1. [*Punkte*] **Eine Transformation die Leben leichter macht.**
Betrachte ein System mit einem Freiheitsgrad, dessen Hamilton-Funktion gegeben ist durch

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right) .$$

Dieses System wirkt auf den ersten Blick kompliziert, lässt sich aber durch eine geeignete kanonische Transformation exakt auf die Form eines harmonischen Oszillators überführen.

(a) Finde die Bewegungsgleichung für q.
Hinweis: Verwende die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

um $\ddot{q}$ zu berechnen.

(b) Finde eine Transformation $(q,p) \mapsto (Q,P)$, die das System in die Form eines harmonischen Oszillators

$$\bar{H}(Q,P) = \frac{1}{2}\left(P^2 + Q^2\right)$$

überführt.
Hinweis: Eine mögliche Wahl ist: $Q = \ldots$ und $P = \pm pq^2$

(c) Überprüfe ob diese Transformation kanonisch ist, indem du eine geeignete erzeugende Funktion $M_2(q,P)$ angibst, die

$$p = \frac{\partial M_2}{\partial q} \quad \text{und} \quad Q = \frac{\partial M_2}{\partial P}$$

erfüllt.
Hinweis: Drücke mit Hilfe der Transformationsgleichungen $p(q,P)$ und $Q(q,P)$ als Funktion von q und P aus. Integriere die beiden Gleichungen um die erzeugende Funktion $M_2(q,P)$ zu bestimmen.

(d) Stelle die neuen Hamiltonschen Gleichungen in den Variablen Q und P auf und leite daraus die Bewegungsgleichung für Q ab. Vergleiche mit der Bewegungsgleichung des ursprünglichen Problems aus (a). Was fällt dir beim Vergleich auf? Leite anschließend aus der bekannten Lösung des harmonischen Oszillators eine allgemeine Lösung $q(t)$ ab.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de`
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de`
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de`
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de`

2. [*Punkte*] **Rotation im Phasenraum**

Was passiert, wenn man die Rollen von Ort und Impuls in der Hamiltonmechanik mischt? Diese Aufgabe führt dich in die Idee einer Phasenraumrotation ein – und zeigt dir, dass sogar ein freies Teilchen plötzlich ganz anders aussehen kann. Betrachte ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension. Die Hamilton-Funktion lautet:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m}\,.$$

Gegeben ist die erzeugende Funktion $M_1(q,Q)$, die eine kanonische Transformation mit dem Parameter φ beschreibt:

$$M_1(q,Q) = \frac{1}{2}\left(q^2 + Q^2\right)\cot\varphi - qQ\csc\varphi\,.$$

(a) Bestimme aus $M_1(q,Q)$ zunächst die Gleichungen für $p(q,Q)$ und $P(q,Q)$ mit Hilfe von

$$p = \frac{\partial M_1}{\partial q} \quad \text{und} \quad P = -\frac{\partial M_1}{\partial Q}\,.$$

Forme diese anschließend um, sodass du explizit $Q(q,p)$ und $P(q,p)$ erhältst.

(b) Bestimme mit Hilfe der Transformationsgleichungen die neue Hamilton-Funktion $\bar{H}(Q,P)$.

(c) Betrachte gesondert die Fälle $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Bestimme jeweils $\bar{H}(Q,P)$ und daraus die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \quad \text{und} \quad \dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P}\,.$$

Diskutiere diese. Welche Koordinate ist für die jeweiligen Winkelwerte φ zyklisch?

(d) Untersuche die erzeugende Funktion M_1 für den Fall $\varphi \to 0$. Führe eine Taylorentwicklung von M_1 für kleine φ durch. Was fällt dir auf? Wie lässt sich dieses scheinbare Problem interpretieren oder umgehen? Gibt es eine andere wohldefinierte erzeugende Funktion, die dieselbe Transformation beschreibt?

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

A1

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$$

(a) $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p q^4$ $\qquad$ I

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = +\frac{1}{q^3} - 2p^2 q^3$ $\qquad$ II

$\overset{\text{I}}{\Rightarrow} p = \dot{q}/q^4$ $\qquad$ III

$\overset{\frac{d}{dt}\text{I}}{\Rightarrow} \ddot{q} = \dot{p} q^4 + 4p\dot{q}q^3$

$\overset{\text{II},\text{I}}{=} q - 2p^2q^7 + 4p^2q^7$

$\overset{\text{III}}{=} q + 2\frac{\dot{q}^2}{q}$

(b) $\bar{H}(Q,P) = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) \equiv \frac{1}{2}\left(p^2q^4 + \frac{1}{q^2}\right) = H(q,p)$

$\Rightarrow P = \pm pq^2, \; Q = \frac{1}{q}$

(c) $p = \frac{\partial M_2}{\partial q} \overset{(b)}{=} \pm P/q^2$

$\Rightarrow M_2 = \pm \int dq\, P/q^2 + f(P)$

$$= \mp P/q + f(P)$$

$$Q = \frac{\partial M_2}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\mp P/q + f(P)\right)$$

$$= \mp 1/q + f'(P) \overset{(b)}{=} 1/q$$

$\Rightarrow$ für "–" nicht möglich

$\Rightarrow$ $P = -pq^2$ einzige Möglichkeit

Analog auch möglich: $Q = -\frac{1}{q}$, $P = +pq^2$.

$\Rightarrow f'(P) = 0$

$\Rightarrow f(P) = \text{const.} \overset{\text{einfacher}}{=} 0$

$\Rightarrow M_2(q,P) = P/q \xrightarrow{\partial_q} -P/q^2 = p$ ✓

$\xrightarrow{\partial_P} 1/q = Q$ ✓

(d) $\dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = P \overset{d/dt}{\Rightarrow} \ddot{Q} = \dot{P} = -Q$

$\dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = -Q \overset{d/dt}{\Rightarrow} \ddot{P} = -\dot{Q} = -P$

harm. Osz.

$\Rightarrow Q(t) = A\cos t + B\sin t$

$\Rightarrow q(t) = 1/Q(t) = [A\cos t + B\sin t]^{-1}$

A2

$H(q,p) = \frac{p^2}{2m}$ ⇐ freies Teilchen

$M_1(q,Q) = \frac{1}{2}(q^2 + Q^2)\cot\varphi - qQ\csc\varphi$

(a) $p = \frac{\partial M_1}{\partial q} = q\cot\varphi - Q\csc\varphi = \frac{q\cos\varphi - Q}{\sin\varphi}$ I

$P = -\frac{\partial M_1}{\partial Q} = -Q\cot\varphi + q\csc\varphi = \frac{-Q\cos\varphi + q}{\sin\varphi}$ II

II ⇔ $q = -Q\cos\varphi + P\sin\varphi$

$\overset{\text{I}}{\Rightarrow}$ $p = -Q\frac{\cos^2\varphi + 1}{\sin\varphi} + P\cos\varphi = -Q\sin\varphi + P\cos\varphi$

(b) $\bar{H}(Q,P) = \frac{1}{2m}(P\cos\varphi - Q\sin\varphi)^2$

(c) $\underline{\varphi = 0}$: $\bar{H} = \frac{P^2}{2m}$ → Q ist zyklisch

$\dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{const.}$

$\dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = P/m \Rightarrow Q(t) \propto \frac{P}{m}t$ ⇐ linear

$\underline{\varphi = \pi/4}$: $\bar{H} = \frac{1}{4m}(P - Q)^2$ → keine zykl. Koord.

$\dot{P} = +\frac{1}{2m}(P-Q) = \dot{Q} = \frac{1}{2m}(P-Q)$

$\Rightarrow \ddot{P} = \frac{1}{2m}(\dot{P}-\dot{Q}) = 0 = \ddot{Q}$

$\Rightarrow$ P und Q lineare Fkt. in t

<u>$\varphi = \pi/2$:</u> $\bar{H} = \frac{Q^2}{2m} \rightarrow P$ ist zyklisch

$\dot{Q} = 0 \Rightarrow Q = \text{const.}$

$\dot{P} = -Q/m \Rightarrow P(t) \propto -\frac{Q}{m}t$ linear

(d) $\varphi \ll 1$: $\cos\varphi \rightarrow 1$, $\sin\varphi \rightarrow \varphi$

$\Rightarrow \cot\varphi \rightarrow \frac{1}{\varphi}$, $\csc\varphi \rightarrow \frac{1}{\varphi}$

$M_1 \simeq \frac{1}{2}(q^2+Q^2-qQ)\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{2\varphi}(q-Q)^2$

Für $\varphi \to 0$ divergiert M_1 wenn $q \neq Q$.

$\varphi = 0$, d.h. wir suchen die kanonische Transf.
$q = Q$, $p = P$.

$M_2(q,P) = qP$ $\xrightarrow{\partial q} P = p$ ✓

$\xrightarrow[\partial p]{} q = Q$ ✓