Theoretische Physik Ib

Analytische Mechanik – Tutorium 07

Gedämpfte Schwingungen

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

DGL der gedämpften harmonischen Schwingung

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

- Warum ist Dämpfung wichtig?

  → Reale Systeme haben Reibung/Dämpfung.

- Annahme: dissipative Kraft ist **linear**

  → DGL der gedämpften harmonischen Schwingung:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

- Mit Reibungskoeffizient $\lambda > 0$ und Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Lösung mit komplexen Zahlen

- homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

  → Ansatz: $z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \in \mathbb{C}, \quad \omega \in \mathbb{C}$

  → $\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \quad z \in \mathbb{C}$

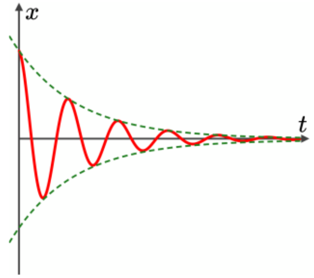
- Komplexe Bewegungsgleichung lautet demnach:

$$\left(-\omega^2 + 2\mathrm{i}\omega\lambda + \omega_0^2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\omega^2 + 2\mathrm{i}\lambda\omega + \omega_0^2 = 0$$

- Auflösen nach ω liefert die beiden Lösungen:

$$\boxed{\omega_\pm = \mathrm{i}\lambda \pm \sqrt{(\mathrm{i}\lambda)^2 + \omega_0^2} = \mathrm{i}\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \mathrm{i}\lambda \pm \tilde{\omega}} \text{ mit } \tilde{\omega} := \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Fall 1: Unterkritisch ($\lambda < \omega_0$)



- Für $\lambda < \omega_0$ ist $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} > 0$ und damit $\tilde{\omega}$ reell.

  → Lösung: $$z_\pm(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\tilde{\omega} t}$$

- Aus dem Real- und Imaginärteil ergeben sich 2linear unabh. reelle Lösungen:

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\tilde{\omega} t), \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\sin(\tilde{\omega} t)$$

  → Allgemeine Lösung ist eine Linearkombination.

Fall 1: Unterkritisch ($\lambda < \omega_0$)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

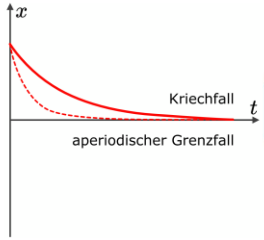
Allgemeine Lösung des schwach gedämpften Oszillators

Die Auslenkung des schwach gedämpften Oszillators ($\lambda < \omega_0$) ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[a_1 \sin(\tilde{\omega} t) + a_2 \cos(\tilde{\omega} t)\right] \\ &= \tilde{A}\mathrm{e}^{-\lambda t} \cos\left(\tilde{\omega} t - \tilde{\delta}\right) \end{aligned} \tag{6.40}$$

mit $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

Fall 2: Überkritisch ($\lambda > \omega_0$)



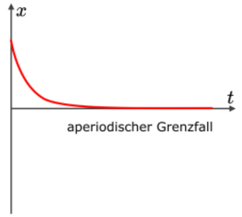
- Für $\lambda > \omega_0$ ist $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < 0$ und damit $\tilde{\omega}$ imaginär:

$$\rightarrow \qquad \tilde{\omega} = \mathrm{i}\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = \mathrm{i}\bar{\omega}, \qquad \bar{\omega} \in \mathbb{R}.$$

- Damit ist die allgemeine Lösung:

$$\boxed{x(t) = a_1 \mathrm{e}^{-(\lambda + \bar{\omega})t} + a_2 \mathrm{e}^{-(\lambda - \bar{\omega})t}}$$

Fall 3: Kritisch ($\lambda = \omega_0$)



- Für $\lambda = \omega_0$ ist $\tilde{\omega} = 0$ und damit ist die Lösung $x_1(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$
- Da λ eine doppelte Nullstelle ist, brauchen wir 2 linear unabh. Lösungen !

  → Lösung raten: $x_2 = t\mathrm{e}^{-\lambda t}$

- Damit ist die allgemeine Lösung:

$$\boxed{x(t) = (a_1 + a_2 t)\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

- Mit Integrationskonstanten a_1, a_2

Bis bald…