Theoretische Physik Ib: Analytische Mechanik Definitionen, Sätze, Formales…

Dr. habil. Philipp Hövel

April 15, 2025

1 Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome:

1. Kräftefreie Körper bewegen sich geradlinig und gleichförmig.
2. Beschleunigung $\mathbf{a} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{v} \sim \mathbf{F}$ (allgemeiner: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$)
3. *actio* = *reactio*
4. Lineare Superposition von Kräften

Drehmatrizen:

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Das D'Alembertsche Prinzip

Zwangsbedingungen:

- **holonom:** $f_\mu(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \mu = 1, \ldots, \Lambda$
  vollständiges Differenzial $\mathrm{d}f_\mu = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r_i}} f_\mu \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial t}\mathrm{d}t = 0$
- **nicht holonom:** $\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\mu i}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_{\mu 0}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \mathrm{d}t = 0$
  aber: es existiert kein *integrabler* Faktor g_μ, so dass $g_\mu \mathbf{a}_{\mu i} = \nabla_{\mathbf{r_i}} f_\mu$
- **rheonom:** zeitabhängige Zwangsbedingung
- **skleronom:** nicht explizit zeitabhängige Zwangsbedingung

virtuelle Verrückungen $\{\delta \mathbf{r}_i\}$: infinitesimale Änderung der Koordinaten, die zu fester Zeit ($\delta t = 0$) die Zwangsbedingungen erfüllen.

reale Verrückungen $\mathrm{d}\mathbf{r}_i$: infinitesimale Änderung der Koordinaten in Zeitinterval $\mathrm{d}t$ entlang der Bahn

Methode der Lagrange-Parameter:
Allgemeine Notation: $\mathbf{r}_i \longrightarrow x_j, \mathbf{X}_i \longrightarrow K_j, \mathbf{r}_i \longrightarrow x_j, \mathbf{a}_{\mu i}, \nabla_{\mathbf{r_i}} f_\mu \longrightarrow \phi_j^\mu$ mit $i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, 3N$

1. Addiere Nebenbindungen mit Lagrange-Multiplikation λ_μ:
$$\sum_{j=1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu \right) \delta x_j = 0$$
2. Eliminiere $\delta x_1, \ldots, \delta x_\Lambda$ aus den Nebenbindungen. Dann sind $\delta x_{\Lambda+1}, \ldots, \delta x_N$ frei wählbar.
3. Bestimme $\lambda_1, \ldots, \lambda_\Lambda$, so dass
$$m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu = 0 \qquad \text{für} j = 1, \ldots, \Lambda$$
und somit
$$\sum_{j=\Lambda+1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu(t) \phi_j^\mu \right) \delta x_j = 0$$
4. Lagrange-Gleichungen 1. Art:
$$m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu = 0$$
Also für holonome Zwangsbedingungen:
$$m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_j} = 0$$

Kochrezept der Lagrange-Gleichungen 2. Art:

1. Auswählen generalisierter Koordinaten: $q_1, \ldots, q_f$, die die (holonomen) Zwangsbedingungen erfüllen: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_f, t) \equiv \mathbf{r}_i(q_k, t)$
2. Berechnen von Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_i(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{r}_i(q_k, t)$
und kinetischer Energie $T(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i(q_k, \dot{q}_k, t)^2$
3. Potenzielle Energie für konservative Kräfte: $V(q_k, t) = V(\mathbf{r}_i(q_k, t))$
$\Rightarrow$Lagrange-Funktion $L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k, t) - V(q_k, t)$
(Potenzielle/Lage-) Energie für nichtkonservative Kräfte: $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_f, t)$
4. Aufstellung der Bewegungsgleichungen ($j = 1, \ldots, f$):
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} L = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} T = Q_j$$
5. Lösen der Bewegungsgleichungen