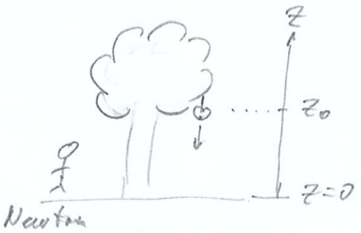
1. Eindimensionale Analysis

Übersicht

1. Eindimensionale Analysis
1.1 Einführung
1.2 Lineare Näherung einer Funktion (Ableitung)
1.3 Beispiel: Ableitung des Sinus
1.4 Ableitungsregeln
1.5 Wichtige Ableitungen
1.6. Taylor-Entwicklung
1.7 Eindimensionales Integral
1.8 Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung
1.9 Integrationsregeln
1.10 Beispiele und Tricks
1.11 Uneigentliche Integrale
1.12 Mittelwertsätze

1.1 Einführung

Bsp.: Bahn eines fallenden Apfels (wichtig: Bilder im Kopf $\leftrightarrow$ Physik Mathematik)

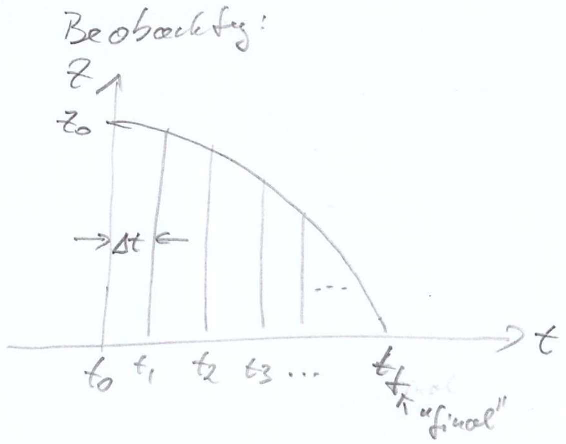


physikalisch relevante Größe:

z: Distanz zum Boden

Start bei Höhe/Distanz z_0 zur Zeit $t=t_0=0$

Beobachtung:



Messung zu diskreten Zeiten: $t_0, t_1, \dots, t_f$

Aufschlag ($z_f=0$) bei $t_f = N\Delta t$

mit Zeitschritt $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, $n=1,\dots,N$

Im Limes (Grenzfall) $N \to \infty$ bekommen wir eine Funktion $z: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : t \mapsto z(t)$

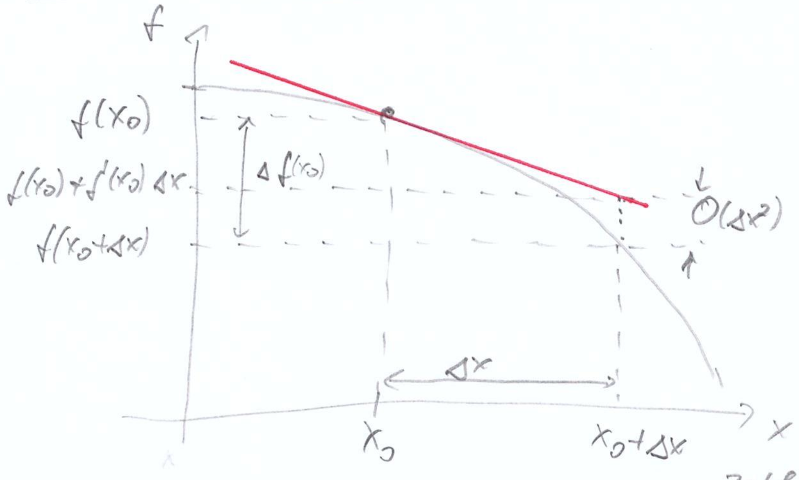
positive reelle Zahlen inkl. Null $\Big\}\ t \in [0,\infty)$

Aus der Schule (Newton) wissen wir: $z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$

$\Rightarrow$ der Apfel schlägt bei $z(t_f)=0$ auf: $t_f = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$

Bem.: die Funktion $z(t)$ wurde invertiert. Das geht weil $z(t)$ bijektiv (eineindeutig) ist.

1.2 Lineare Näherung einer Funktion (Ableitung)



Ziel: Näherung von $f(x_0+\Delta x)$ bei bekanntem $f(x_0)$, so dass der Fehler von der Ordnung $O(\Delta x^2)$ ist.

Landau-Symbol
„wächst höchstens wie Δx^2"
(asymptotische obere Schranke)

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)}^{\text{Zahl!}}\,\Delta x + O(\Delta x^2)}$$

Weiter mit Definition $\Delta f(x_0) \underset{\text{„definiert als"}}{:=} f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ folgt:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x^2)$$ (falls eine solche Funktion $f'(x)$ existiert)

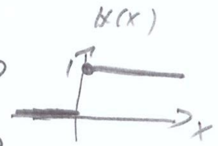
Def.: 1) Die Funktion $f'(x)$ heißt **erste Ableitung** von $f(x)$. Man erhält sie aus dem **Differenzenquotienten**:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \Big(\underbrace{-\lim_{\Delta x \to 0} \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x}}_{=0}\Big)$$

2) f heißt **differenzierbar** bei x_0, wenn $f'(x_0)$ existiert.
(beidseitiger Grenzwert!)

1.VL ↑

Gegenbeispiel: **Heaviside-Stufenfunktion** $H(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



16.10

$\Rightarrow$ H ist nicht differenzierbar bei $x_0 = 0$

↓ 2.VL

Notation in der Physik: (i) $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$

bzw. $f'(x) = \frac{df}{dx}$

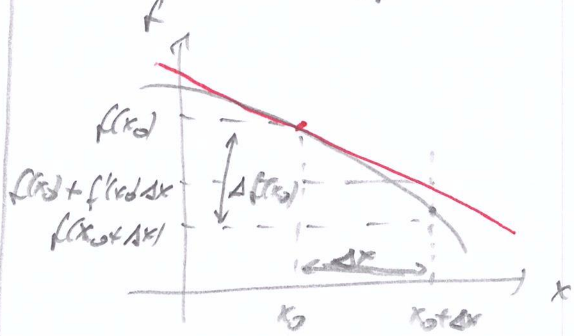
Ableitungsvariable

(ii) bei Ableitung nach der Zeit t schreibt man häufig: $f(t)$, $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$

Bsp: $z(t) \Rightarrow \dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$

1.1 Introduction

1.2 Linear approximation of a function



idea: approximation of $f(x_0+\Delta x)$ for a given $f(x_0)$ such that the error is of order $O(\Delta x^2)$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + O(\Delta x^2)$$

Def.: A function $f: D \to \mathbb{R}$, defined on an open set D, is said to be **differentiable** at $x_0 \in D$ if the **derivative**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ exist.}$$

1.2 Lineare Näherung (Fortsetzung)

Notation in der Physik: (i) $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$

bzw. $f'(x) = \frac{df}{dx}$

(ii) Ableitung nach der Zeit t: $f(t) \Rightarrow \dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$

Bsp.: $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$

- höhere Ableitungen:

n-te Ableitung: $$\underbrace{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}}_{n\text{-mal}} f(x) \underset{\uparrow \text{ identisch}}{\equiv} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \equiv f^{(n)}(x)$$

Bsp: Ort/Höhe/Distanz zum Boden des Apfels: $z(t)$

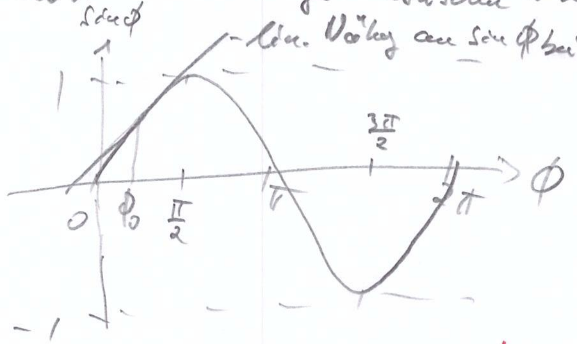
Geschwindigkeit: $v(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

Beschleunigung $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z} (= -g)$

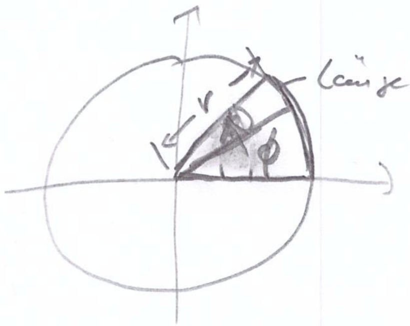
1.3 Beispiel: Ableitung des Sinus

Ziel: Zeigen wir mit rein geometrischen Überlegungen, dass $\frac{d}{d\phi} \sin\phi = \cos\phi$.

Erinnerung: 1)



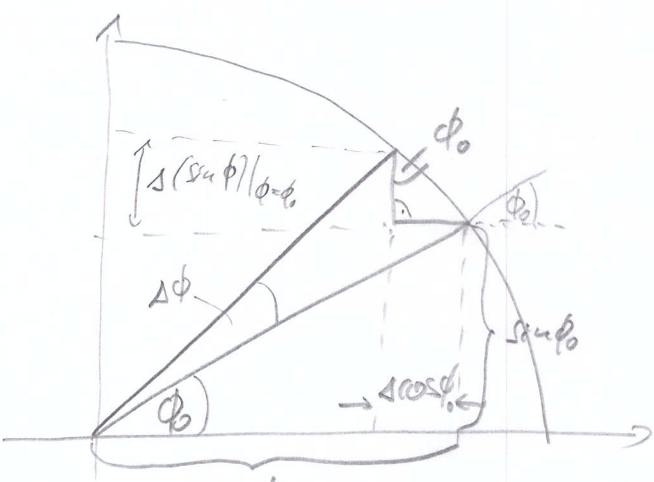
2) Bogenmaß



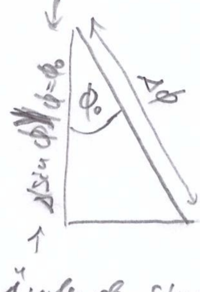
Länge des Bogens: $l = r\phi$ (häufig: Einheitskreis $r = 1$)

Frage: Wo steckt die $\sin\phi = f(\phi)$?

$\Delta(\sin\phi)\big|_{\phi=\phi_0}$: $\Delta\sin$ an der Stelle $\phi = \phi_0$



Zoom:



Änderung des $\sin\phi$

kleines Dreieck, so dass Bogen mit Länge $\Delta\phi$ fast gerade ist (exakt bei $\Delta\phi \to 0$)

Ablesen: $$\cos\phi_0 = \frac{\Delta(\sin\phi)\big|_{\phi=\phi_0}}{\Delta\phi}$$

$$\Rightarrow f'(\phi_0) = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta\phi}\Big|_{\phi=\phi_0} = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\Delta(\sin\phi)}{\Delta\phi}\Big|_{\phi=\phi_0} = \cos\phi_0$$

1.4 Ableitungsregeln

Siehe Definitionen_TPIa_WS24.pdf

Seien f, g, h differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

1. ***Linearität:*** Für $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
$$(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$
Die Ableitung ist also ein linearer Operator

2. ***Produktregel:***
$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

3. ***Kettenregel:*** Für $h(x) = f(g(x))$ gilt:
$$h(x)' = f'(g(x))\,g'(x).$$
$$= \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

4. ***Quotientenregel:***
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.$$

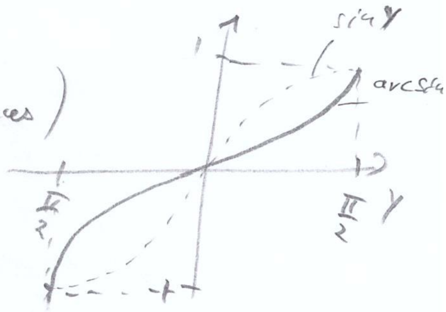
5. ***Ableitung einer inversen Funktion:*** Für eine invertierbare Funktion $f(x)$, d.h. $x = f^{-1}(y)$, gilt:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=f^{-1}(y)}}.$$

Bsp: (i) 3. Kettenregel: $f(x) = \sin^2(x^2) = f(g(x))$ mit $f(y) = y^2$, $g(x) = \sin(x^2)$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2\sin(x^2)}_{\frac{df}{dy}} \underbrace{\frac{d}{dx}\sin(x^2)}_{\frac{dg}{dx}} = 2\sin(x^2)\,\underbrace{\cos(x^2)\,2x}$$

(ii) 5. Ableitung einer inversen Funktion:

$f(x) = y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y$ (Arkussinus)



(Spiegelung von $\sin x = y$ an Diagonalen $x = y$)

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\arcsin y = \frac{1}{\left.\frac{d\sin x}{dx}\right|_{x=\arcsin y}}$$

$$= \frac{1}{\left.\cos x\right|_{x=\arcsin y}}$$

$$\overset{\uparrow}{=} \frac{1}{\left.\sqrt{1-\sin^2 x}\right|_{x=\arcsin x}}$$

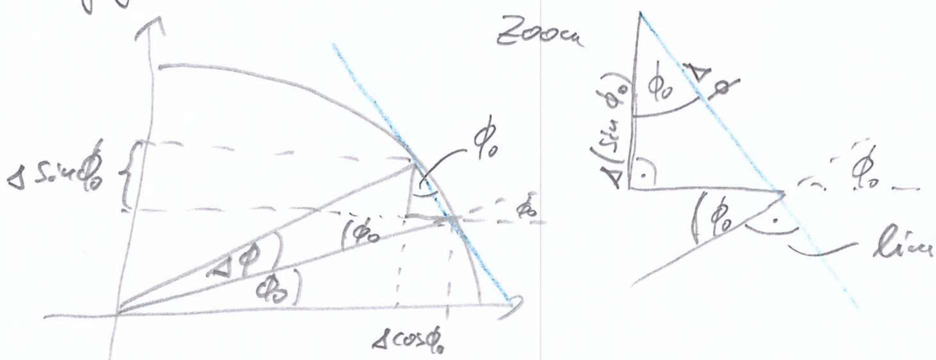
$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

1.5 Wichtige Ableitungen

- $(\text{const})' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z})$
- $(x^a)' = ax^{a-1} \quad (x > 0,\ \ a \in \mathbb{R})$ $\rightarrow f(x) = \sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = (\ln a)\, a^x \quad (a > 0)$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\quad x \neq (\frac{1}{2}+n)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ (Nullstellen von $\cos x$)
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
- $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$
- $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

1.3 Example: derivative of the sine function by geometric means



$$\frac{d}{d\phi}\sin\phi_0 = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\Delta(\sin\phi)\big|_{\phi=\phi_0}}{\Delta\phi} = \cos\phi_0$$

1.4. Rules of differentiation

(i) linearity $\quad (\lambda f(x)+\mu g(x))' = \lambda f'(x)+\mu g'(x)$

(ii) product rule $\quad (f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

(iii) chain rule $\quad h(f(g(x))) = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$

(iv) quotient rule $\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$

(v) derivative of an inverse function $\quad \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}}$

1.5 Important derivatives

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

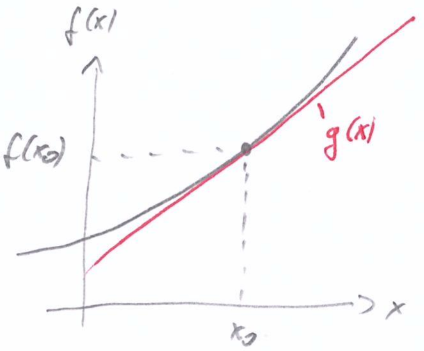
$$= \frac{\cos^2 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

1.6 Taylor-Entwicklung

Ziel: Näherung einer Funktion durch ein Polynom

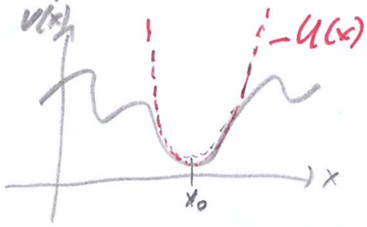
- lineare Näherung: $f(x) = \underbrace{f(\overset{\text{Entwicklungspunkt}}{x_0}) + f'(x_0)(x-x_0)}_{g(x)} + O((x-x_0)^2)$



$\Rightarrow g(x_0) = f(x_0)$ und $g'(x_0) = f'(x_0)$

Bem.: Rechnung mit allgemeiner Funktion $f(x)$ oft komplizierter als mit linearer Näherung $g(x)$.
$\Rightarrow$ Linearisierung

- quadratische Näherung: Potenzial $V(x)$ und quadratische/„harmonische" Näherung $U(x)$ um x_0.



$$V(x) = \underbrace{V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2}_{U(x)} + O(|x-x_0|$$

$$\Rightarrow U(x_0) = V(x_0), \quad \underbrace{U'(x_0) = V'(x_0)}_{\text{gleiche Steigung}}, \quad \underbrace{U''(x) = V''(x_0)}_{\text{gleiche Krümmung}}$$

check: $U'(x) = V'(x_0) + V''(x_0)(x-x_0) \Rightarrow U'(x_0) = V'(x_0)$

$U''(x) = V''(x_0)$

(Vorbereitende) Definition:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \overset{\text{Teilmenge}}{\subset} \mathbb{R}$ heißt (n mal) stetig differenzierbar, wenn f im Intervall D (n-mal) differenzierbar ist und $f^{(n)}(x)$ stetig ist.

(Schreibweise: $f \in \underset{\text{„continuously differentiable"}}{C^n}(D)$)

Bem.: - Ist f beliebig oft differenzierbar, so nennt man f eine $C^\infty(D)$-Funktion.
- In der Physik sind Funktionen in der Regel diffbar, Knicke, Sprünge... sind eher selten.

Satz von Taylor:

Jede Funktion $f \in C^{n+1}(D)$ auf einem offenen Intervall D lässt sich für $x, x_0 \in D$ auf folgende Weise nach Potenzen entwickeln:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k}_{\text{Taylor-Polynom } n\text{-ter Ordnung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}}$$

also: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Restglied: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ mit ξ zwischen x und x_0

Beispiel: (i) Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ entwickelt um $x_0 = 0$:

Check: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ✓

$f^{(k)}(x) = e^x$ also $f^{(k)}(x_0) = 1$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + R_n(x)$$

Bem: $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, also: $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$

($k!$ wächst schneller als x^k)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

(ii) Geometrische Reihe:

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

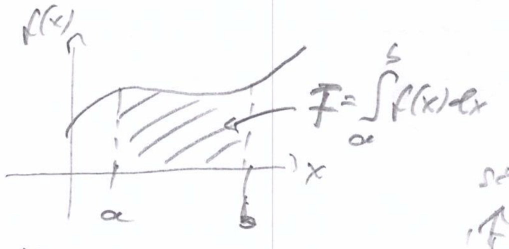
$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \\ &f''(x) = 2\,\frac{1}{(1-x)^3} \\ &\vdots \\ &f^{(k)}(x) = k!\,\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \\ &\Rightarrow f^{(k)}(x_0) = k! \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,(x-x_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

aber nur im Konvergenzradius $|x| < 1$

also: $x \in (-1, 1) =]-1, +1[$

1.7 Eindimensionales Integral

(i) Intuition: Fläche unter der Kurve



Frage: $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = ?$

(ii) Anwendung: Umkehrung der Ableitung

Bsp.: Ort $x(t)$ bei gegebener Geschwindigkeit $v(t)$ & Startpunkt $x_0 = x(t_0)$

Aus $\frac{dx}{dt} = v(t)$ folgt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{dt}dt = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

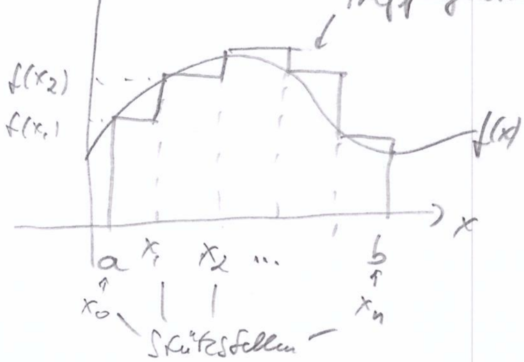
$$\Leftrightarrow \quad x\Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt \Rightarrow x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

(iii) Formaler: Cauchy-Integral

Idee: Näherung einer Funktion als Treppenfunktion

Treppenfunktion $t_n(x)$ (hier mit 5 Stufen)



Abstand der Stützstellen: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$\Rightarrow$ Stützstellen bei $x_i = a + i\Delta x, \; i = 0, \dots, n$

Check: $x_n = a + n\Delta x = a + n\frac{b-a}{n} = b$ ✓

Fläche unter der Treppenfunktion: $F_n = \int_a^b t_n(x)dx = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}}_{\text{Summe der Rechtecke}} \underbrace{f(x_i)\Delta x}_{\text{Fläche des } i\text{-ten Rechtecks}}$

1.6 Taylor expansion

idea: approximate $f(x)$ by a polynomial involving its derivatives

Taylor's theorem: Any $f \in C^{n+1}(D)$ defined on an open set $D \subset \mathbb{R}$ can be expressed by

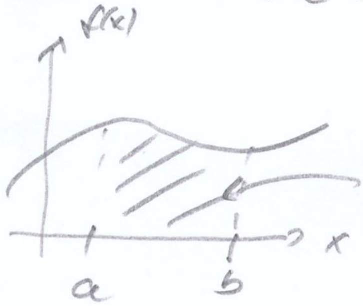
$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}_{\text{Taylor polynomial}} + R_n(x)$$

with $x, x_0 \in D$ and the remainder term $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

between x and x_0

1.7 1D integrals

(i) area under the curve/function



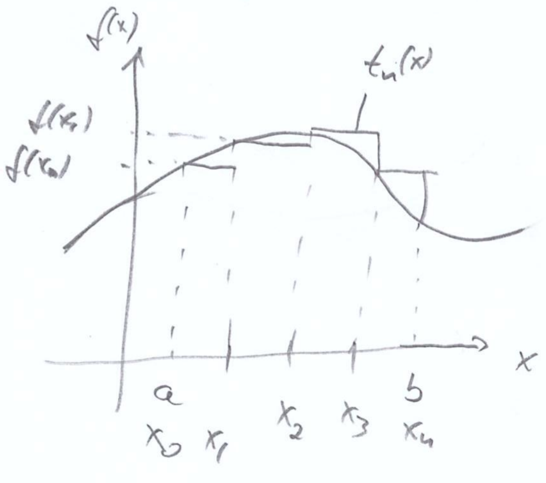
$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii) application: antiderivative

$$x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds = x(t) \underset{\int dt}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftarrows}} \dot{x} = v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

(iii) Cauchy integral

idea: approximation of F by step functions



spacing of mesh points: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$F_n = \int_a^b t_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$

Integral:

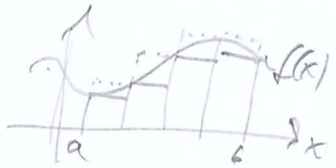
$$F = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

° Das **Integral** über $f(x)$ ist definiert als

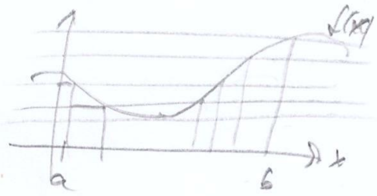
$$F = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

immer feinere Stufen

Bem: Alternative Zugänge: - Riemann-Integral



- Lebesgue-Integral



1.8 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Satz: (i) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist für jedes $x_0 \in I$ (Intervall)

die **Integralfunktion** $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x})\,d\tilde{x}$ (Fläche unter f im $[x, x_0]$)

differenzierbar und eine **Stammfunktion** von f.

(D.h.: für alle $x \in D$ gilt: $F'(x) = f(x)$)

(ii) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$ mit Stammfunktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bem: Stammfunktionen nennt man auch **unbestimmte Integrale**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$\Rightarrow$ Stammfunktionen unterscheiden sich um eine Konstante (fällt beim Ableiten weg)

ohne Grenzen — eine mögliche Stammfunktion — Integrationskonstante

1.9 Integrationsregeln

Integrationsregeln:

1. **gleiche Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

2. **umgedrehte Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

3. **Additivität bzgl. der Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.$$

4. **Linearität:** Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

5. **Partielle Integration:**

$$\int_a^b (f'(x)\, g(x))\, \mathrm{d}x = f(x)\, g(x)|_a^b - \int_a^b (f(x)\, g'(x))\, \mathrm{d}x.$$

6. **Substitution:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(u(x))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

1.–3.: schnell zu zeigen über Definition der Stammfunktion

4.: Linearität der Treppenfunktion/Summen

5.: Produktregel

6.: Kettenregel

1) $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\left(F(a) - F(b)\right) = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \cancel{F(b)} - F(a) + F(c) - \cancel{F(b)} = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx$

4) folgt aus der Linearität von Summen über Treppenfunktionen

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda f(x_i) + \mu g(x_i))\,\Delta x\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\lambda \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x + \mu \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\Delta x\right]$$

$$= \lambda \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x + \mu \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\Delta x$$

$$= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

5) folgt aus Produktregel der Ableitg:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f(x)g(x))' dx = \int_a^b \left[f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x)\right] dx$$

$$\Rightarrow f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)\, g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

$$f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx = \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

Bem: wichtig für Elektrodynamik & Quantenmechanik
in vielen zentralen Herleitungen
– für Berechng von Integralen

Bsp
$$\int \ln x\, dx = \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\ln x}\, dx$$
$$= \underset{f}{x}\, \underset{g}{\ln x} - \int \underset{f}{x}\, \underset{g'}{\tfrac{1}{x}}\, dx$$
$$= x \ln x - x$$

6) Verkettg von F mit u:

$$\big(F(u(x))\big)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(u(x)) \frac{du}{dx}\, dx = \int_a^b \big(F(u(x))\big)' dx$$

$$= F(u(b)) - F(u(a))$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt$$

Bsp.: $$\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\sin(x^2)}_{f(u(x))} \underbrace{2x}_{u'(x)} dx = \int_{u(x_0)}^{u(x_1)} \sin(u)\, du$$

$$\uparrow \\ x^2$$

Lesen als: - Wechsel der Integrationsvariable von u nach x entspricht

- Koordinatenwechsel: f als Funktion von x statt u.

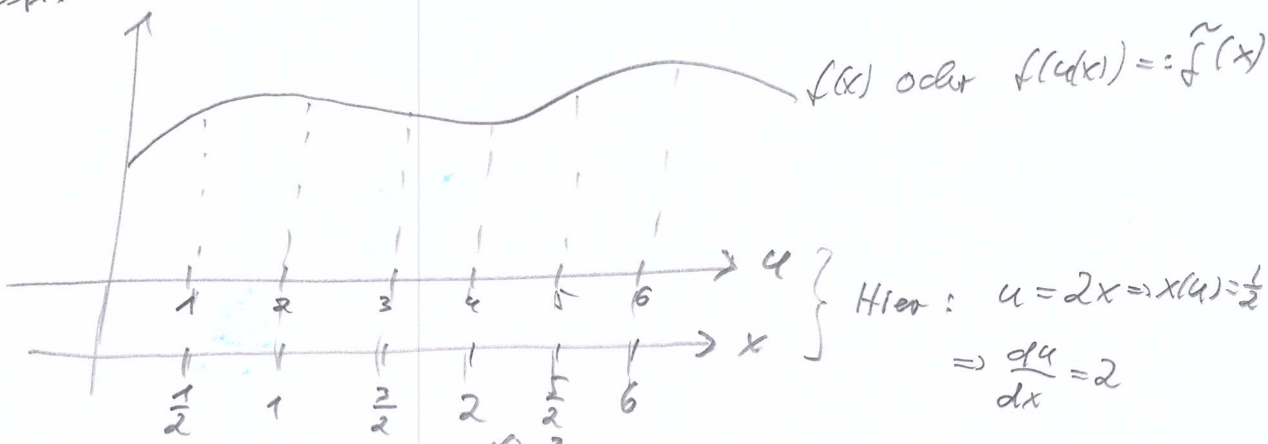
$$\int_{u_0}^{u_1} f(u)\,du = \int_{x_0=x(u_0)}^{x_1=x(u_1)} f(u(x))\,\frac{du}{dx}\,dx$$

← neue Integrationsvariable

Schrittweite in u pro Schrittweite in x

Grenzen durch x statt u ausgedrückt

Bsp.:



Hier: $u = 2x \Rightarrow x(u) = \frac{1}{2}u$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2$

$$\int_1^6 f(u)\,du = \int_{\frac{1}{2}}^{3} f(u(x)) \cdot 2\,dx$$

$x(6) = 3$

$x(1) = \frac{1}{2}$

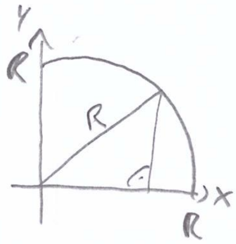
Korrektur für kürzeres Integrationsintervall

Beispiele: Inverse Operation zur Ableitung

↳ Liste mit Funktionen, Ableitungen und Integralen

1.10 Berechnen von Integralen: Beispiel & Tricks

(i) Fläche eines Viertelkreises : $\frac{\pi R^2}{4}$



$$F = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$ ← Pythagoras

$$= R \int_0^R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}\, dx$$

$u = \frac{x}{R} \Rightarrow u' = \frac{1}{R} = \frac{du}{dx}$
$= dx = R\,dx$

$$= R \int_{u(0)}^{u(R)} \sqrt{1 - u^2}\, R\,du$$

$$= R^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2}\, du$$

$u = \cos t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\sin t$
$\Rightarrow t = \arccos u$
$t(0) = \frac{\pi}{2}$
$t(1) = 0$

$$= R^2 \int_{t(0)}^{t(1)} \underbrace{\sqrt{1 - \cos^2 t}}_{\sin(t)}\, (-\sin t)\, dt$$

$$= R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin^2 t\, dt$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin t}_{f'}\, \underbrace{\sin t}_{g}\, dt$$

Nebenrechnung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \underbrace{-\cos t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{-\cos t}_{f}\, \underbrace{\cos t}_{g'}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow F = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = R^2 \frac{\pi}{4}$$ ✓

Check: $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$

(ii) Ableiten nach Parameter

Idee: Vertauschen von Ableitung und Integration
(meistens OK, aber Vorsicht bei Parameterabhängigen Grenzen!)

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d\alpha}F(\alpha) = \int_a^b \frac{d f(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx .$$

Bsp.: $F = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

Beobachtg: n-mal partiell integrieren arbeitet x^n weg.
↳ langwierig!!!

↳ Idee: $\tilde{F}(\alpha) = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx \quad , \quad \tilde{F}(\alpha)\big|_{\alpha=1} = F$

$$= \int_0^\infty (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \underbrace{\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty}_{=\frac{1}{\alpha}}$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} (\alpha)^{-1}$$

$$= \underbrace{(-1)^n (-1)(-2)\ldots(-n)}_{= n!} \alpha^{-n+1}$$

$$= \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow \tilde{F}(1) = n! = F$$

Bem: Verallgemeinerung der Fakultät möglich: Gamma-Funktion

$$\Gamma(z) := \int^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt \quad , \quad \Gamma(n+1) = n!$$

1.8 Fundamental theorem of calculus

(i) Let f be a continuous real-valued function on a closed interval I. Then, for all $x_0 \in I$, the function $F: I \to \mathbb{R}$ defined as $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x}) d\tilde{x}$ is differentiable with $F'(x) = f(x)$.

(ii) Let $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on $[a,b]$ and F an antiderivative in (a,b). Then, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

- antiderivative not unique (differ by a constant)
- $F(x) = \int f(x) dx$ indefinite integral

1.9 Rules of integration

(i) same boundaries / limits of integration: $\int_a^a f(x)dx = 0$

(ii) swapping boundaries: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) additivity of boundaries: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx$

(iv) linearity: $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$

(v) partial integration: $\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$

(vi) substitution:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) \frac{du}{dt} dt, \quad \int_a^b f(u(x)) \frac{du}{dx} dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$$

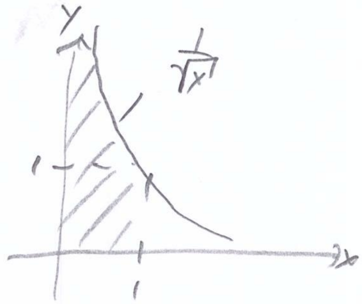
1.10 Examples & tricks

1.11 Uneigentliche Integrale

Integration | von Funktionen mit Singularitäten
| mit unbeschränktem Integrationsbereich

Fazit: Manchmal geht's, manchmal nicht!?

Bsp: (i) $$\int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{divergiert} \\ \text{für } x\to 0}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx := \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

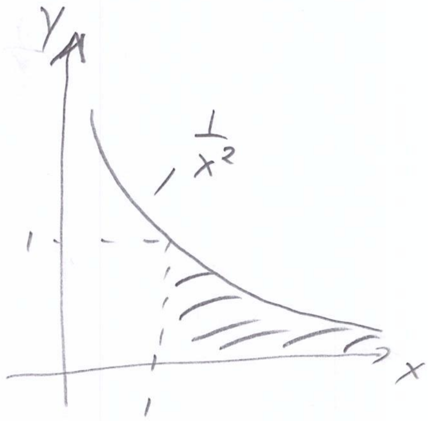


$$= \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1$$

$$= \lim_{a\to 0} \left(2 - 2\sqrt{a}\right)$$

$$= 2$$

(ii) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx$$

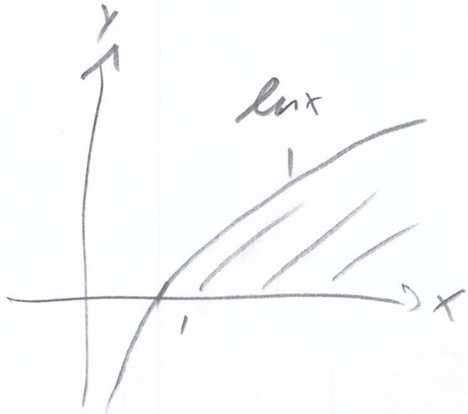


$$= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{1}\right)$$

$$= 1$$

(ii) $$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\,dx$$



$$= \lim_{a\to\infty} \ln x\Big|_1^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(\ln a - \underbrace{\ln 1}_{0}\right)$$

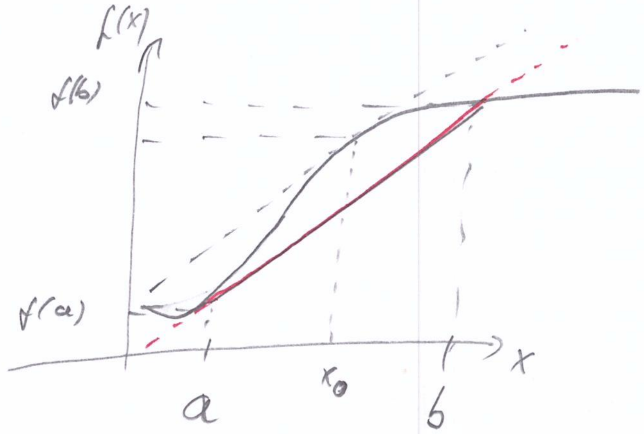
$= \lim_{a\to\infty} \ln a$ existiert nicht / divergent

1.12 Mittelwertsätze

(i) Differentialrechnung:

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$ und diffbar in $]a,b[$.

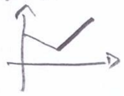
Dann gilt: $\exists\, x_0 \in\,]a,b[\, : f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Durchschnittliche Steigung liegt bei x_0 an.

↳ Geschwindigkeitskontrolle durch Intervallmessung

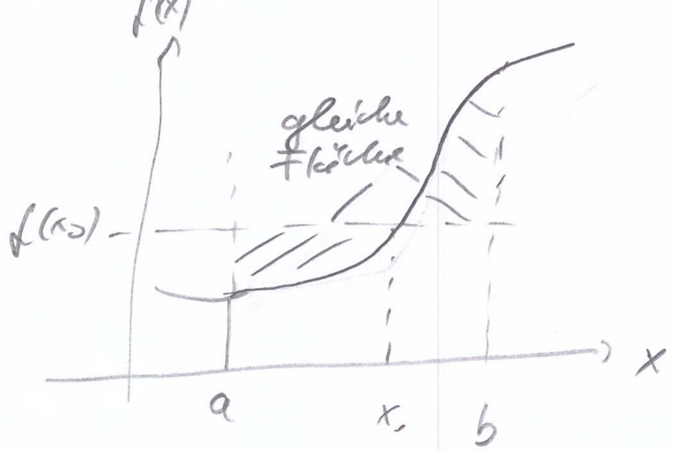
- mehrere Stellen möglich
- Klappt nicht bei Knicken & Sprüngen



(ii) Integralrechnung:

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\exists\, x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\,(b-a)$$



$f(x_0)$ bestimmt die Höhe des Rechtecks der Breite $b-a$

- Klappt nicht bei Sprüngen

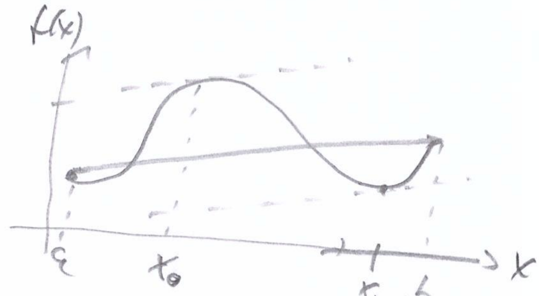
1.11 Improper integrals

- integration of functions with singularities
  or unbounded limits
- sometimes, it works, but sometimes, it does not

1.12 Mean value theorems

- Differentiation: Let $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on the closed interval $[a,b]$ and differentiable on (a,b). Then, there exists some $x_0 \in (a,b)$ such that

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$



$$f'(x_1) = f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

- integration: Let $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then, there exists a $x_0 \in [a,b]$ such that

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a).$$

↳ equal area rule (Maxwell construction)