Theoretische Physik Ib

Analytische Mechanik – Tutorium 02

Glossar

Taylor-Entwicklung

Zylinderkoordinaten

Glossar: Einnerung an TPIa WS24/25

Glossar

TPIa WS24/25

Kapitel 1

Ableitung
derivative

bijektiv
eineindeutig/umkehrbar

n-mal stetig differenzierbar
n-times continuously differentiable

n-te Ableitung
n-th derivative

Ordnung O(.)
Groß-O, big O

partielle Integration
integration by parts

unbestimmtes Integral
indefinite integral

uneigentliches Integral
improper integral

Verfügbar in Moodle

Glossar: TPIa im SS 25

@ | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
Alle

Seite: **1** 2 3 4 (Weiter)
Alle

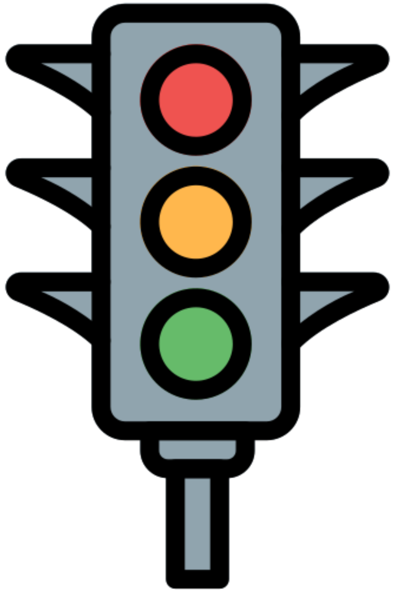
A

analytische Mechanik

analytical mechanics

Anfangsbedingung

initial condition



Begriffe durchgehen und markieren/notieren:

Grün: ***alles klar, kann ich sofort hinschreiben***

Gelb: ***schon mal gehört, aber nicht sofort parat***

Rot: ***noch nie gehört***

Taylor-Entwicklung: Theorie

Satz (Satz von Taylor). Jede Funktion $f \in \mathcal{C}^{n+1}(D)$ auf einem offenen Intervall D lässt sich für $x, x_0 \in D$ auf folgende Weise nach Potenzen entwickeln:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^k + R_n(x)$$

mit Restglied $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\left(x-x_0\right)^{n+1}$ und ξ zwischen x und x_0.

Taylor-Entwicklung: Aufgabe I

Aufgabe 4 *Anwendung Taylor-Entwicklung: Relativistische Energie eines Teilchens* *(5 Punkte)*

Albert Einstein zeigte im Rahmen seiner Arbeit zur speziellen Relativitätstheorie, dass die Gesamtenergie eines bewegten Teilchen mit der Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v gegeben ist durch

$$E_{\text{rel}}(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{4}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Dieser Ausdruck ist zwar exakt für alle Geschwindigkeiten, ist aber bei niedrigen 'nichtrelativistischen' Geschwindigkeiten $v \ll c$ recht umständlich.

a) Findet daher die klassische Näherung der kinetischen Energie durch eine geeignete Taylor-Reihe. *(3 Punkte)*

b) Warum konntet ihr dieses Ergebnis erwarten? *(2 Punkte)*

Taylor-Entwicklung: Aufgabe I

Wir entwickeln $E_{rel}(v)$ um $v = 0$ bis zur 2. Ordnung:

$$E_{rel}(v=0) = m_0 c^2$$

$$E'_{rel}(v) = \frac{m_0 c^2}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} \cdot \frac{v}{c^2}, \qquad E'_{rel}(v=0) = 0$$

$$E''_{rel}(v) = \frac{m_0}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} + \frac{m_0 v}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^5} \cdot 3v, \qquad E''_{rel}(v=0) = m_0$$

Setzt man das in die Definition der Taylorreihe ein dann erhält man:

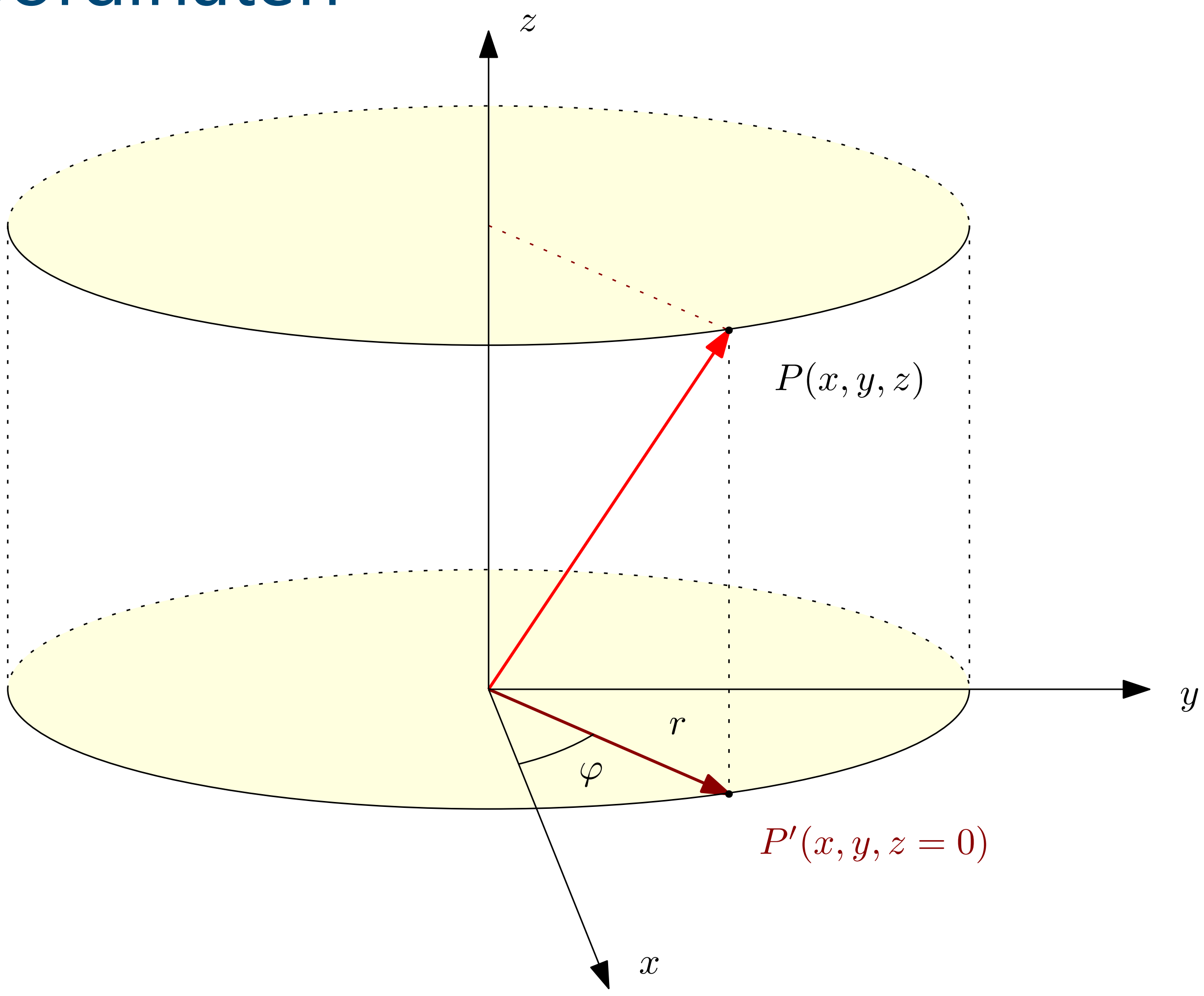
$$E_{rel}(v) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \mathcal{O}(v^3) \tag{1}$$

Der erste Term ist die relativistische Ruhemasse, also das bekannte $E = mc^2$. Der zweite Term ist die klassische nichtrelativistische kinetische Energie, die man aus der Schule kennt.

Taylor-Entwicklung: Aufgabe II

$$\ln(1+x) \approx x \text{ für } |x| < 1$$

Zylinder-Koordinaten



$$P(x, y, z) = P(r, \varphi, z)$$

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

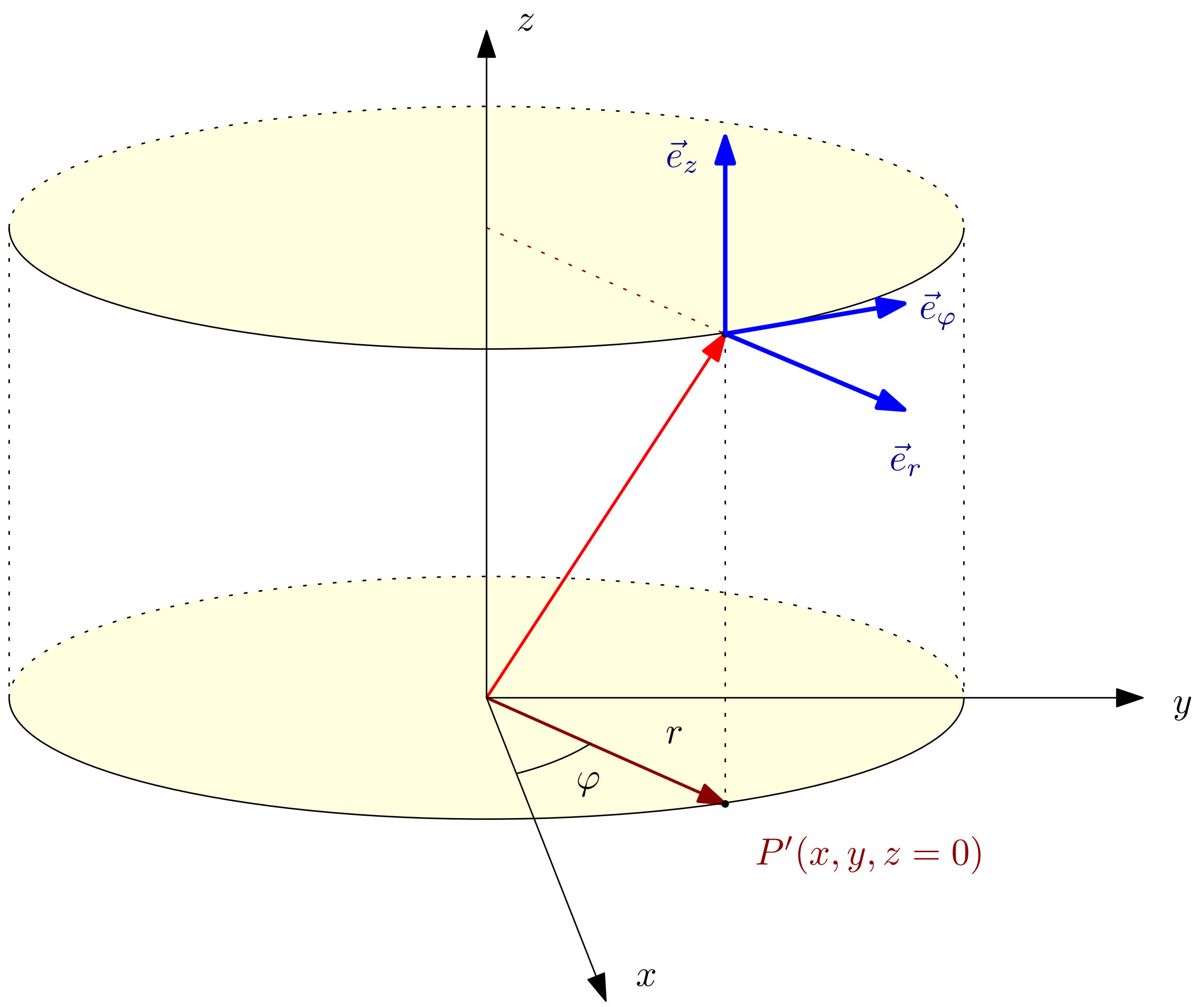
$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \qquad (2)$$

$$z = z \qquad (3)$$

Zylinder-Koordinaten: Basisvektoren



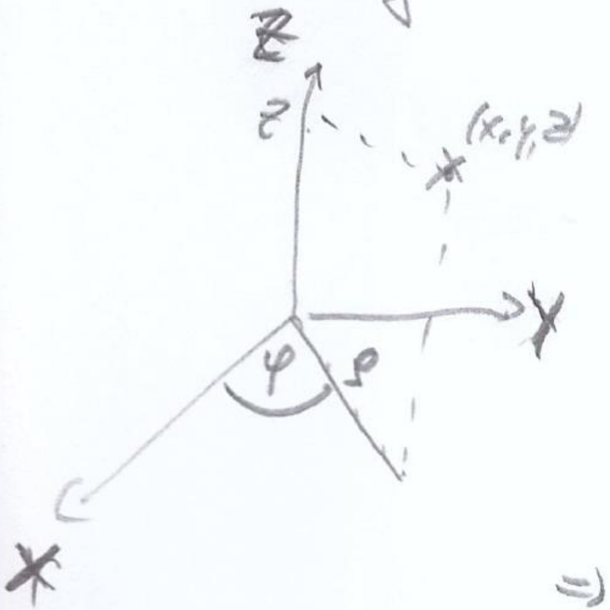
$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Zylinder-Koordinaten: Jacobi-Matrix

2.9.3 Cylindrical coordinates



$$x = x(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi$$

$$y = y(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$$

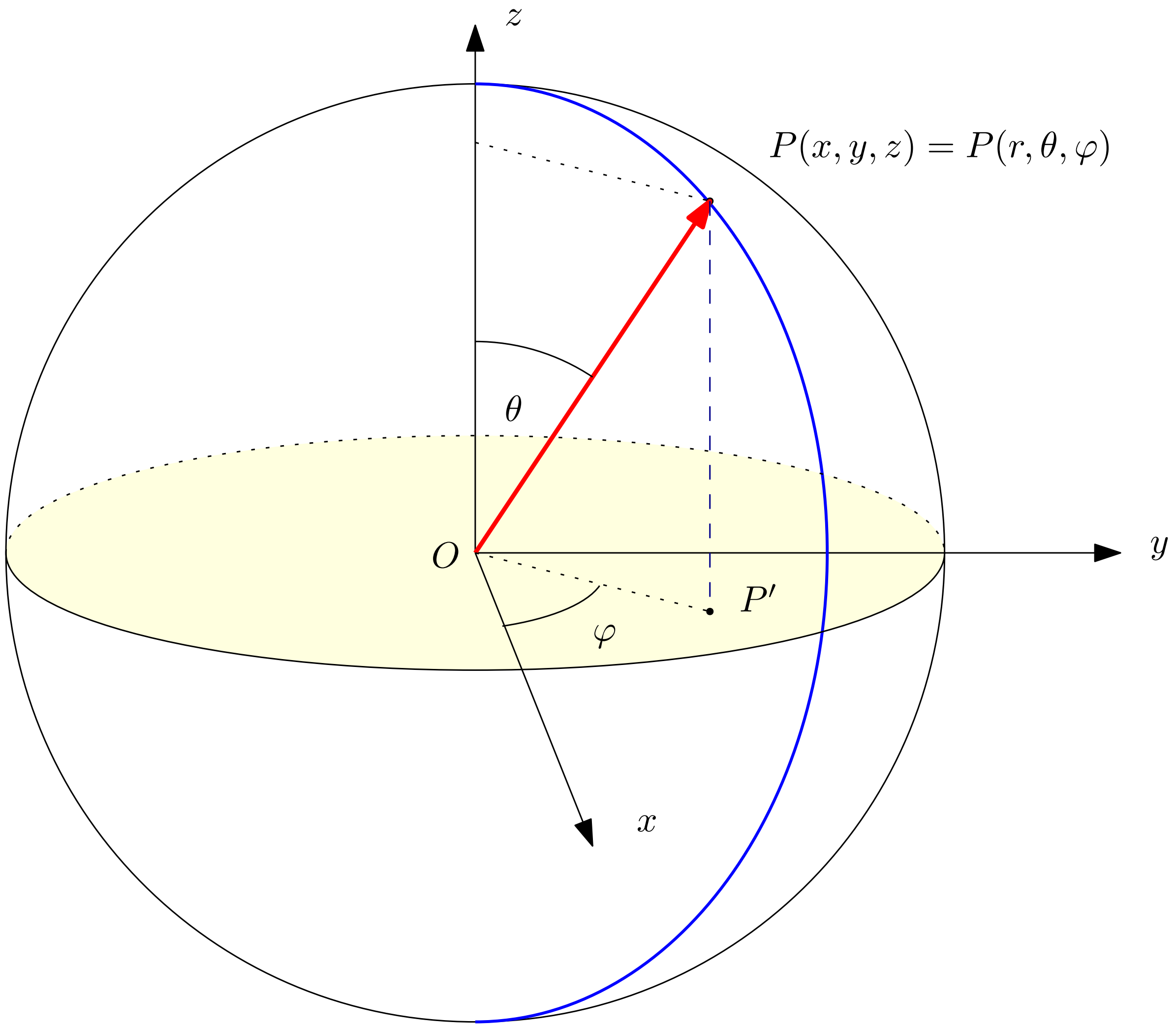
$$z = z = z$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dV = \rho\, d\rho\, dz\, d\varphi$$

Kugel-Koordinaten

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES



$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

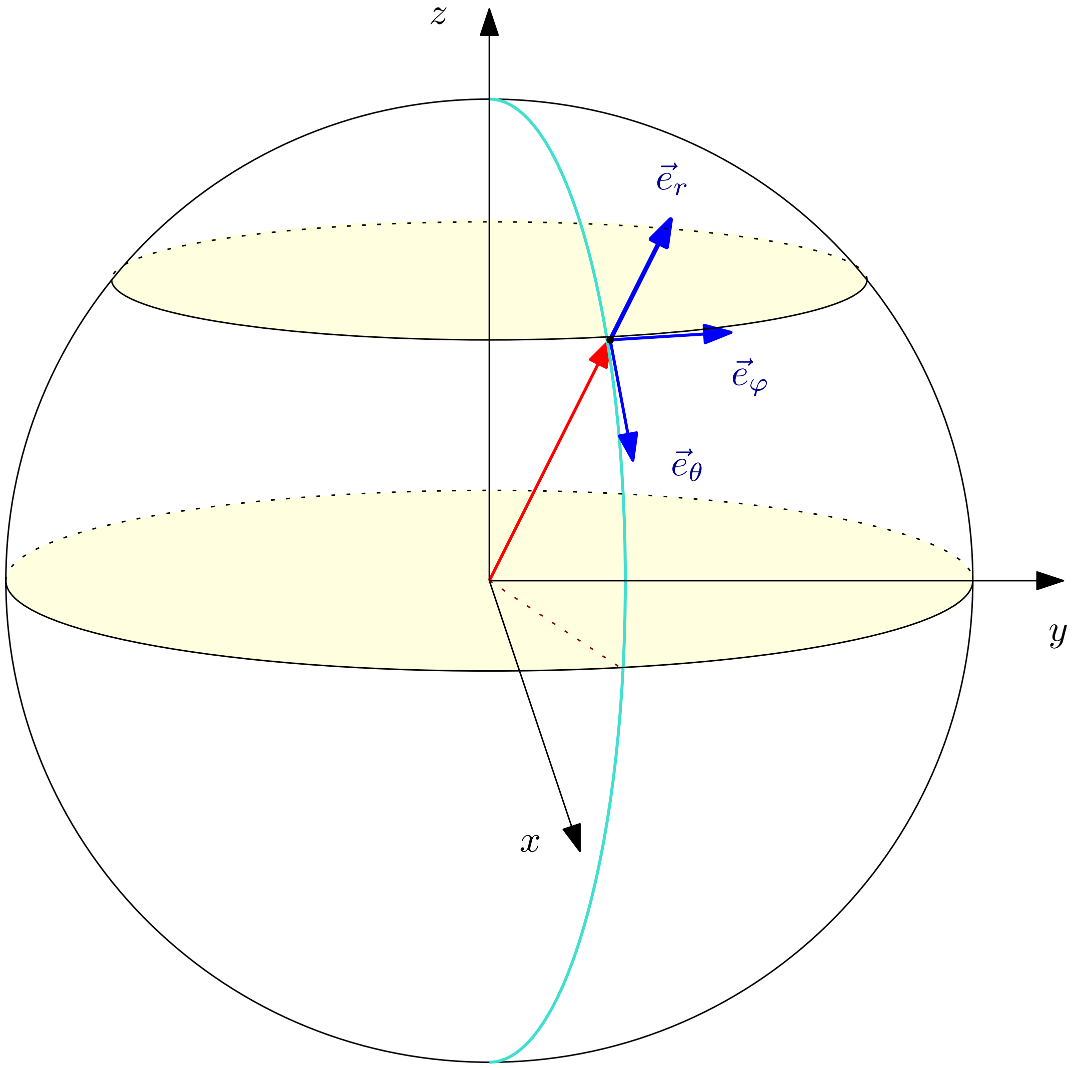
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

$$\overline{OP'} = r \sin\theta$$

$$\overline{PP'} = r \cos\theta$$

Kugel-Koordinaten: Basisvektoren



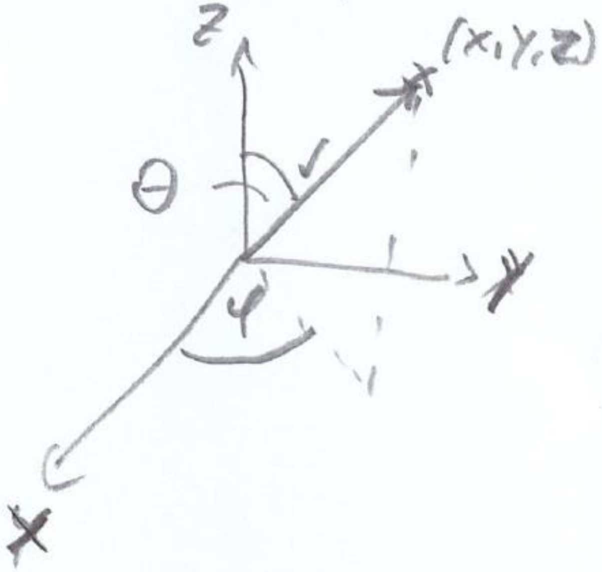
$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinder-Koordinaten: Jacobi-Matrix

2.92 Spherical coordinates



$$x = x(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = y(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\sin\varphi, \quad r\in[0,\infty),\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$z = z(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ volume element: $dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Bis bald!