1. [*Punkte*] **Hamilton-Funktion im ruhenden Bezugssystem**

Ein Objekt der Masse m bewegt sich ohne Reibung in der (x, y)-Ebene. Die Schwerkraft wirkt in negativer y-Richtung. Sei $\mathbf{r} = \binom{x}{y}$.

(a) Bestimme die Lagrange-Funktion $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T - V$.

(b) Berechne die generalisierten Impulse $\mathbf{p} = \binom{p_x}{p_y}$.

(c) Führe die Legendre-Transformation zur Hamilton-Funktion $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}))$ durch.

(d) Stelle die Hamiltonschen (kanonischen) Gleichungen auf. Kommentiere alle vier Gleichungen.

(e) Überprüfe, ob $H = T + V$ gilt.

2. [*Punkte*] **Hamilton-Funktion im bewegten Bezugssystem**

Die Regionalbahn RE 1 (Richtung Koblenz) bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 entlang einer geraden, horizontalen Strecke. Zwei Kinder spielen im Waggon Ball (wahrscheinlich nicht erlaubt) und werfen sich einen Ball der Masse m zu. Die Koordinaten (x, y) beschreiben die horizontale (in Fahrtrichtung) und vertikale (nach oben) Position des Balls relativ zum Wagen. Die Schwerkraft wirkt in negativer y-Richtung.

(a) Bestimme die Lagrange-Funktion $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ relativ zu einem ruhenden Bezugssystem.

(b) Bestimme die generalisierten Impulse $\mathbf{p} = \binom{p_x}{p_y}$.

(c) Führe die Legendre-Transformation zur Hamilton-Funktion H durch.

(d) Zeige explizit, dass die Hamilton-Funktion H nicht mit der Gesamtenergie $T+V$ übereinstimmt - weder im mitbewegten noch im ruhenden Bezugssystem.

3. [*Punkte*] **Teilchen auf einem Zylinder**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich reibungsfrei auf der Oberfläche eines Zylinders mit konstantem Radius R. Verwende Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z), um die Position des Teilchens zu beschreiben

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} ,$$

wobei $\rho = R$ konstant ist. Auf das Teilchen wirkt eine äußere Kraft der Form

$$\mathbf{F} = -kr\,\hat{\mathbf{r}} ,$$

hierbei ist k eine positive Konstante, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{R^2 + z^2}$ der Abstand zum Ursprung und $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ der Einheitsvektor, der vom Ursprung weg zeigt. Da $\rho = R$ konstant ist, erfolgt die Bewegung ausschließlich in den Koordinaten (φ, z).

(a) Bestimme das Potential $V(\mathbf{r})$, das zur gegebenen Kraft gehört.
Hinweis: Für konservative Kräfte mit einem radialsymmetrischen Potential $V(r)$ gilt:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \nabla r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} .$$

(b) Bestimme die Lagrange-Funktion $L(\varphi, z, \dot{\varphi}, \dot{z})$.

(c) Berechne die generalisierten Impulse $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ und $p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$.

(d) Bestimme die Hamilton-Funktion $H(\varphi, z, p_\varphi, p_z) = p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L\big(\varphi, z, \dot{\varphi}(p_\varphi), \dot{z}(p_z)\big)$.

(e) Stelle die Hamiltonschen Gleichungen für z und φ auf.

(f) Beschreibe die Bewegung qualitativ: Was für eine Bewegung findet in z-Richtung statt? Was ist über die Bewegung in φ-Richtung zu sagen?

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

Bl. H 7.)

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$

$p_x = \partial_{\dot{x}} L = m\dot{x} \rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$

$p_y = \partial_{\dot{y}} L = m\dot{y} \rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m}$

$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2}\right) + mgy$

$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy$

$\dot{x} = \partial_{p_x} H = \frac{p_x}{m}$, $\dot{p}_x = -\partial_x H = 0$

$\dot{y} = \partial_{p_y} H = \frac{p_y}{m}$, $\dot{p}_y = -\partial_y H = -mg$

$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{m}{2}\left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2}\right) + mgy$

$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy = H$

2) $L = \frac{m}{2}\left((\dot{x} + v_0)^2 + \dot{y}^2\right) - mgy$

$p_x = m(\dot{x} + v_0) \rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} - v_0$

$p_y = m\dot{y} \rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m}$

Bl. # 7a

2) $H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = \dots = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - p_x v_0$

$+ m g y$

$\dot{x} = \dots = \frac{p_x}{m} - v_0 \quad , \quad \dot{p}_x = 0$

$\dot{y} = \dots = \frac{p_y}{m} \quad , \quad \dot{p}_y = -mg$

$E_{\text{Zug}} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m g y$

$= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - p_x v_0 + \frac{m}{2} v_0^2 + m g y \neq H$

$E_{\text{Ruh}} = \frac{m}{2}\left(\left(\dot{x} + v_0\right)^2 + \dot{y}^2\right) + m g y$

$= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + m g y \neq H$

Bl. 4 Ta

3) $\underline{F} = -\nabla V(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \nabla r = -\frac{dV}{dr} \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$

$= -k\,\underline{r} \frac{r}{|\underline{r}|} \Rightarrow V(r) = \frac{k}{2} r^2$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} \rho c_\varphi \\ \rho s_\varphi \\ z \end{pmatrix} \underset{\rho = R}{=} \begin{pmatrix} R c_\varphi \\ R s_\varphi \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} -R\dot{\varphi} s_\varphi \\ R\dot{\varphi} c_\varphi \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

$T = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 = \frac{m}{2} \left(R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right)$

$V = \frac{k}{2} r^2 = \frac{k}{2} \left(R^2 + z^2 \right)$

$L = T - V$

$p_\varphi = \partial_{\dot{\varphi}} L = mR^2 \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}$

$p_z = \partial_{\dot{z}} L = m\dot{z} \rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$

$H = p_\varphi \cdot \dot{\varphi} + p_z \cdot \dot{z} - L$

$= \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{k}{2} \left(R^2 + z^2 \right)$

$\dot{\varphi} = \partial_{p_\varphi} H = \frac{p_\varphi}{mR^2}$

$\dot{p}_\varphi = -\partial_\varphi H = 0$

$\dot{z} = \partial_{p_z} H = \frac{p_z}{m} \qquad \dot{p}_z = -\partial_z H = -kz$

$\ddot{z} = \frac{\dot{p}_z}{m} \rightarrow \ddot{z} = -\frac{k}{m} z \qquad$ Oszillator