1. [*Präsenz*] **Von linearer Kette zum Kontinuum**

Zu Beginn der klassischen Mechanik haben wir uns mit den Bewegungsgleichungen einiger weniger Punktmassen beschäftigt. Danach betrachteten wir starre Körper, die zwar nun eine Ausdehnung besitzen, aber deren Form sich nicht verändert, was der Wortzusatz *starr* impliziert. Doch können wir unsere Methoden auch auf nicht-starre Körper ausweiten, beispielsweise ein Gummiband, welches sich dehnen und stauchen lässt, oder die Saite eines Musikinstruments, die eine tonerzeugenden Schwingung vollführt? Bei beiden Beispielen handelt es sich um kontinuierliche Körper, die sich während ihrer Bewegung verformen. Um zu einer Gleichung zu kommen, die deren Dynamik beschreibt, beginnen wir zunächst mit einem diskreten System aus N Punktmassen gleicher Masse m die entlang der x-Achse aufgereiht sind und durch Federn der gleichen Federkonstante k jeweils mit ihren Nachbarn verbunden sind. Zudem seinen die beiden äußersten Massen durch gleichartige Federn mit festen Wänden verbunden. Das System sei zwischen den beiden Wänden vorgespannt und die neue Gleichgewichtslänge der Federn werde mit l bezeichnet, sodass sich die i-te Masse an der Position $i\,l$ in Ruhe befindet. Als geeignete generalisierte Koordinaten wählen wir dir Auslenkungen q_i, die die Verschiebung aus der Gleichgewichtsposition beschreiben. Die äußeren Wände stellen wir dann durch zwei zusätzliche, unbewegliche Massepunkte dar, d.h. $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$ (vgl. Skizze). Der Einfachheit halber wollen wir nur longitudinale Auslenkungen betrachten (also Auslenkungen in x-Richtung).

(a) Nutze den Lagrange-Formalismus, um zu zeigen, dass die Bewegungsgleichung der i-ten Auslenkung

$$m\ddot{q}_i = k\left(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{1}$$

lautet.

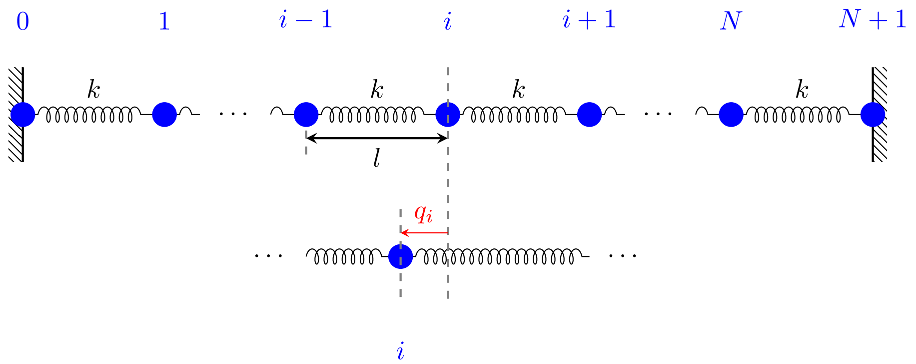

Abbildung 1: Skizze des Kettenschwingers aus N schwingenden Massen, die mit ihren Nachbarn jeweils mit Federn der Federkonstante k verbunden sind. Wir bezeichnen die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage der i-ten Masse als $q_i(t)$. Die Tatsache, dass die Kette fest eingespannte Enden besitzt, drücken wir durch zwei zusätzliche, unbewegliche Massen aus: $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$.

(b) Wir wollen nun einen *Kontinuumsübergang* vollziehen, indem wir die Anzahl der Schwinger gegen Unendlich gehen lassen, $N \to \infty$, während die totale Länge sowie die Gesamtmasse der Kette erhalten bleiben soll. Überlege dir, was dann für den Gleichgewichtsabstand l gelten muss, was für die Beträge der einzelnen Massen m. Was gilt zudem für die Federkonstante k, wenn auch die auf Vorspannung der Kette mit der Kraft $F \sim k\,l$ konstant bleiben soll.
Hinweis: *Während des Grenzübergangs der einzelnen Massen m wechselt man von der Betrachtung der Masse zur Betrachtung der Dichte $\rho = m/l$ (in unserem eindimensionalen Fall einer Längendichte). Welche Bedingung ist beim Übergang an diesen Quotienten zu stellen, wenn die Gesamtmasse erhalten bleiben soll?*

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

Beim Kontinuumsübergang wird aus der diskreten Position i eine kontinuierliche Variable x, d.h. statt N Funktionen $q_i(t)$ betrachten wir eine zweiparametrige Funktion $q(x,t)$. Daher haben wir die auftretende Zeitableitung als eine partielle Ableitung zu verstehen. Wir wollen uns nun der rechten Seite der Differenzialgleichung (1) zuwenden und zeigen, dass wir diese im Limes $l \to 0$ als partielle Ableitung schreiben können.

(c) Gib die Taylorentwicklung der Funktion $q(x+l)$ und $q(x-l)$ um $l = 0$ (der Einfachheit halber lassen wir die Zeitabhängigkeit weg) bis zur zweiten Ordnung an. Nutze diese, um zu zeigen, dass es sich bei der rechten Seite bis auf einen konstanten Faktor um die Ableitung $\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2}$ handelt.

(d) Vollziehe nun den Grenzübergang und zeige, dass daraus die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}$$

resultiert. Gib die *Phasengeschwindigkeit* c an und weise nach, dass diese tatsächlich die Einheit einer Geschwindigkeit hat.

Anmerkung: Zur Vereinfachung wurden hier nur longitudinale Schwingungen untersucht, also entlang der x-Richtung, in die der Kettenschwinger gespannt ist. Eine Gitarrenseite hingegen führt transversale Schwingung durch. Auch hier lässt sich eine identische Gleichung aufstellen. Dazu sei die Vorspannung der Seite durch eine Kraft F gegeben. Nehmen wir die transversale Auslenkung (beispielsweise in y-Richtung) als hinreichend klein an, kann die Kraft entlang der Feder immer noch gleich dem Wert F in der Gleichgewichtslage angenommen werden. Für die Rückstellkraft zwischen den beiden Schwingern i und $i+1$ gilt dann mit dem Winkel der Auslenkung α (siehe Skizze unterhalb):

$$F\,\sin(\alpha) \approx F\,\tan(\alpha) = F\,\frac{q_{i+1} - q_i}{l}\,.$$

Dies führt dann auf eine Differenzialgleichung ähnlich zu (1), in der wir k durch F/l ersetzen.

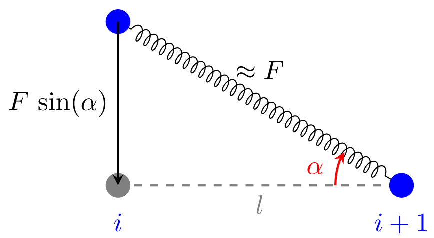

Abbildung 2: Skizze für die vertikale Auslenkung des Kettenschwingers.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de`
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de`
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de`
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de`

2. [*Präsenz*] **Physikalisches Pendel - Akt II**

In der vorherigen Übung haben wir das physikalische Pendel kennengelernt. Dabei handelt es sich um einen *starren Körper*, der um einen Aufhängepunkt O schwingt. Positionieren wir unseren starren Körper gerade so, dass seine Drehachse durch O parallel zu einer der Hauptträgheitsachsen liegt, lässt sich für die Auslenkung φ die einfache Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{M g \, d_S}{\Theta_O} \, \sin(\varphi)$$

herleiten. Θ_O bezeichnet dabei das Trägheitsmoment bezüglich der Aufhängung O. Durch die spezielle Wahl der Drehachse im Bezug auf die Hauptträgheitsachse bleibt Θ_O auch im raumfesten Koordinatensystem S konstant. Weiterhin beschreibt d_S den Abstand des Schwerpunkts S_m zur Aufhängung O und M die Gesamtmasse des Pendels.

(a) Wir wollen nun ein physikalisches Pendel betrachten, welches sich aus einem dünnen Stab der Länge ℓ_r mit Masse m_r und einer dünnen Scheibe mit Radius R_d und Masse m_d zusammensetze. Am unteren Ende des Stabes sei die Scheibe an ihrem Mittelpunkt C befestigt, entsprechend schwinge die Konstruktion um das andere Ende des Stabs um die Aufhängung O. Wie lautet das Trägheitsmoment Θ_O dieses zusammengesetzten Pendels? In welcher Entfernung d_S liegt der Schwerpunkt der Konstruktion bezüglich ihrer Aufhängung?

(b) In der Näherung für kleine Winkel lautet unsere Differenzialgleichung $\ddot{\varphi} \approx -\frac{M g \, d_S}{\Theta_O} \, \varphi \equiv -\omega^2 \, \varphi$. Dabei lässt sich ω als die Frequenz der Schwingung identifizieren. Nutze dies, um einen Ausdruck für die Periodendauer T_P der Schwingung des zusammengesetzten Pendels aus Teil (a) anzugeben.
Hinweis: *Formuliere das Ergebnis so, dass nur noch die Massen und Ausdehnungen (ℓ_r bzw. R_d) der Körper auftauchen.*

(c) Die Scheibe sei nun so befestigt, dass sie sich frei mit der Schwingung mitdrehen kann (betrachte den Fixpunkt F in der Skizze). Wie ändert sich das Trägheitsmoment? Ist die Periodendauer größer oder kleiner im Vergleich zum vorherigen Aufgabenteil? Gib eine physikalische Begründung für dieses Ergebnis.

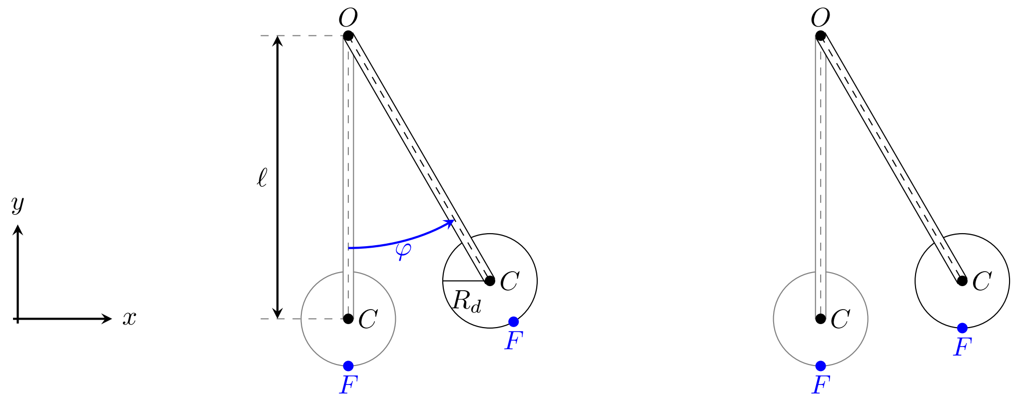

Abbildung 3: Skizze des zusammengesetzten physikalischen Pendels. Man beachte die Lage des Fixpunkts F für die fest angebrachte Scheibe (**links**) und die frei drehende Scheibe (**rechts**). Die Systeme schwingen um die z-Achse, welche hier aus die Zeichenebene herausragt und stets parallel zur körperfesten z^*-Achse liege.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de