1. [*Punkte*] **Attraktives inverses Quadratpotential**

Gegeben sei ein eindimensionales System mit der Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2}.$$

(a) Definiere $y = q^2$ und berechne die Zeitentwicklungsgleichung $\dot{y} = \{y, H\}$.

(b) Berechne auch $\ddot{y}$, indem du erneut die Poisson-Klammer verwendest. Zeige, dass sich daraus eine Differentialgleichung für $y(t)$ ergibt.
Hinweis: Die Differentialgleichung lautet

$$\ddot{y} = \frac{\dot{y}^2}{2y} - \frac{2}{y}\,.$$

(c) Löse die Differentialgleichung unter Verwendung der Energieerhaltung und nutze die Anfangsbedingungen

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = 0$$

um die Integrationkonstanten zu bestimmen. Gib $q(t)$ als Funktion der Zeit an.
Hinweis: Du hast die Lösung schon einmal in Aufgabe 10 Übungsblatt 5 hergeleitet.

(d) Diskutiere bis zu welchem Zeitpunkt die Lösung physikalisch sinnvoll ist. Was passiert mit dem Teilchen zu diesem Zeitpunkt?

(e) Zeige, dass die Größe

$$D = \frac{pq}{2} - Ht$$

eine Erhaltungsgröße des Systems ist. Berechne hierzu

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \{D, H\} + \frac{\partial D}{\partial t}\,.$$

Bemerkung: Diese Erhaltungsgröße D ist mit der Invarianz der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen dieses Systems gegenüber der Transformation $q' = \lambda q$, $p' = p/\lambda$ und $t' = \lambda^2 t$ verbunden und reflektiert die Skalierungssymmetrie des Problems, siehe Aufgabe 10 Übungsblatt 5.

2. [*Punkte*] **Hamilton-Jacobi für das freie Teilchen**

Gegeben sei ein freies Teilchen der Masse m auf der Geraden mit der Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m}.$$

(a) Stelle die Hamilton-Jacobi-Gleichung $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ für dieses System auf, wobei $p = \frac{\partial S}{\partial q}$.

(b) Finde eine vollständige Lösung $S(q, \alpha, t)$ der Hamilton-Jacobi-Gleichung durch Separation der Variablen, d.h. $S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t$, wobei α ein Parameter ist.

(c) Zeige, dass die Lösung S eine kanonische Transformation erzeugt, die die Bewegung trivialisiert. Bestimme die neue konstante Größe $\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$, die als kanonisch konjugierte Größe zu α interpretiert werden kann. Löse nach $q(\alpha, \beta, t)$ auf. Welche Dimension hat β?

(d) Berechne $p = \frac{\partial S}{\partial q}$.

(e) Bestimme α und β aus den Anfangsbedingungen $q(0) = 0$ und $p(0) = p_0$ durch Einsetzen in die Lösung aus den vorherigen Teilen. Interpretiere anschließend den Wert von α physikalisch. Gib $q(t)$ und $p(t)$ an.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de