1. [*Präsenz*] **Grundlegende Trägheitstensoren**

(a) Bestimme die Matrix-Form des Trägheitstensors $\boldsymbol{\Theta}$ für einen Zylinder mit Höhe h und Radius R. Nutze dazu Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und lege das körperfeste Koordinatensystem so, dass sein Ursprung im Schwerpunkt des Zylinders liege. Gehe von einer homogenen Massedichte aus, d.h $\mu(\mathbf{r}) = \mu = \frac{m}{V}$, $\forall \mathbf{r} \in V$, m und V entsprechend die Masse bzw. das Volumen des betrachteten Körpers.
Hinweis: *Ein Zylinder mit Höhe h und Radius R der Basis besitzt das Volumen $V = \pi R^2 h$. Drücke damit dein Endergebnis so aus, dass nur noch die Masse m des Körpers auftaucht, nicht die Massedichte. Du musst zudem nicht alle Integrale explizit berechnen, wenn du über die Symmetrie die Gleichheit mehrerer Trägheitsmomente begründen kannst. Kannst du auch eine Aussage über die Derivationsmomente Θ_{ij}, $i \neq j$ treffen?*

(b) Überlege dir, welche Grenzübergänge du machen musst, um aus dem Zylinder einen Stab der Länge ℓ oder eine Scheibe vom Radius R, beide mit vernachlässigbarer Dicke, zu erhalten. Gib dann mittels Teil a) die entsprechenden Trägheitsmomente an.

(c) Betrachten wir erneut einen dünnen Stab der Länge ℓ. Die angegebenen Trägheitsmomente beziehen sich zur Zeit auf dessen Schwerpunkt. Wie lauten die Trägheitsmomente, wenn sich der Fixpunkt des Stabes hingegen an einem seiner Endpunkte befindet?
Hinweis: *Verwende den Satz von Steiner.*

(d) Eine idealisierte Punktmasse m im Ursprung besitzt kein Trägheitsmoment. Gilt dies auch, wenn wir die Punktmasse um eine Achse $\mathbf{e}_n$ im festen Abstand d rotiert? Gib das Trägheitsmoment der Punktmasse bezüglich der Drehachse an.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

2. [*Präsenz*] **Physikalisches Pendel**

Unsere bisherigen Betrachtungen eines Pendels bezogen sich auf so genannte *mathematische Pendel*. In dieser idealisierten Vorstellung schwingt eine punktförmige Masse m an einem masselosen Faden oder Stab der Länge ℓ. Bei einem *physikalischen Pendel* hingegen handelt es sich um einen ausgedehnten starren Körper, der um einen Aufhängepunkt O oszilliert und ein entsprechenden Trägheitstensor $\mathbf{\Theta}$ besitzt. Wir wollen nun mittels des Drehmomentsatzes die Bewegung eines physikalischen Pendels beschreiben. Dabei liege der Ursprung unseres *raumfesten* Koordinatensystems ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) im Aufhängepunkt O des Pendels, welches um $\mathbf{e}_y$ schwinge. Der Vektor $\mathbf{R}$ beschreibe die Verschiebung vom Ursprung O hin zum Schwerpunkt S_m des starren Körpers. Das körperfeste Koordinatensystem ($\mathbf{e}_{x^*}$, $\mathbf{e}_{y^*}$, $\mathbf{e}_{z^*}$) sei so gewählt, dass stets $\mathbf{e}_y \parallel \mathbf{e}_{y^*}$. Zudem soll es sich dabei um ein Hauptachsensystem handeln.

(a) Gegeben sei der Trägheitstensor $\mathbf{\Theta}$ eines beliebigen starren Körpers bezüglich seines Schwerpunkts. Gibt das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse und des Aufhängepunkts an. Was gilt für das Trägheitsmoment im raumfesten Koordinatensystem?

(b) Nutze die Drehmomentgleichung $\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\mathbf{\Theta}\boldsymbol{\omega})$, mit dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$, um ein Bewegungsgleichung für φ aufzustellen.
Hinweis: *Beachte, dass wir hier explizit im raumfesten System rechnen. Stelle zunächst den Vektor der Winkelgeschwindigkeit in diesem Koordinatensystem und in Abhängigkeit von φ auf. Achte darauf, dass das Aufstellen eines Kreuzprodukts, welches du für das Drehmoment benötigst, wieder in einem Vektor resultiert. Am Ende solltest deine Vektorgleichung jedoch nur noch einen nicht verschwindenden Eintrag enthalten, der dann zu einer einzigen Gleichung für φ führt.*

(c) Wir wollen nun unser Ergebnis verifizieren und betrachten daher wieder das mathematische Pendel. Setze dazu in dein Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil das Trägheitsmoment einer Punktmasse ein die mit dem Abstandsvektor $\mathbf{R}$ um die y-Achse rotiere (vgl. Aufgabe 1 (d)).

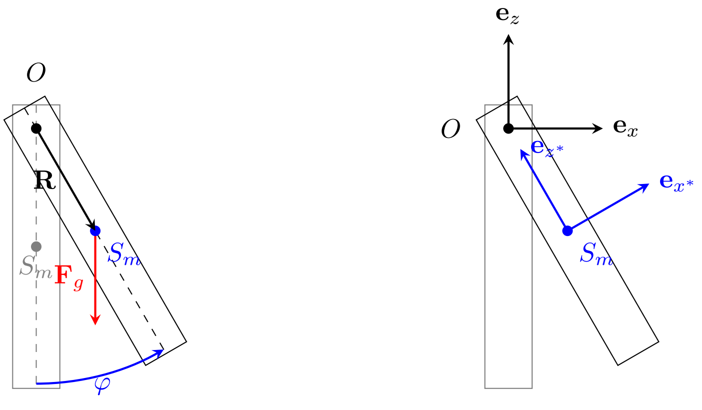

Abbildung 1: Skizze eines physikalischen Pendels, welches um seinen Aufhängepunkt O oszilliert. Die Gravitation setzt am Schwerpunkt S_m an und wirke in die negative z-Richtung des raumfesten Koordinatensystems (**links**). Ebenso sind das raumfeste und körperfeste Koordinatensystem eingezeichnet (**rechts**). Dabei zeige die y-Achse in beiden Fällen in die Zeichenebene hinein. Es gilt stets $\mathbf{e}_y \parallel \mathbf{e}_{y^*}$.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de`
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de`
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de`
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de`