1. [*0 Punkte*] **Perle auf schiefer Ebene**

Wir haben in der ersten Übung gesehen, wie wir mit Hilfe des zweiten Newtonschen Axioms oder des d'Alembert-Prinzips zur Bewegungsgleichung der Perle auf der schiefen Ebene gelangen. Hier sollen zwei weitere Methoden zur Behandlung mechanischer Probleme – nämlich die Lagrange-Gleichungen 1. Art und 2. Art – untersucht werden.

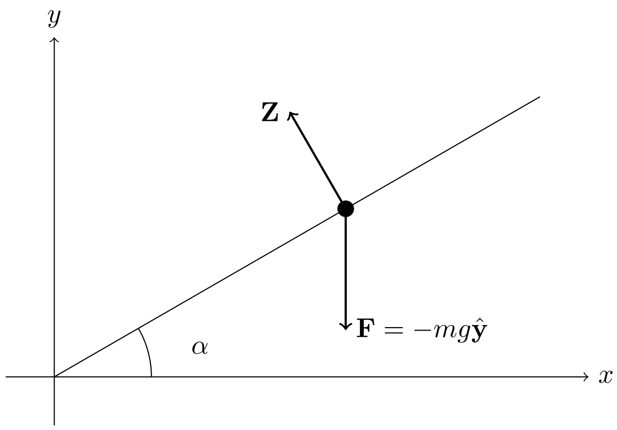
Eine Punktmasse m bewegt sich reibungsfrei auf einer glatten schiefen Ebene mit Neigungswinkel α. Der Punkt wird durch die Koordinaten $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ beschrieben. Die Bewegung erfolgt unter dem Einfluss der Schwerkraft g in negativer y-Richtung.

(a) Formuliere die Zwangsbedingung in Form einer skalaren Gleichung $f(x, y) = 0$, die die Bewegung auf der schiefen Ebene beschreibt.

(b) Stelle die Lagrange-Gleichungen 1. Art mit Hilfe des Multiplikators λ auf. Berechne daraus sowohl die Bewegungsgleichung als auch den Ausdruck für die Zwangskraft $\mathbf{Z} = \lambda \nabla f$ in kartesischen Koordinaten.

(c) Stelle nun die Lagrange-Gleichungen 2. Art auf und berechne daraus die Bewegungsgleichung. Gehe wie folgt vor:

- Schreibe die Lagrange-Funktion $L = T - V$ für das System ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingung auf.
- Wähle eine geeignete unabhängige generalisierte Koordinate aus.
- Drücke L in dieser Koordinate aus.
- Stelle schließlich die Lagrange-Gleichung 2. Art auf.



Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

2. [*Punkte*] **Kapitza-Pendel: Vertikal angeregtes Pendel**

Ein mathematisches Pendel der Länge ℓ und Masse m ist an einem Faden aufgehängt, dessen Aufhängepunkt sich in vertikaler Richtung harmonisch bewegt:

$$x_A(t) = 0, \quad y_A(t) = A\cos(\omega t).$$

Die Bewegung findet in der xy-Ebene statt, wobei die Schwerkraft g in negativer y-Richtung wirkt. Die Masse kann frei um den Aufhängepunkt schwingen.

(a) Stelle die Zwangsbedingung (die Masse bleibt stets im Abstand ℓ vom Aufhängepunkt) in kartesischen Koordinaten $x(t), y(t)$ auf.

(b) Stelle die Lagrange-Gleichungen 1. Art in den Koordinaten $x(t), y(t)$ auf.

(c) Verwende die Koordinatentransformation

$$x = r\sin\varphi, \quad y = -r\cos\varphi + A\cos(\omega t)\,.$$

um die Lagrange-Gleichungen 1. Art und die Zwangsbedingung in den neuen Koordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$ auszudrücken.

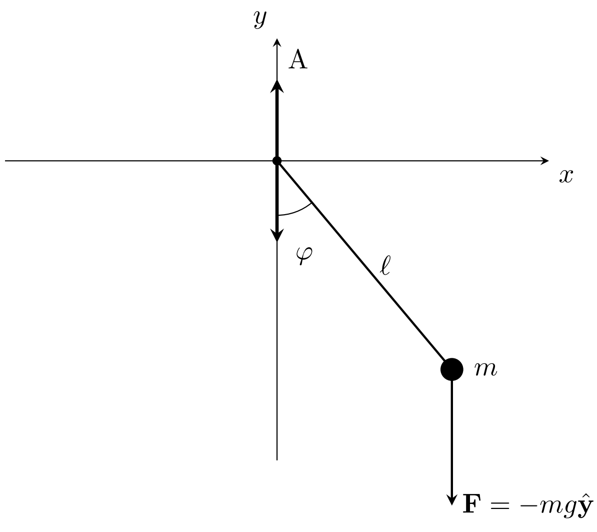
(d) Bestimme aus den transformierten Lagrange-Gleichungen 1. Art die Bewegungsgleichung und die Zwangskraft $\lambda(t)$.

(e) Interpretiere die einzelnen Beiträge der Zwangskraft physikalisch.

(f) Verwende die Lagrange-Gleichung 2. Art. Gehe wie folgt vor:

- Führe dazu eine geeignete generalisierte Koordinate $\varphi(t)$ ein, welche den Winkel des Fadens zur Vertikalen beschreibt.
- Stelle die Lagrange-Funktion $L = T - V$ auf.
- Leite daraus die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$ her.

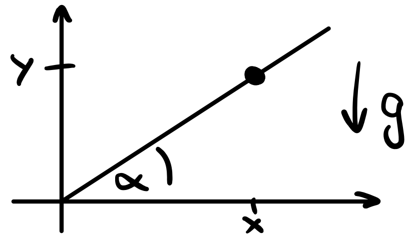
Hinweis: Die Bewegungsgleichung lautet: $\ddot{\varphi} = \left[\frac{A}{l}\omega^2\cos(\omega t) - \frac{g}{l}\right]\sin\varphi$



Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

Aufgabe 1:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{y}{x}$$



a) $f = y - x\tan(\alpha) = 0$

b) $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x\tan(\alpha) \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}$

$m\ddot{r} = \underline{F} + \underline{Z}$

$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

$\underline{Z} = \lambda \nabla f = \lambda \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\tan(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m\ddot{x} = -\lambda\tan(\alpha)$

$m\ddot{y} = \lambda - mg = m\ddot{x}\tan(\alpha)$

$\Rightarrow mg\tan(\alpha) - m\ddot{x}\tan^2(\alpha) = -\lambda\tan(\alpha) = m\ddot{x}$

$\Rightarrow m\ddot{x}\tan^2(\alpha) + m\ddot{x} = -mg\tan(\alpha)$

$\Leftrightarrow m\ddot{x}(1+\tan^2(\alpha)) = -mg\tan(\alpha)$

$\Leftrightarrow m\ddot{x}\left(1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right) = -mg\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$\Leftrightarrow \ddot{x} = -g\frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = -g\frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{\cos^2(\alpha)}} = -g\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\rightsquigarrow -mg\sin(\alpha)\cos(\alpha) = -\lambda\tan(\alpha)$

$\Rightarrow \lambda = mg\cos^2(\alpha)$

$\Rightarrow \underline{Z} = mg\cos^2(\alpha)\begin{pmatrix} -\tan(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} = mg\cos(\alpha)\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

c) $L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$

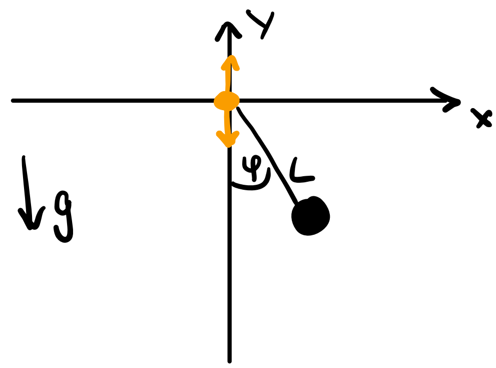
$$\underline{r} = r\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} \rightarrow \dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \dot{r}\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2(\alpha) + \dot{r}^2\sin^2(\alpha)\right) - mgr\sin(\alpha)$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 - mgr\sin(\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{r}}L\right) - \frac{\partial}{\partial r}L \overset{!}{=} 0 = m\ddot{r} + mg\sin(\alpha)$$

<u>Aufgabe 2:</u>



a) $f = x^2 + (y - A\cos(\omega t))^2 - \ell^2 = 0$

b) $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{Z}$ mit $\underline{F} = \begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix}$

$$\underline{Z} = \lambda\nabla f = \lambda\begin{pmatrix}2x\\ 2(y - A\cos(\omega t))\end{pmatrix}$$

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda x\\ 2\lambda(y - A\cos(\omega t)) - mg\end{pmatrix}$$

c) $\underline{r} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\sin(\varphi)\\ -r\cos(\varphi) + A\cos(\omega t)\end{pmatrix}$

$$\dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix}\dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi)\\ -\dot{r}\cos(\varphi) + r\dot{\varphi}\sin(\varphi) - A\omega\sin(\omega t\end{pmatrix}$$

$$\ddot{r} = \begin{pmatrix}\ddot{r}\sin(\varphi) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + r(\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2\sin(\varphi))\\ -\ddot{r}\cos(\varphi) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\varphi) + r(\ddot{\varphi}\sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2\cos(\varphi)) - A\omega^2\cos(\omega t)\end{pmatrix}$$

$$f = x^2 + (y - A\cos(\omega t))^2 - \ell^2 = r^2\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\varphi) - \ell^2 = r^2 - \ell^2 = 0$$

$\rightarrow r = \ell$ & $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\Rightarrow \quad ml(\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) = \lambda 2l \sin(\varphi) \qquad (I)$$

$$ml(\ddot{\varphi}\sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)) - mA\omega^2 \cos(\omega t) = -mg - \lambda 2l\cos(\varphi) \qquad (II)$$

d) $(I) \cdot \cos(\varphi) + (II) \cdot \sin(\varphi)$

$$\rightarrow \quad ml\ddot{\varphi} + mg\sin(\varphi) - mA\omega^2 \cos(\omega t)\sin(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \left\{ \frac{A}{l}\omega^2 \cos(\omega t) - \frac{g}{l} \right\} \sin(\varphi)$$

$(I) \cdot \sin(\varphi) - (II) \cdot \cos(\varphi)$

$$\rightarrow \quad \lambda = -\frac{m}{2l} \left\{ l\dot{\varphi} + (g - A\omega^2 \cos(\omega t))\cos(\varphi)) \right)$$

e) $ml\dot{\varphi}^2$: Zentrifugalkraft

$mg\cos(\varphi)$: Projektion der Gewichtskraft entlang des Fadens

$A\omega^2\cos(\omega t)$: Beschleunigung des Aufhängepunkts

f) $$\underline{r} = \begin{pmatrix} l\sin(\varphi) \\ -l\cos(\varphi) + A\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} l\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ l\dot{\varphi}\sin(\varphi) - A\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$= \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi) + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\varphi) - 2l\dot{\varphi}\sin(\varphi)A\omega\sin(\omega t) + A^2\omega^2 \sin(\omega t)\right) - mg(-l\cos(\varphi) + A\cos(\omega t))$$

$$= \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{\varphi}\sin(\varphi)A\omega\sin(\omega t) + A^2\omega^2\sin^2(\omega t)\right) + mg(l\cos(\varphi) - A\cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L = m\ell^2 \dot{\varphi} - m\ell \sin(\varphi) A\omega \sin(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L\right) = m\ell^2 \ddot{\varphi} - m\ell A\omega \left(\dot{\varphi}\cos(\varphi)\sin(\omega t) + \sin(\varphi)\omega\cos(\omega t)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} L = -m\ell\dot{\varphi}\cos(\varphi) A\omega \sin(\omega t) - mg\ell \sin(\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} L = m\ell^2 \ddot{\varphi} - m\ell A\omega^2 \sin(\varphi)\cos(\omega t) + mg\ell \sin(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = \left\{ \frac{A}{\ell}\omega^2 \cos(\omega t) - \frac{g}{\ell} \right\} \sin(\varphi)$$