1. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Dr. habil. Philipp Hövel

1. [*0 Punkte*] **Regentropfen mit wachsendem Radius**

Ein kugelförmiger Wassertropfen mit Radius $R(t)$ fällt senkrecht nach unten im Schwerefeld. Auf ihn wirkt ausschließlich die Gewichtskraft $F = mg$, wobei sich die Masse durch Kondensation mit der Zeit ändert. Der Radius des Tropfens wächst infolge von Kondensation linear mit der Zeit an $R(t) = R_0 + \alpha t$ mit $\alpha > 0$. Da das Volumen V des Tropfens kugelförmig ist, ergibt sich für die zeitabhängige Masse:

$$m(t) = \rho V(t) = \rho \frac{4\pi}{3} R(t)^3 ,$$

wobei ρ die konstante Dichte von Wasser ist. Der Tropfen startet aus der Ruhe, also $v(t = 0) = 0$. Es wird keine Luftreibung berücksichtigt.

(a) Stelle die Bewegungsgleichung für den Tropfen auf. Beachte, dass die Masse zeitabhängig ist.

(b) Führe die Integration der Bewegungsgleichung durch, indem du den Radius R anstelle der Zeit t als unabhängige Variable verwendest.
Hinweis: Du benötigst dabei die Kettenregel $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}R} \cdot \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$.

(c) Diskutiere $v(t)$ für die beiden Fälle $\alpha t \ll R_0$ und $\alpha t \gg R_0$.

2. [*0 Punkte*] **Perle auf schiefer Ebene**

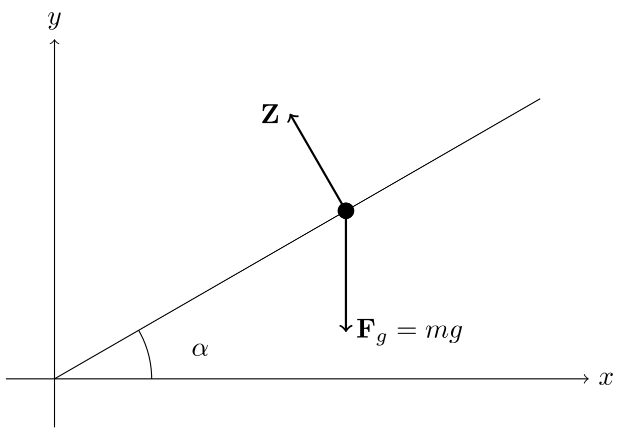
An einem einfachen System sollen zwei unterschiedliche Methoden (Newton und d'Alembert) zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingungen verglichen werden.
Eine Punktmasse m bewegt sich reibungsfrei auf einer glatten schiefen Ebene mit Neigungswinkel α. Der Punkt wird durch die Koordinaten $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ beschrieben. Die Bewegung erfolgt unter dem Einfluss der Schwerkraft g in negativer y-Richtung.

(a) Formuliere die Zwangsbedingung in Form einer skalaren Gleichung $f(x, y) = 0$, die die Bewegung auf der schiefen Ebene beschreibt. Ist die Bedingung holonom?

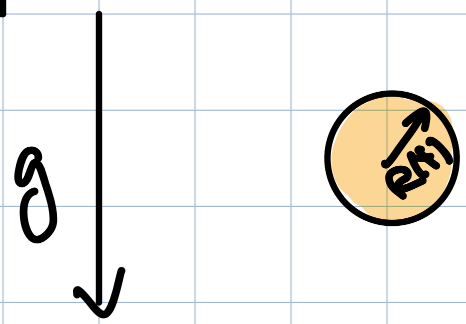
(b) Bestimme die Bewegungsgleichung in x-Richtung mithilfe der Newtonschen Methode. Berücksichtige die Zwangskraft $\mathbf{Z}$ explizit. Wie ist die Zwangskraft gegenüber der schiefen Ebene orientiert?

(c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit her. Bestimmen Sie dazu eine virtuelle Verrückung $\delta\mathbf{r}$, die mit dem Zwang verträglich ist, und wenden Sie das d'Alembert-Prinzip an.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den zwei Methoden. Welche Rolle spielt die Zwangskraft jeweils? Wie äußert sich der Einfluss des Zwangs in den verschiedenen Formulierungen?



A1



$m(t) = \frac{4\pi\gamma}{3} R^3(t)$

$R(t) = R_0 + \alpha t, \quad \alpha > 0$

a) Newton: $\dot{p} = \frac{d}{dt}(mv) = F$

$\Rightarrow \dot{m}v + m\dot{v} = mg$

wo $\dot{m} = 4\pi\gamma \dot{R} R^2 = 4\pi\alpha R^2 = \frac{3\alpha}{R} m$

$|:m$
$\Rightarrow \frac{3\alpha}{R} v + \dot{v} = g$

b) $\dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dR}\frac{dR}{dt} = v'(R)\dot{R} = \alpha v'$

$|\cdot R^3$
$$\Rightarrow \underbrace{\alpha R^3 v' + \alpha R^2 v}_{\alpha \frac{d}{dR}(R^3 v)} = R^3 g$$

$$\Rightarrow \int_{R_0}^{R(t)} d\tilde{R} \, \frac{d}{d\tilde{R}}(\tilde{R}^3 v) = g/\alpha \int_{R_0}^{R(t)} d\tilde{R} \, \tilde{R}^3$$

$$\Rightarrow R^3 v(R) - R_0^3 v(R_0) = \frac{g}{4\alpha}(R^4 - R_0^4)$$

wo $v(R_0) = v(t=0) = 0.$

$$\Rightarrow v(R) = g/4\alpha \left(R - \frac{R_0^4}{R^3}\right)$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{gR_0}{4\alpha}\left[1 + \frac{\alpha t}{R_0} - \frac{R_0^3}{(R_0+\alpha t)^3}\right]$$

c) $$v(t) = \frac{gR_0}{4\alpha}\left[1 + \frac{\alpha t}{R_0} - \frac{1}{(1+\alpha t/R_0)^3}\right]$$

Für $\alpha t \ll R_0$ $\Rightarrow$ $\varepsilon = \frac{\alpha t}{R_0} \ll 1$ $\Rightarrow$ Taylor!

$$\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^3} = \left(1 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)^3 \simeq 1 - 3\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow v(t) \simeq \frac{gR_0}{4\alpha}\left[1 + \frac{\alpha t}{R_0} - 1 + \frac{3\alpha t}{R_0}\right] = gt \,//$$

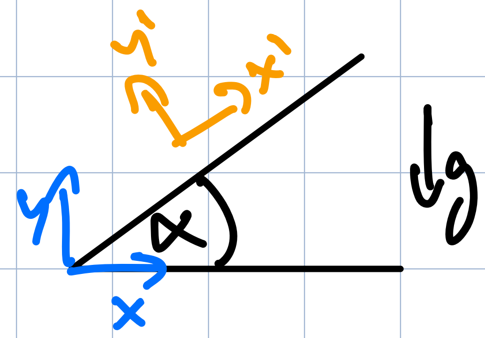
Für $\alpha t \gg R_0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{(1+\alpha t/R_0)^3} \longrightarrow 0$

$$1 + \alpha t/R_0 \longrightarrow \alpha t/R_0$$

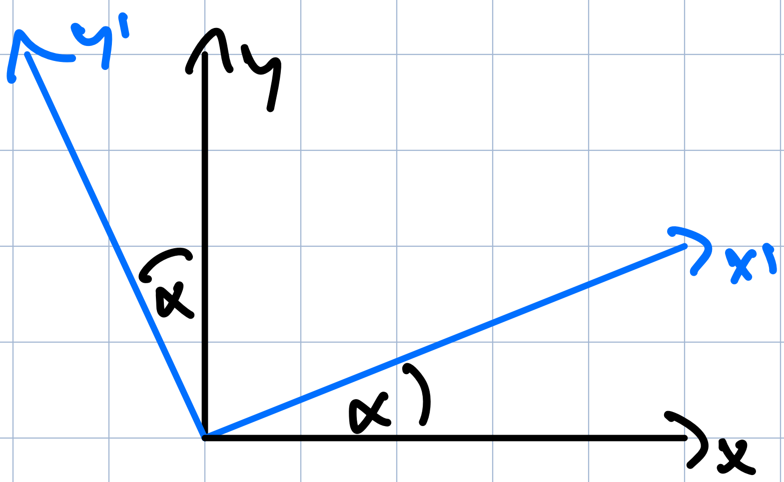
$$\Rightarrow v(t) \simeq \frac{gR_0}{4\alpha}\,\frac{\alpha t}{R_0} = gt/4 \,//$$

A2| a) $y/x = \tan\alpha$

$\Rightarrow f(x,y) = y - x\tan\alpha = 0$



b) Gedrehtes KOS:



$\hat{\underline{x}}' = \cos\alpha\, \hat{\underline{x}} + \sin\alpha\, \hat{\underline{y}}$

$\hat{\underline{y}}' = -\sin\alpha\, \hat{\underline{x}} + \cos\alpha\, \hat{\underline{y}}$

Newton: $\underline{F} = \sum_i \underline{F}_i$

$\Rightarrow F\hat{\underline{x}}' = -mg\,\hat{\underline{y}} + Z\hat{\underline{y}}'$

↳ resultierende Kraft liegt in der schiefen Ebene

$\cdot\hat{\underline{y}}' \Rightarrow \underbrace{F\hat{\underline{x}}'\cdot\hat{\underline{y}}'}_{=0} = -mg\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} + Z\underbrace{\hat{\underline{y}}'\cdot\hat{\underline{y}}'}_{=1}$

$\Rightarrow Z = mg\cos\alpha$

$\Rightarrow \underline{F} = -mg\,\hat{\underline{y}} + mg\cos\alpha\,\hat{\underline{y}}' = m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg\cos\alpha\sin\alpha$$

$$m\ddot{y} = mg(\cos^2\alpha - 1)$$

Sanity check: $\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \checkmark \\ \ddot{y} = 0 \checkmark \end{cases}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \checkmark \\ \ddot{y} = -g \checkmark \end{cases}$

c) $\delta \underline{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = ?$

ZB.: $\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = -\tan\alpha\,\delta x + \delta y = 0$

$$\Rightarrow \delta \underline{r} = \delta x \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}$$

d'Alembertsches Prinzip: $\delta W = (m\underline{\ddot{r}} - \underline{F}) \cdot \delta \underline{r} = 0$

$$\Rightarrow \left[m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \delta x \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$\overset{\text{ZB}}{\Leftrightarrow} m\delta x \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}\tan\alpha + g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \left[m\ddot{x}(1 + \tan^2\alpha) + mg\tan\alpha \quad \delta x = 0\right.$$

muss für belb. virt. Verrückung δx gelten.

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -g \frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

mit $1+\tan^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -g\sin\alpha\cos\alpha$$