Newton: 1. $\dot r(t) = v = $ const. → kräftefreie Bewegung 2. $\frac{dp}{dt} = \vec F$, $p = m \cdot v$, $m\ddot r = \vec F$ 3. actio = reactio $F_{12} = -F_{21}$ nur in IS alle
G-Feld mit Reibung: $m\ddot x = -mg - \gamma \dot x$, fr. gedämpfte Schwingung $m\ddot x = -kx - 2m\lambda\dot x$, erzw. Schwingung $\ddot x + \omega_0^2 x + 2\lambda \dot x = f\cos(\omega t)$
Potential $U(x) = -\int dx\, F(x) + $ const. Arbeit $W = \int_C d\vec r \cdot \vec F(\vec r)$, falls über geschl. Weg $= 0$ dann konservativ $\vec\nabla \times \vec F = 0 \mid \vec F(\vec r) = -\vec\nabla V(\vec r)$
Galilei Tf zw. Inertialsystemen $\vec r' = \vec r - \vec v t$, $t' = t$ → universelle Zeit, kein IS ausgezeichnet alle äquivalent | Polar: $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\phi = \arctan\frac{y}{x}$
$U = -mgx$, $F = -\frac{dV}{dx} = -mg$, $\frac{m}{2}\dot x(t)^2 = E - U(t) \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2[E-U(x)]/m}} dx'$, $x(t) = \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0) + x_0$ | Impulseh.: $F = 0 \to \frac{dp}{dt} = 0$ $p = $ const
Drehimp.eh.: $\frac{dL}{dt} = M$, $M = r \times F$ (Drehmoment) $M = 0 \to L = $ const. Drehimp. polar: $L = mr^2\dot\varphi$. Drehimp bei Zentralkraft erhalten wegen $\vec r \parallel \vec F$
$F = F_{kons} + F_{diss} \to F_{kons} \cdot \dot{\vec r} = -\frac{dU(\vec r)}{dt}$, $F_{diss} \cdot \dot{\vec r} = \frac{d}{dt}(T + U(\vec r))$, Energieen. $T + U(r) = E = $ konst wenn F konservativ | Potential Pendel: $U(\phi) = mgl(1-\cos\phi)$

Mehrteilchensysteme: Schwaches actio = reactio: $F_{ij} = -F_{ji}$, Newton 2 $\dot{\vec p}_i = F_i^{ext} + \sum F_{ij}$, Schwerpunkt: $r_S = \sum \frac{m_i r_i}{M}$ Sp.satz $M\ddot{\vec r}_S = F^{ext}$
→ Sp bewegt sich so, als ob gesamte Masse in ihm vereint wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen. | $\frac{d}{dt}\sum p_i = F^{ext}$
in abgeschl. Systemen $F^{ext} = 0$ gibt es 6 Erhaltungsgr. $\vec r_S$, $\dot{\vec r}_S$, Drehimp. $\frac{dL}{dt} = M^{ext}$ | Falls zu $F_{ij} = -F_{ji}$ (schwach) noch $F_{ij} \parallel (r_i - r_j)$ kommt → starkes Gesetz von actio reactio
→ Impulssatz: schwaches ac-re Drehimpulssatz, starkes ac-re. Innere Kräfte verrichten keine Arbeit bei starren Körpern

Lorentz-Tf: $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$, Inverse Tf: $x = \gamma(x' + vt')$ $y = y'$, $z = z'$, $t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
4-er Vektor: $r^\mu = (ct, x, y, z)$ Lorentz-Tf Matrix: $\Lambda^\mu_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & \\ \gamma\beta & \gamma & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} r'^\nu$, $\beta = \frac{v}{c}$
Relativität der Gleichzeitigkeit: Uhren die in einem IS synchron sind, müssen in einem anderen IS nicht synchron sein
Zeitdilatation $t' = \gamma \cdot t$, Längenkontraktion $L' = \frac{1}{\gamma}L$ (gestrichen = bewegt) → moving clocks run slowly
Minkowski Metrik: $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$, Vierergeschw. $u^\mu = \gamma(c, \vec v)$ ← kontravariant u_μ → kovariant: mit Metrik: $r_\mu = \eta_{\mu\nu} r^\nu$
Produkt $r^\mu r_\mu = $ const in allen IS $-c^2$ | $v^x = \frac{v'^x + v}{1 + \beta_v \frac{v'^x}{c}}$ $v^y = \frac{v'^y}{\gamma_v(1 + \beta_v \frac{v'^x}{c})}$, $v^z = \frac{v'^z}{\gamma_v(1 + \beta_v \frac{v'^x}{c})}$ | $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$ für $v_1 \parallel v_2$
Viererimpuls: $p^\mu = m u^\mu = \gamma m(c, \vec v)$ wobei $p^0 = \gamma m c = \frac{E}{c} \Rightarrow p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec p)$ $p^\mu p_\mu = -m^2c^2$, Ruhesystem Teilchen: $p^\mu = (mc, \vec 0)$
Viererkraft: $f^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \mu}$, Minkowskikraft $f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$ τ: Eigenzeit, $f^\mu = (\gamma \frac{1}{c}\vec v \cdot \vec F, \gamma \vec F)$ | lichtartig $A^\mu A_\mu = 0$, raum: $A^\mu A_\mu > 0$
zeitartig $A^\mu A_\mu < 0$; zeitartig hängen kausal zusammen, raumartig nicht

Holonome Zwb $f_i(\vec r_1, \dots, \vec r_N, t) = 0$ k unabh. holonome Zwb verringern die Anzahl an Freiheitsgraden von $3N$ auf $3N - k$
Scheibe rollt schiefe Ebene: $x_S = x_S^0 + r\phi\cos\alpha$, $y_S = y_S^0 + r\phi\sin\alpha$, Pendel $r = \sqrt{x^2+y^2} = l$, θ unabh., Perle auf rot. Draht $\phi - \omega t = 0$ $z - ar^2 = 0$
Skleronom: nicht expl. zeitabh., rheonom: expl. zeitabh. | nicht holonome Zwb. lassen sich nicht in der Form $f_i(\dots) = 0$ schreiben
Lagrange 1: gilt für alle Zwb., kann Zwkräfte bestimmen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \operatorname{grad} f_i(\vec r, t)$, bzw vorne $m\ddot r = \sum \lambda_i \cdot \operatorname{grad} f_i + F$
man hat $3N + k$ Gleichungen | Zwangskräfte können keine virtuelle Arbeit verrichten | $L = T - V$, $T = $ kin $= \frac{1}{2}m\dot r^2$, $V = $ pot.
Lagrange 2: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ → $f = 3N - R$ Freiheitsgrade | Zyklische Koordinate: q_k kommt nicht vor: $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \to \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = 0$
→ $\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = $ const $= p_k$ → verallgemeinerter Impuls ist erhalten | Energie erhalten wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ bzw die Zwb. nicht explizit
von t abhängen → $E = U + T$ (gilt nicht wenn sich Fadenlänge ändert oder wenn Parabel rotiert → E wird von außen hinzugefügt)
Hamilton: $H = [\sum \dot q_i p_i] - L$, $\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot p_k$, $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot q_k$ wenn $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ dann ist H erhalten → const. $H = T + U$
wenn $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \to p_k$ erhalten ↳ Hamiltonischen Gleichungen, wenn H u. E erhalten dann $H = E$, wenn $L = T(\dot q), U(q, t)$
T für $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $z = 0$ $T = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)$ | Gravitation $F = -G\frac{Mm}{r^2}$ ↳ $U = -G\frac{Mm}{r}$, Coulomb $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ ↳ $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$, harm. Oszill. $F = -kr$ ↳ $U = \frac{1}{2}kr^2$
Zentralkraft: bei festem Urspr. ist L erhalten $\vec F = -\nabla U(\vec r)$ $L = \frac{1}{2}\mu(\dot r^2 + r^2\dot\phi^2) - U(r)$ | Energie, Schwerpunkts-Impuls u. Drehimp. erhalten
$L = \frac{m_1}{2}\dot r_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot r_2^2 - U(|r_1 - r_2|) \Rightarrow L = \frac{M}{2}\dot R^2 + \frac{\mu}{2}\dot r^2 - U(r) \Rightarrow$ Herleitung: $L = \mu r^2\dot\phi \Leftrightarrow \dot\phi = \frac{L}{\mu r^2}$ setze in Lagrange ein: $L = \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + \underline{\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + U(r)}$
Effektives Potential: $U_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)$, Herleitung: ...
$E = T + U = \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) \to$ DGL $\to t = \pm\int_0^r \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2})}} dr' + $ const | Kreisbahn bei $\frac{d}{dr}U_{eff} = 0$ | $0 \le \varepsilon \le 1$ geb. → für $q_1 q_2 < 0$
Umkehrpunkt bei $E = U_{eff}$, Bewegung beschränkt auf $E - U_{eff} > 0$, gebundene Bahnen $r_{min} \le r \le r_{max}$
Im Gravitationspotential: $r_{min} = a(1 - \varepsilon)$, $r_{max} = a(1 + \varepsilon)$ $\varepsilon > 1$: Hyperbel $\frac{T^2}{a^3} = C = \frac{4\pi^2}{GM}$ → Für Bew. um Erde: $a = \left(\frac{\sqrt{GM}T}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$
Kepler: 1) Ellipse, 2) Fahrstrahl in gl. Zeiten gl. Flächen ⇒ $L_z = mr^2\dot\phi$ 3) $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$ $a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max})$ $r_{min} = r_p = $ Perihelion, $r_{max} = $ Aphelion
Raumwinkel Streuung $\Omega = \frac{A}{R^2}$ R Abstand Target-Fläche
Beschl | Rotierende Bezugssysteme: Nutze „Scheinkräfte" $F_{zf} = -m\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r')$ Zentrifugal, $F_c = -2m(\vec\omega \times \vec v')$ Coriolis, $F_{eu} = -m\dot{\vec\omega} \times \vec r'$ Eulerkraft ⇒ $\vec F' = F + F_{zf} + F_c + F_{eu}$

Starre Körper: 6 Freiheitsgrade: 3 rot 3 transl. Euler: alle räuml. Tr., die die Abstände der Teilchen invariant lassen sind Kombi aus rot und trans
Eulerwinkel $R_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → $R(\phi, \theta, \psi) = R_3(\psi) R_2(\theta) R_1(\phi)$ $\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = R(\phi, \theta, \psi)\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ $\delta_{ab} = 1$ $a = b$, $\delta_{ab} = 0$ $a \ne b$
$\omega_{x'} = \dot\phi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi$, $\omega_{y'} = \dot\phi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi$, $\omega_{z'} = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi$ | $I_{ab} = \int dm\,(r^2\delta_{ab} - r_a r_b)$ ← Trägheitstensor
Hauptträgheitsachsen: $I = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$ → $L = I\omega$ Rotation um Hauptträgheitsachsen stabil (außer mittlere)
Steinscher Satz $I = I_S + ma^2$ → I_S Trägheitsm. um Schwerpunkt | Ekin: $T = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$
Euler Gl.: $M_1 = I_1\dot\omega_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3$, $M_2 = I_2\dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1$, $M_3 = I_3\dot\omega_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$

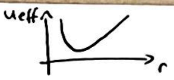
Kanonische Tf: $F_1(q, Q, t)$: $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$ | $F_2(q, P, t)$: $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$ | $F_3(p, Q, t)$: $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$
$F_4(p, P, t)$: $q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$ $Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$
Noether-Theorem: Wenn unter bestimmten Transformationen die Gesetze der Physik unverändert bleiben, existiert eine Erhaltungsgr.
↳ Verbindung zw. Symmetrien und Erhaltungssätzen
„Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie in einem physikalischen System gehört eine Erhaltungsgröße"

v^2 einer Kugelbewegung: $v^2 = r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2$; $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$
v^2 einer Kreisbewegung: $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$

Trägheitsmoment dünne Scheibe $I_{zz} = \int r_{zz}^2\, dm = \rho\int r_{zz}^2\, \underset{r\,dr\,d\varphi}{dV} = \rho\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi} r_{zz}^2\, d\varphi$
$= \rho\frac{1}{4}R^4 2\pi = \frac{M}{V}\frac{1}{2}R^4\pi = \frac{M}{\pi R^2}\frac{1}{2}R^4\pi = \underline{\frac{1}{2}MR^2}$

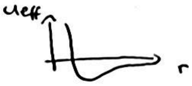
$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = \pi$

$U_{eff} = kr^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



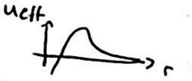
← HO → Rückstellkraft $F = -kr$

$U_{eff} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



← Gravitation, Coulomb

$U_{eff} = -\frac{k}{r^3} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



← elliptisch

$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}$

$v = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}}{r}$ z.B bei $E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2$ nutze Radius von Trägheitsmoment

Hamilton $H = p \cdot \dot{q} - L$ → $\dot{q}$ aus kanonischen Impuls → Impuls nach $\dot{q}$ auflösen, sodass Fkt von p

$H = T + V$ wenn Zusammenhang zw verallg. und kartesischen Koord. nicht zeitabh. sind

$L = p \cdot v - H$ → Legendre Tf

$I^2 \dot{\omega} \omega = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} I^2 \omega^2$

$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$

$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ μ ← Zeile, ν ← Spalte

$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

$T = \frac{1}{2} I \frac{L^2}{m^2 r^4}$