1. [*Präsenz*] **Pendel und Feder - Akt I**

Wir betrachten eine Pendel der Länge ℓ und Masse m. Zusätzlich sei das Pendel mit einer an der Wand befestigten Feder mit Federkonstante k verbunden, die ihre Gleichgewichtslänge erreicht, wenn das Pendel vollkommen vertikal hängt. Wir wollen die Bewegung des Pendels für kleine Winkel beschreiben und nutzen die Auslenkung φ als geeignete generalisierte Koordinate.

(a) Zeichne ein Kräftediagramm für die auf die Pendel-Masse wirkenden Kräfte. Wie lauten die Projektionen dieser Kräfte auf die tangentiale Bewegung der Masse?

(b) Benutze das 2. Newtonsche Axiom, um eine Bewegungsgleichung für die schwingende Masse aufzustellen.

(c) Im Folgenden wollen wir eine Näherung für *kleine Winkel* vornehmen:

- Wie lassen sich die auftretenden trigonomischen Funktionen annähern?
  ($\sin(\varphi) \approx ??$, $\cos(\varphi) \approx ??$ für $\varphi \ll 1$)
- Für kleine Schwingungen kann man die Auslenkung der Feder x durch die Bogenlänge des Pendels ausdrücken. Wie hängt diese mit dem Winkel φ zusammen?

(d) Am Ende sollten wir eine Differenzialgleichung erhalten, die nur von der Variable φ abhängt. Kommt dir diese Differenzialgleichung bekannt vor? Lies die Eigenfrequenz ω_0 des gekoppelten Pendels ab.

(e) In der Vorlesung haben wir den Lagrange-Formalismus als einen anderen Weg kennengelernt, Bewegungsgleichung für mechanische Systeme aufzustellen. Wende diesen an, um die Differenzialgleichung aus den vorherigen Aufgabenteilen herzuleiten, d.h.:

- Stelle die kinetische Energie T und die potenzielle Energie V auf und bilde daraus die Lagrange-Funktion $L = T - V$.
- Führe die Näherung für kleine Winkel aus, um die Lagrange-Funktion zu vereinfachen.
- Wende die Lagrange-Gleichung an:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\,.$$

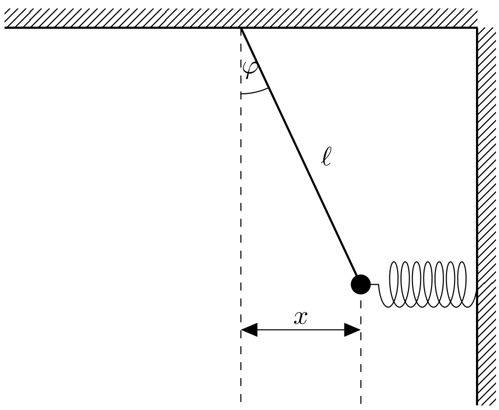


Abbildung 1: Skizze des Systems aus Pendel und Feder

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

2. [*Präsenz*] **Drei gekoppelte Fadenpendel**

Aus der Vorlesung kennen wir ein System aus zwei Fadenpendeln, die über eine Feder miteinander gekoppelt sind. Wir wollen dieses System nun um ein drittes gekoppeltes Pendel erweitern. Dabei nehmen wir an, dass alle Pendel die Länge ℓ sowie Masse m besitzen und durch identische Federn der Federkonstante k gekoppelt sind. Als generalisierte Koordinaten dienen die Auslenkungen φ_i.

(a) Stelle die kinetische Energie T sowie die potenzielle Energie V auf. Wir wollen das System für *kleine Winkel* untersuchen, weshalb wir die auftretenden trigonomischen Funktionen in V nähern. Die Auslenkung der Federn kann in dieser Näherung über die Bogenlänge der Pendel beschrieben werden, sodass das Endergebnis nur von den φ_i abhängen sollte.

(b) Nutze die Lagrange-Gleichung, um Bewegungsgleichungen für die jeweiligen Auslenkungen φ_i aufzustellen. Formuliere diese ebenfalls in Matrix-Schreibweise:

$$\mathbf{T}\ddot{\Phi} = -\mathbf{K}\Phi\,, \quad \text{mit } \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: **T** *sollte in deinem Ergebnis durch die Einheitsmatrix gegeben sein.*

Im Folgenden wollen wir die Eigenmoden des System näher untersuchen. Dafür muss zuerst das Eigenwertproblem

$$\det\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{T}\right) = 0$$

gelöst werden, um so die Eigenfrequenzen ω_i zu finden. Da dies für eine 3×3-Matrix nicht trivial ist, wird eine faktorisierte Form des charakteristischen Polynoms angegeben:

$$\det\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{T}\right) = \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{\ell} + 3\frac{k}{m} - \omega^2\right)\,.$$

(c) Lies die Eigenfrequenzen des Systems ab. Löse dann die Gleichungssysteme $(\mathbf{K} - \omega_i^2\mathbf{T})\mathbf{A} = 0$ um die (komplexen) Amplituden A_i der einzelnen Pendel zu finden. Beschreibe damit, wie die einzelnen Pendel relativ zueinander schwingen (Skizze) und sich die Amplituden zueinander verhalten.

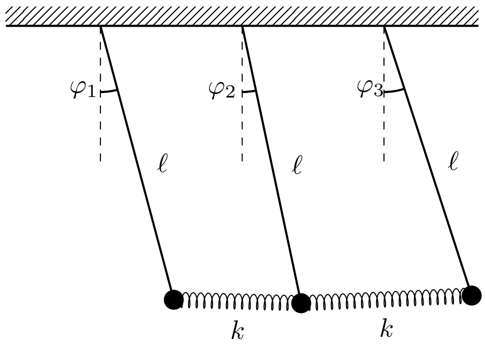
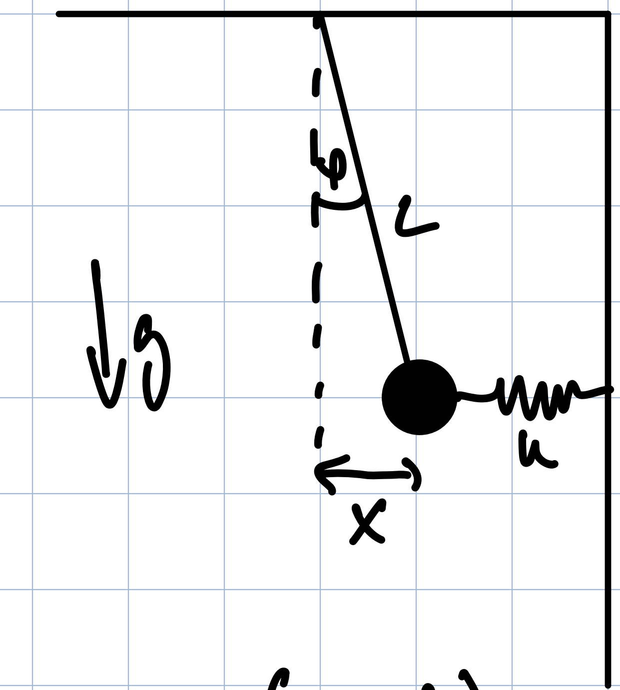


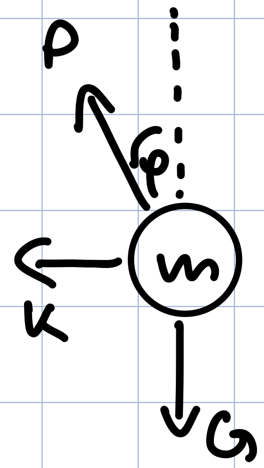
Abbildung 2: Skizze des Systems aus Pendel und Feder

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de`
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de`
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de`
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de`

A1)



(a) + (b)



P: Seilkraft des Pendels

K: Federkraft

G: Gewichtskraft

$$\underline{r} = L\begin{pmatrix}\sin\varphi\\-\cos\varphi\end{pmatrix} = L\underline{e}_r$$

$$\hookrightarrow \dot{\underline{e}}_r = L\dot\varphi \overbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}}^{=\underline{e}_\varphi}$$

$$\underline{F} = F\underline{e}_\varphi = -K\underline{e}_x - G\underline{e}_y - P\underline{e}_r \quad |\cdot \underline{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow mL\ddot\varphi = -kL\sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi$$

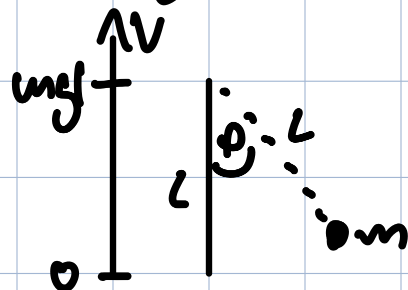
mit $\underline{K} = -kx\underline{e}_x$, $\underline{G} = -mg\underline{e}_y$

(c) $\sin\varphi \simeq \varphi + O(\varphi^3)$; $\cos\varphi \simeq 1 + O(\varphi^2)$

$$\Rightarrow mL\ddot\varphi = -kL\varphi - mg\varphi$$

$$\Leftrightarrow \ddot\varphi = -(k/m + g/L)\varphi$$

(d) Math. Pendel mit $\omega_0^2 = k/m + g/l$



(e) $T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m (l\dot{\varphi})^2$

$V_G = mgh = mgl(1-\cos\varphi)$

Sanity check: $V_G \xrightarrow{\varphi=0^\circ} 0$ ✓

$V_G \xrightarrow[\varphi=90^\circ]{} mgl \rightarrow \max$

$\varphi \ll 1$: $V_G \simeq mgl\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + O(\varphi^4)\right]$

$= \frac{mgl}{2}\varphi^2$

$V_F = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k l^2 \sin^2\varphi \overset{\varphi \ll 1}{\simeq} \frac{1}{2} k l^2 \varphi^2$

$L = T - V = T - V_G - V_F$

E-L: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot\varphi) + mgl\varphi + kl^2\varphi = 0$

$\Rightarrow \ddot\varphi = -(g/l + k/m)\varphi$ ✓

A2

(a) $\underline{r}_i = l \begin{pmatrix} \sin\varphi_i \\ -\cos\varphi_i \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{r}_i = l\dot{\varphi}_i$

$\Rightarrow T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} m l^2 \sum_i \dot{\varphi}_i^2$

$V_G = \sum_i mgl(1-\cos\varphi_i)$ (S. A1)

$\overset{\varphi_i \ll 1}{\simeq} \sum_i mgl \; \frac{1}{2}\varphi_i^2 = \frac{1}{2} mgl \sum_i \varphi_i^2$

$V_{\text{Feder}}^{\text{tot}} = V_{\text{Feder}}^{(12)} + V_{\text{Feder}}^{(23)}$

$= \frac{1}{2} k (\Delta x_{12}^2 + \Delta x_{23}^2)$

$\Delta x_{12}^2 = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^2 = l^2 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2$

$\overset{\varphi_i \ll 1}{\simeq} l^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2$; Δx_{23} analog

$\Rightarrow V_{\text{Feder}}^{\text{tot}} = \frac{1}{2} k l^2 \left[(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_3 - \varphi_2)^2 \right]$

$\Rightarrow L = T - V = T - V_G - V_{\text{Feder}} = \ldots$

(b) E-L: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi}_i\right) = ml^2\ddot{\varphi}_i$$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i}$ ist schwierig allg. auszurechnen, wegen der Asym. von V^{tot}_{Feder} bzgl. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

$$\frac{\partial V_G}{\partial \varphi_i} = mgl\varphi_i$$

$$\frac{\partial V^{tot}_{Feder}}{\partial \varphi_i} = kl^2 \begin{cases} -(\varphi_2-\varphi_1) & ; \quad i=1 \\ (\varphi_2-\varphi_1)-(\varphi_3-\varphi_2) & ; \quad i=2 \\ \varphi_3-\varphi_2 & ; \quad i=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ml^2\ddot{\varphi}_1 = -mgl\varphi_1 + kl(\varphi_2-\varphi_1) \\ ml^2\ddot{\varphi}_2 = -mgl\varphi_2 + kl(\varphi_3+\varphi_1-2\varphi_2) \\ ml^2\ddot{\varphi}_3 = -mgl\varphi_3 + kl(\varphi_2-\varphi_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} g/l+k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & g/l+2k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & g/l+k/m \end{pmatrix}}_{:= K} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

(c) System gekoppelter DGLn. Physikalisch erwarten wir, das die Lösungen Schwingungen sind, d.h.:

Ansatz: $\varphi(t) = \varphi_0 e^{i\omega t}$

in DGL

$\Rightarrow \quad -\omega^2 \varphi_0 e^{i\omega t} = -\underline{\underline{K}}\, \varphi_0 e^{i\omega t}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \mathbb{1})\varphi_0 = 0}$ ← Eigenwertproblem

Also suchen wir die Eigenwerte (-frequenzen) ω^2 und die zugehörigen Eigenvektoren (-moden) der (dynamischen) Matrix $\underline{\underline{K}}$.

EW: $\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$ mit Hinweis:

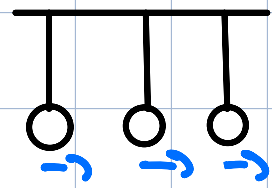
$$\omega_1^2 = g/L; \quad \omega_2^2 = g/L + k/m; \quad \omega_3^2 = g/L + 3k/m$$

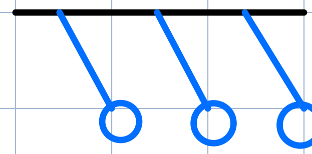
EV: $(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \mathbb{1})\varphi_{0,i} = 0$

$\omega_1^2 = g/L$:

$$\begin{pmatrix} k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & 2k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & k/m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{0,1}^x \\ \varphi_{0,1}^y \\ \varphi_{0,1}^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \varphi_{0,1}^x = \varphi_{0,1}^y, \quad \Rightarrow \varphi_{0,1}^y = \varphi_{0,1}^z$$

$\Rightarrow \varphi_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Alle Pendel schwingen in Phase.

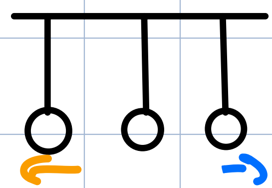


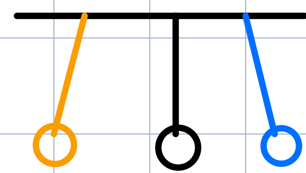


Analog: $\omega_2^2 = g/l + k/m$

$\varphi_{0,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Pendel 1,3 schwingen gegenphasig, Pendel 2 bleibt in Ruhe.

Analog: $\omega_3^2 = g/l + 3k/m$





$\varphi_{0,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Pendel 1,3 schwingen in Phase, Pendel 2 schwingt gegenphasig mit doppelter Amplitude.