(2 Punkte)*

a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \sum_{l=1}^{p} B_{kl} C_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} A_{ik} B_{kl} C_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kl} \right) C_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} [AB]_{il} C_{lj} = [(AB)C]_{ij}$$

b) $$[M \cdot \mathbb{1}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} \delta_{kj} = M_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} M_{kj} = [\mathbb{1} M]_{ij}$$

$$M \cdot \mathbb{1} = M = \mathbb{1} \cdot M$$

Aufgabe 38 *Eigenschaften der Matrizenmultiplikation* *(11 Punkte)*

a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ mit $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Zeigt, dass das Matrizenprodukt assoziativ ist, das heißt es gilt: $A(BC) = (AB)C \in \mathbb{R}^{m\times q}$. *(3 Punkte)*

Es sei

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die sogenannte Einheitsmatrix. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt invertierbar, falls eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existiert, sodass $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ gilt.

b) Zeigt, dass für eine beliebige Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $M\mathbb{1} = M$ und $\mathbb{1}M = M$. *(2 Punkte)*

c) Zeigt die Eindeutigkeit der Einheitsmatrix, also dass $\mathbb{1}$ die *einzige* Matrix ist, für die für alle $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $M\mathbb{1} = M = \mathbb{1}M$. *(2 Punkte)*

d) Nutzt b) und c) um zu zeigen: Ist $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist auch $M^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und es gilt $(M^{-1})^{-1} = M$. *(2 Punkte)*

e) Zeigt: Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist auch AB invertierbar. Wie lautet also die Inverse $(AB)^{-1}$? *(2 Punkte)*

c) angenommen es gibt $\mathbb{1}'$ mit $M \cdot \mathbb{1}' = \mathbb{1}' \cdot M = M$

dann muss gelten $\mathbb{1}' = \mathbb{1} \cdot \mathbb{1}' = \mathbb{1}' \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$

d) $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{= \mathbb{1}} \cdot A^{-1} = A^{-1} \mathbb{1} = A^{-1}$

$\Rightarrow$ A ist das Inverse zu A^{-1}

e) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \underbrace{BB^{-1}}_{= \mathbb{1}\text{, da } B \text{ invertierbar}} A^{-1} = AA^{-1} \overset{\text{da } A \text{ invertierbar}}{=} \mathbb{1}$

$\rightarrow$ AB ist invertierbar mit der Inversen $B^{-1}A^{-1}$

Erwartungen... (s. Tutorium 1)

- ... ans Studium
  - Was verbinde ich mit dem Studiengang?
  - Lieblingsthema
- ... an mich
  - Was kann ich gut?
  - Wo sehe ich Luft nach oben?

Brief an dich selbst (per E-Mail an dich)

Erwartungen...

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- ... ans Studium
  - Was verbinde ich mit dem Studiengang?
  - Lieblingsthema
- ... an mich
  - Was kann ich gut?
  - Wo sehe ich Luft nach oben?

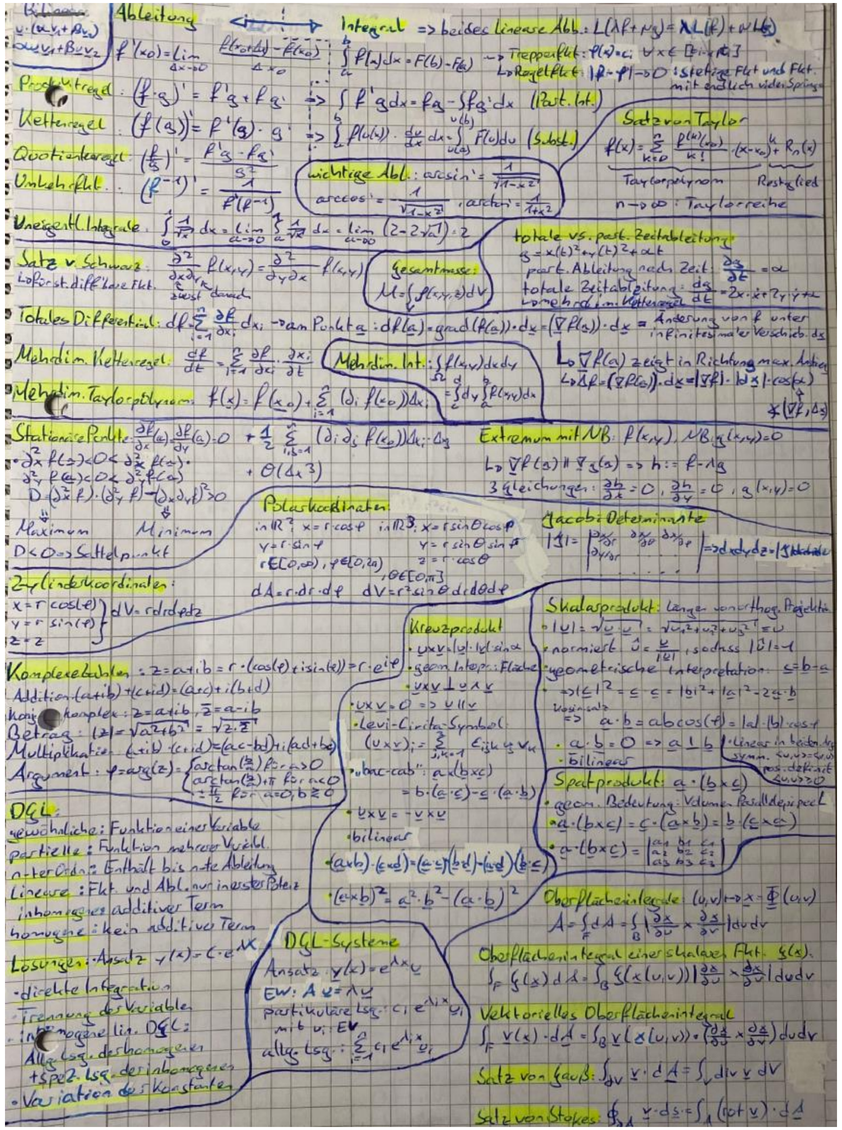
Was hat sich bestätigt?

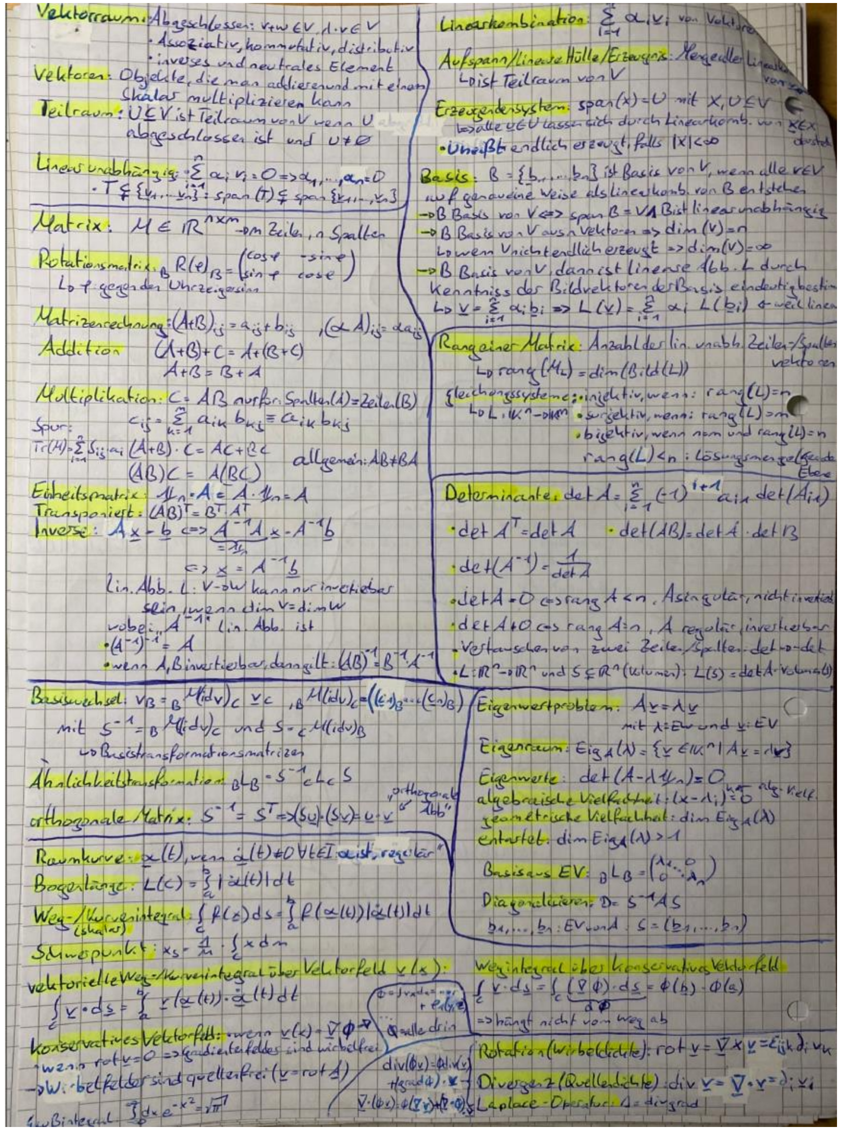
Was hat sich geändert?

$$\exists C > 0\, \exists \varepsilon > 0\, \forall x \in \{x : d(x,a) < \varepsilon\} : |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

$$|\vec{\mathbf{a}}|\;\left|\vec{\mathbf{b}}\right| \sin\left[\sphericalangle\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right)\right]\;\vec{\mathbf{n}}$$

Spickzettel/Gedächtnisstütze: mein Beispiel aus WS23/24





Basiswechsel und Eigenwerte

Basiswechsel: $v_B = {}_B\mathcal{M}(id_V)_C \, \underline{v}_C$, ${}_B\mathcal{M}(id_V)_C = \left((\underline{c}_1)_B \dots (\underline{c}_n)_B\right)$

mit $S^{-1} = {}_B\mathcal{M}(id_V)_C$ und $S = {}_C\mathcal{M}(id_V)_B$

↳ Basistransformationsmatrizen

Ähnlichkeitstransformation: ${}_BL_B = S^{-1} \, {}_CL_C \, S$

orthogonale Matrix: $S^{-1} = S^T \Rightarrow (S\underline{u}) \cdot (S\underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{v}$ „orthogonale Abb“

Raumkurve: $\underline{\alpha}(t)$, wenn $\dot{\underline{\alpha}}(t) \neq 0 \; \forall t \in I$: α ist „regulär“

Bogenlänge: $L(c) = \int_a^b |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, dt$

Weg-/Kurvenintegral (skalar): $\int_c f(\underline{x}) \, ds = \int_a^b f(\underline{\alpha}(t)) |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, dt$

Eigenwertproblem: $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

mit λ: EW und $\underline{v}$: EV

Eigenraum: $Eig_A(\lambda) = \{\underline{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{v} = \lambda \underline{v}\}$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}_n) = 0$

algebraische Vielfachheit: $(x - \lambda_i)^{k_i} = 0$ k_i: alg. Vielf.

geometrische Vielfachheit: $\dim Eig_A(\lambda)$

entartet: $\dim Eig_A(\lambda) > 1$

Basis aus EV: ${}_BL_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Diagonalisieren: $D = S^{-1} A S$

$\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$: EV von A: $S = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

Basiswechsel und Eigenwerte

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Basiswechsel: $\underline{v}_B = {}_B\mathcal{M}(\mathrm{id}_V)_C\, \underline{v}_C$, ${}_B\mathcal{M}(\mathrm{id}_V)_C = \left((\underline{c}_1)_B \ldots (\underline{c}_n)_B\right)$

mit $S^{-1} = {}_B\mathcal{M}(\mathrm{id}_V)_C$ und $S = {}_C\mathcal{M}(\mathrm{id}_V)_B$

↳ Basistransformationsmatrizen

Ähnlichkeitstransformation: ${}_BL_B = S^{-1}\, {}_CL_C\, S$

orthogonale Matrix: $S^{-1} = S^T \Rightarrow (S\underline{u})\cdot(S\underline{v}) = \underline{u}\cdot\underline{v}$ „orthogonale Abb"

Raumkurve: $\underline{\alpha}(t)$, wenn $\dot{\underline{\alpha}}(t) \neq 0\ \forall t \in I$: α ist „regulär"

Bogenlänge: $L(C) = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)|\,dt$

Weg-/Kurvenintegral (skalar): $\int_C f(\underline{x})\,ds = \int_a^b f(\underline{\alpha}(t))\,|\dot{\underline{\alpha}}(t)|\,dt$

Eigenwertproblem: $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$

mit λ: EW und $\underline{v}$: EV

Eigenraum: $\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \{\underline{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\}$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda\mathbb{1}_n) = 0$

algebraische Vielfachheit: $(x-\lambda_i)^{k} \overset{!}{=} 0$, k = alg. Vielf.

geometrische Vielfachheit: $\dim \mathrm{Eig}_A(\lambda)$

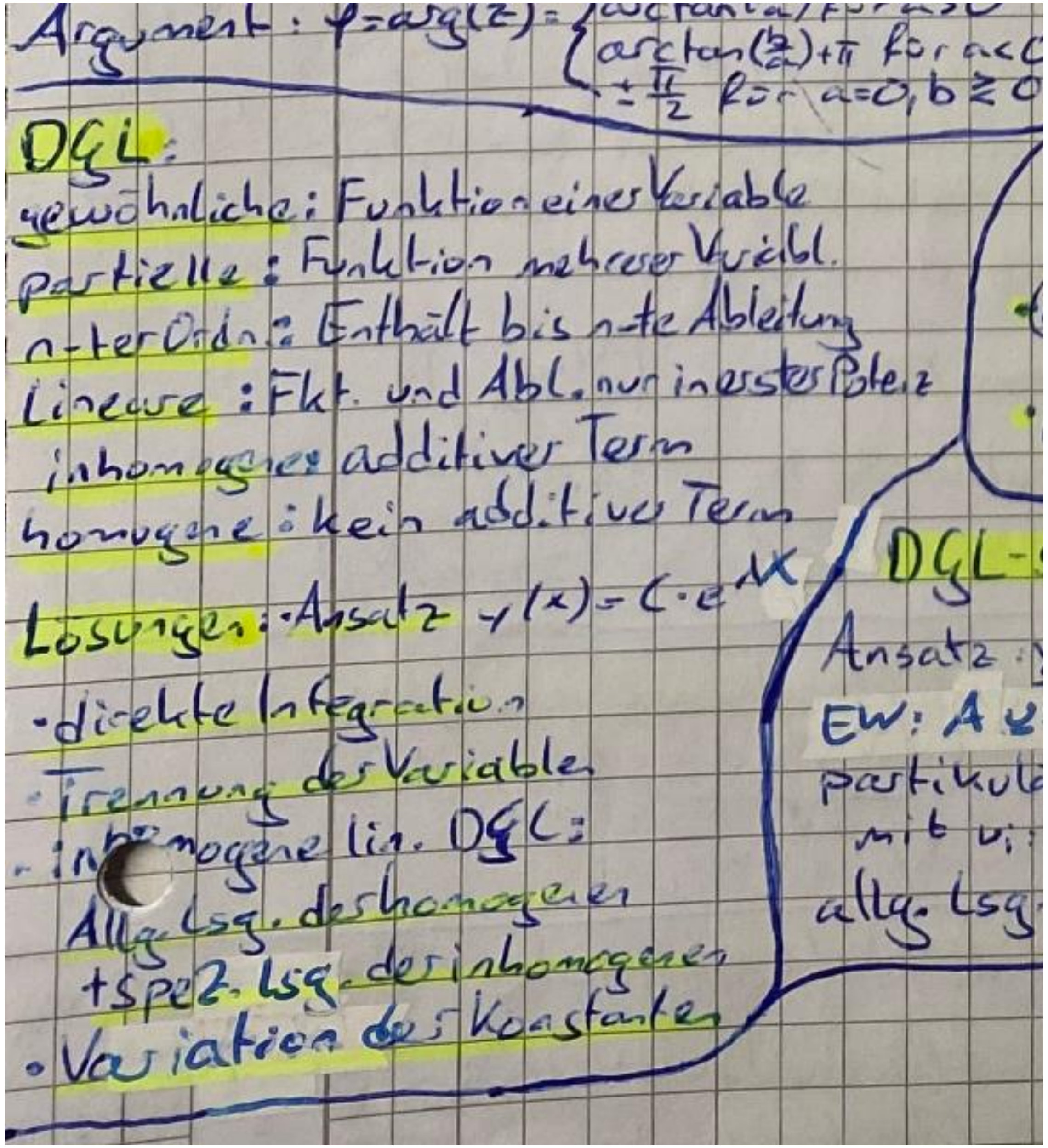
entartet: $\dim \mathrm{Eig}_A(\lambda) > 1$

Basis aus EV: ${}_BL_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Diagonalisieren: $D = S^{-1}AS$

$\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$: EV von A: $S = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$

DGLs



Argument: $\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a})+\pi & \text{für } a<0 \\ \pm\frac{\pi}{2} & \text{für } a=0,\ b \gtrless 0 \end{cases}$

DGL:

gewöhnliche: Funktion einer Variable

partielle: Funktion mehrerer Variabl.

n-ter Ordn.: Enthält bis n-te Ableitung

Lineare: Fkt. und Abl. nur in erster Potenz

inhomogene: additiver Term

homogene: kein additiver Term

Lösungen: Ansatz $y(x) = C \cdot e^{\lambda x}$

- direkte Integration
- Trennung der Variablen
- inhomogene lin. DGL:

  Allg. Lsg. der homogenen

  + spez. Lsg. der inhomogenen
- Variation der Konstanten

DGL-

Ansatz:

EW: A

partikul

mit v_i

allg. Lsg.

Probeklausur

Zur Klausurvorbereitung stellen wir euch hier eine Probeklausur zur Verfügung. Diese Probeklausur war im Original eine der Klausuren der TP1a aus dem WS 19/20. Diese Probeklausur stellt nur eine mögliche Aufgabenzusammenstellung dar. Die Haupt- und Nachklausur müssen nicht eins zu eins die gleichen Aufgabentypen und Themen beinhalten. Bitte bereitet euch auf alle Themen vor, die in der Vorlesung und Übung gelernt wurden.

Es wird ein Tutorium zur Klausurvorbereitung geben, in dem unter anderem Fragen zur Probeklausur besprochen werden können:

Dienstag, den 11.2., um 14 Uhr im Raum E04 Gebäude E2 6

Zusätzlich bietet Philipp eine offene Sprechstunde an:

Mittwoch, den 12.2., zur Vorlesungszeit 8.30 – 10.00 Uhr

Wir wünschen allen eine produktive und erfolgreiche Klausurvorbereitung.

Probeklausur.pdf

Klausur (Anmeldung bis 1 Woche vorher)

- 1. Klausur: Do. 13.2., 9-12, Geb. C6 4 gr. HS (0.10)
- 2. Klausur: Fr. 14.3., 9-12, Geb. C6 4 gr. HS (0.10)
- Erlaubte Hilfsmittel in den Klausuren:
  - Ein selbst handschriftlich beidseitig beschriebenes DIN A4-Blatt.
  - Keine weiteren Hilfsmittel.
- Mitbringen: Stift (kein Bleistift), Getränk, (Nerven-)Nahrung $\sqrt{-1}$ 2^3 $\sum$ π

Klausur (Anmeldung bis 1 Woche vorher)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- 1. Klausur: Do. 13.2., 9-12, Geb. C6 4 gr. HS (0.10)
- 2. Klausur: Fr. 14.3., 9-12, Geb. C6 4 gr. HS (0.10)
- Erlaubte Hilfsmittel in den Klausuren:
  - Ein selbst handschriftlich beidseitig beschriebenes DIN A4-Blatt.
  - Keine weiteren Hilfsmittel.
- Mitbringen: Stift (kein Bleistift), Getränk, (Nerven-)Nahrung

$\sqrt{-1}$	2^3	$\sum$	π
I	8	sum	pi
I	ate	some	pie

Wer braucht eine Note?

Klausur (meine Tipps…)

1. Vor der Klausur: Anmeldung (bis 1 Woche vorher)
   - Probeklausur (auf Zeit rechnen/Realbedingungen simulieren)
   - Übungsblätter und Aufgaben aus den Übungen
   - Sorgfalt beim Spickzettelerstellen
2. Während der Klausur:
   - Reihenfolge der Aufgaben
   - Spickzettel konsultieren
   - Ergebnisplausibilität
   - Fragen fragen
3. Nach der Klausur: Freiversuch und Notenverbesserung

Bis 6.2.