5. Hamilton Formalismus

5.1. Legendre Transformation

- Zweck: Wechsel von Legendre- zu Hamilton-Formulierung
- Definition: Legendre-Trafo ersetzt die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ durch generalisierte Impulse $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$
- Hamiltonfunktion: $H(q,p,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$

5.2 Hamiltonsche Gleichungen

- Form: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

$\rightarrow$ 2f Gleichungen 1. Ordnung, statt f Gleichungen 2. Ordnung (für $i = 1, \dots, f$)

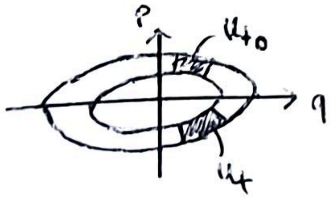
- Kochrezept:
  1. Auswählen generalisierter Koordinaten $q_1, \dots, q_f$
  2. Transformation $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$ und $\dot{\underline{r}}_i = \dot{\underline{r}}_i(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
  3. Berechnen der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
  4. Berechnen der generalisierten Impulse $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ und deren Umkehrung $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$
  5. Legendre-Trafo $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j p_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
  6. Aufstellung der Bewegungsgl'en ($j = 1, \dots, f$):
     $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ und $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$
  7. Lösen der Bewegungsgl'en.

5.3 Symplektische Struktur des Phasenraums

- Ziel: Finde Trafo $(q,p) \mapsto (Q,P)$ die die Form der Hamilton-Gl'en erhält
- Schreibweise: $\underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$ mit $\underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$ und $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$
- Eine Trafo $x \to y$ ist genau dann kanonisch, wenn sie die Strukturmatrix $\underline{\underline{J}}$ erhält, also
  $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$

5.4. Liouvillescher Satz

- Satz: Das Volumen im Phasenraum bleibt unter Hamiltonscher Zeitentwicklung erhalten.



5.5 Poisson-Klammern

- Definition für $f(q,p)$; $g(q,p)$:

$$\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

- Eigenschaften:
  1. Antisymmetrie: $\{f,g\} = -\{g,f\}$
  2. Linearität: $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f,h\} + \mu\{g,h\}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
  3. Produktregel: $\{fg, h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}$
  4. Jacobi-Identität: $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$
  5. Zeitentwicklung: $\frac{df}{dt} = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$

- Satz:
Eine Trafo $(q,p) \mapsto (Q,P)$ ist kanonisch, genau dann wenn:
- $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$; $\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0$

5.6 Hamilton-Jacobi-Theorie

- Idee: Finde kanonische Trafo, die alle Koordinaten zyklisch macht
- Gesucht: Erzeugende Fkt. S mit $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$ und $Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}$ so dass,

$$\bar{H} = H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{(Hamilton-Jacobi-Gl.)}$$

- Kochrezept:
  1. Stelle HJ-Gleichung auf $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
  2. Löse HJ-Gleichung $\Rightarrow S(q, \alpha, t)$ mit $\alpha = P$
  3. Aus Erzeugender $S(q, \alpha, t)$ folgt $Q_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \beta_k \Rightarrow q_j = q_j(\alpha, \beta, t)$
  4. Bestimme $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j(q, \alpha, t) = p_j(q(\alpha, \beta), \alpha, t)$
  - Bestimmung von α, β aus Anfangsbed.
  5. Bestimmung von S: $\frac{dS(q, \alpha, t)}{dt} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_k p_k \dot{q}_k - H = L$

- Bedeutung von S: Wirkungsfunktional entlang der Trajektorie
$\rightarrow S = \int L \, dt$