

3. Vektor algebra

38

- 3.1 Skalare
- 3.2 Vektoren im kartesischen Raum
- 3.3 Skalarprodukt
- 3.4 Kreuzprodukt/Vektorprodukt
- 3.5 Levi-Civita-Symbol
- 3.6 Mehrfachprodukte

3.1 Skalare

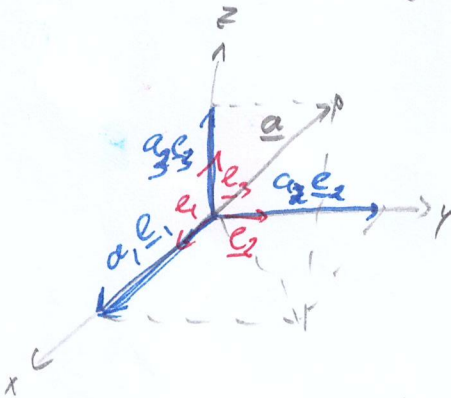
Ein Skalar ist eine Zahl!

Bsp.: Masse m , Temperatur T , Energie E , ...

3.2 Vektoren im kartesischen Raum

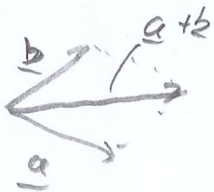
Kartesisch nach René Descartes (31.3.1596 - 11.2.1650)

- Vektor $\underline{a}$: Verschiebung im Raum $\mathbb{R}^n$ (meist $n=3$)
- Länge $|\underline{a}| = a$ und Richtung $\xrightarrow{\underline{a}}$ (unabhängig vom Koordinatensystem)
- Kartesisches Basis $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$: $\underline{a} = a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z$



$$\begin{aligned} &= a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a_i: \text{kartesische Koordinaten} \end{aligned}$$

- Vektoraddition



- Vektormultiplikation (Skalar)



Bsp.: Kraft $\underline{F}$, Impuls $\underline{p}$, Geschwindigkeit $\underline{v}$, Ort $\underline{r}$, E-Feld $\underline{E}$...

3.3 Skalarprodukt

auch "dot product"

39

Def.: Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ mit

Kartesischen Koordinaten ist definiert als eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\underline{a}, \underline{b}) \mapsto \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Def.: Die **Länge/Norm** eines Vektors ist definiert als

$$a \equiv \|\underline{a}\| \equiv |\underline{a}| := \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2}$$

• **normierter Vektor:** $\underline{\hat{a}} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \Rightarrow |\underline{\hat{a}}| = \left| \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \right| = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{a}|} = 1$

• **Eigenschaften des Skalarproduktes:**

(i) **bilinear**: linear in jedem Anteil:

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda \underline{a}, \underline{b}) = \lambda (\underline{a}, \underline{b})$$

$$(\underline{a}, \underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{a}, \underline{c})$$

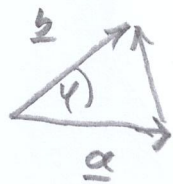
(ii) **Symmetrisch**: $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$

(iii) **positiv definit**: $(\underline{a}, \underline{a}) \geq 0 \wedge (\underline{a}, \underline{a}) = |\underline{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ Das Skalarprodukt ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform.

• **Geometrische Interpretation:**

$$|\underline{c}|^2 = (\underline{b} - \underline{a}) \cdot (\underline{b} - \underline{a})$$



$$= |\underline{b}|^2 + |\underline{a}|^2 - 2 \underline{a} \cdot \underline{b}$$

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$

$$\Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = ab \cos \varphi$$

$\Rightarrow$ Für $\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0}$ gilt: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$ (also $\varphi = \pm 90^\circ = \pm \frac{\pi}{2}$)

3.1 Scalars

3.1a

Scalars = numbers (plus unit)

3.2 Vectors in Cartesian spaces

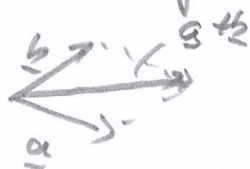
- vector: $\underline{a}$ shift in $\mathbb{R}^n$ (most often forces: $n=3$)

↳ length/magnitude $|\underline{a}| = \|\underline{a}\| = a$ and direction

- Cartesian basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$:

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Cartesian} \\ \text{coordinates} \end{array}$$

- adding 2 vectors



- multiplying a vector with a scalar



3.3 Dot product (scalar product)

- The dot product of 2 vectors $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ with Cartesian coordinates $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, respectively, is defined as an algebraic operation:

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{a}, \underline{b}) \mapsto \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- The length/magnitude/norm of a vector is defined as

$$a = \|\underline{a}\| = |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2}$$

- normalized vector: $\underline{\hat{a}} = \frac{\underline{a}}{a}$

- properties of the dot product:

(i) bilinear: $\alpha \in \mathbb{R}, (\alpha \underline{a}, \underline{b}) = \alpha (\underline{a}, \underline{b})$

$$(\underline{a}, \underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{a}, \underline{c})$$

(ii) symmetric: $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$

(iii) positive definite: $(\underline{a}, \underline{a}) \geq 0 \wedge (\underline{a}, \underline{a}) = a^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$

- geometric interpretation:



$$\begin{aligned} \underline{c} &= \underline{b} - \underline{a} \quad \underline{c} \cdot \underline{c} = |\underline{c}|^2 = c^2 = (\underline{b} - \underline{a}) \cdot (\underline{b} - \underline{a}) \\ &= b^2 + a^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{b} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\underline{c} \cdot \underline{c}} \right\} \underline{a} \cdot \underline{b} = ab \cos \varphi$$

Law of cosines: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$

$\Rightarrow$ For $\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0}$: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b} \quad (\varphi = \pm \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ orthogonality

$\Rightarrow \varphi = \arccos \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{ab} = \arccos \underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{b}}$

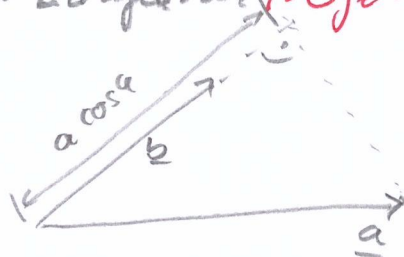
Das Skalarprodukt definiert Winkel und

Orthogonalität (gilt auch für $\mathbb{R}^n$ oder andere

$$\cos \varphi = \cos \left(\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|} \right)$$

Vektorräume, etwa C /stetige Funktionen)

- Skalarprodukte liefern die Längen von **Projektionen**



$$\text{Länge der Projektion } \left| \left(\underline{b} \cdot \underline{\hat{a}} \right) \underline{\hat{a}} \right| = \left| \underline{b} \cdot \underline{\hat{a}} \right| \underbrace{\left| \underline{\hat{a}} \right|}_{=1} = |\underline{b}| |\underline{\hat{a}}| \cos \varphi = |\underline{b}| \cos \varphi$$

- Für eine **orthonormale Basis** (etwa die Kartesische Basis

$$\underline{\hat{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\hat{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\hat{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

$$\underline{\hat{e}}_i \cdot \underline{\hat{e}}_j = \delta_{ij} \quad i=1,2,3$$

$$\Rightarrow \text{Komponenten von } \underline{a}: \underline{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \underline{\hat{e}}_i \Rightarrow a_i = \underline{a} \cdot \underline{\hat{e}}_i$$

$$\hookrightarrow \underline{a} \cdot \underline{\hat{e}}_i = \left(\sum_{j=1}^3 a_j \underline{\hat{e}}_j \right) \cdot \underline{\hat{e}}_i = \sum_{j=1}^3 a_j \underbrace{\underline{\hat{e}}_j \cdot \underline{\hat{e}}_i}_{\delta_{ij}} = a_i$$

$$\Rightarrow \underline{a} = \sum_{i=1}^3 (\underline{a} \cdot \underline{\hat{e}}_i) \underline{\hat{e}}_i$$

3.4 Kreuz-/Vektorprodukt

41

Def.: Das **Kreuz-/Vektorprodukt** zweier Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koord. ist definiert als eine Abbildung:

$$\bullet \times \bullet : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\underline{a}, \underline{b}) \mapsto \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Indizes **zyklisch vertauscht** $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
 $(123) \rightarrow (231) \rightarrow (312)$

• Eigenschaften:

• **antisymmetrisch** $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

• **bilinear**: $\underline{a} \times (\alpha \underline{b} + \beta \underline{c}) = \alpha (\underline{a} \times \underline{b}) + \beta (\underline{a} \times \underline{c})$

• im Allgemeinen: **nicht assoziativ**: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \neq (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$

• Für $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$$

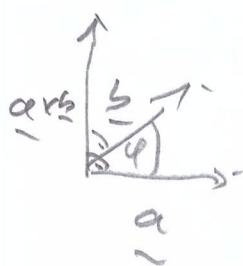
$$\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$$

$$\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$$

$\Rightarrow$ Rechte-Hand-Regel

• geometrische Interpretation:

(i) $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a} \wedge \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$



(ii) $|\underline{a} \times \underline{b}| = \text{Fläche des von } \underline{a} \text{ und } \underline{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms.}$

$\hookrightarrow \underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$

$\hookrightarrow \underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi \cdot \underline{\hat{n}}$

$\uparrow$
 Normalvektor senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$

• Jacob: - Identität:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{0}$$

• Kreuzprodukt ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert.

• Physik: 1) Skalarprodukt Arbeit, die ein Körper verrichtet:

$$\Delta W = \underline{F} \cdot \underline{dS} \quad \rightarrow \quad W = \int_{\text{Weg}} \underline{F} \cdot d\underline{s} \quad \text{"Wegintegral"}$$

(ii) magnetische Flussdichte $\underline{B}$ durch eine Fläche:

$$\Phi = \underline{B} \cdot (A \underline{n})$$

: nur $\underline{B}$ in Richtung von $\underline{n}$ trägt bei
Senkrecht auf A



2) Kreuzprodukt:

Drehmoment: $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$

Drehimpuls: $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$

Lorentzkraft: $\underline{F} = q \underline{v} \times \underline{B}$

3.5 Levi-Civita-Symbol

43

Def: Das **Levi-Civita-Symbol** ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } ijk \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gerade Permutationen: $(123), (312), (231)$

ungerade Permutationen: $(132), (321), (213)$

$$\Rightarrow (\underline{a} \times \underline{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k \equiv \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Einschließen kann konvertieren!

über doppelte Indizes wird summiert!

$\Rightarrow$ **Quotienten-Identität:**

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

links-rechts rechts-links

3.6 Mehrfachprodukte

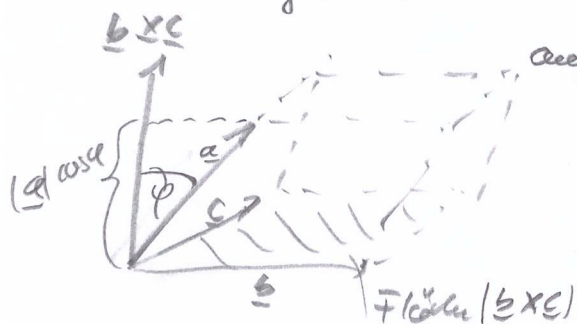
(i) doppeltes Kreuzprodukt: **bac-cab Regel**

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\underline{a} \cdot \underline{b})$$

(ii) **Spatprodukt:** $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$

geometrische Interpretation: Volumen eines von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

aufgespannten Parallelepipeds.



$$V = \underbrace{|\underline{b} \times \underline{c}|}_{\text{Fläche}} \underbrace{|\underline{a}| \cos \varphi}_{\text{Höhe}}$$

$\hookrightarrow$ gleiches Volumen bei zyklischer Vertauschung:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

↳ Berechnung über Determinante:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \sum_{i=1}^3 a_i (\underline{b} \times \underline{c})_i$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

$$(iii) (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underbrace{\underline{a} \cdot \underline{c}}_{\text{links-rechts}}) (\underbrace{\underline{b} \cdot \underline{d}}_{\text{rechts-links}}) - (\underbrace{\underline{a} \cdot \underline{d}}_{\text{rechts-links}}) (\underbrace{\underline{b} \cdot \underline{c}}_{\text{links-rechts}})$$

$$\hookrightarrow (\underline{a} \times \underline{b})^2 = (\underline{a} \cdot \underline{a})(\underline{b} \cdot \underline{b}) - (\underline{a} \cdot \underline{b})(\underline{b} \cdot \underline{a})$$

$$= a^2 b^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$$

$$= a^2 b^2 - 2(ab \cos \varphi)^2$$

$$= a^2 b^2 (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$= a^2 b^2 \sin^2 \varphi$$

$$\hookrightarrow \underline{a} \times \underline{b} = ab \sin \varphi \hat{n}$$

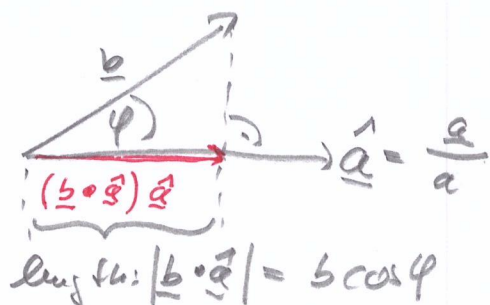
3.3 Dot product (continued)

44a

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{most often } n=3)$$

$$(\underline{a}, \underline{b}) \longmapsto \underline{a} \cdot \underline{b} \equiv \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

projection of $\underline{b}$ onto $\underline{a}$:



orthonormal basis: $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ with $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ (orthogonal)
and $|\underline{e}_i| = 1$ (normalized)

3.4 Cross product

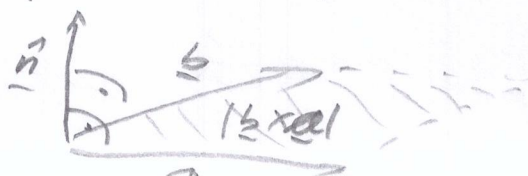
The cross product of 2 vectors $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ is defined as

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\underline{a}, \underline{b}) \longmapsto \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Properties:

- anti-symmetric: $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$
- bilinear: $\underline{a} \times (d\underline{b} + p\underline{c}) = d(\underline{a} \times \underline{b}) + p(\underline{a} \times \underline{c})$, $d, p \in \mathbb{R}$
 $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$
- not associative: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \neq (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$
- $(\underline{a} \times \underline{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k$ with Levi-Civita Symbol ϵ_{ijk}
- geometric interpretation: (i) $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a} \wedge \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$
(ii) $|\underline{a} \times \underline{b}| = \text{area of parallelogram spanned by } \underline{a}, \underline{b}$
 - $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \iff \underline{a} \parallel \underline{b}$
 - $\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi \underline{n}$



3.5 Levi-Civita-Symbol

446

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{for } ijk \text{ even permutation of } (1,2,3) \\ -1 & \text{--- " --- odd --- " ---} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

j \ i	i=1			i=2			i=3		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
3	0	-1	0	1	0	0	0	0	0

3.5 Levi-Civita-Symbol

93

Def: Das **Levi-Civita-Symbol** ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } ijk \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gerade Permutationen: $(123), (312), (231)$

ungerade Permutationen: $(132), (321), (213)$

$$\Rightarrow (a \times b)_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Einstenschen Summ Konvention!

über doppelte Indizes wird summiert!

$\Rightarrow$ **Quadranten-Identität:**

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

links-rechts rechts-links

3.6 Mehrfachprodukte

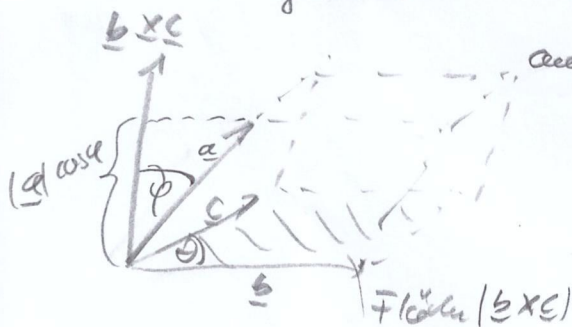
(i) doppeltes Kreuzprodukt: **Sac-cab Regel**

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

(ii) **Spatprodukt:** $a \cdot (b \times c)$

geometrische Interpretation: Volumen eines von a, b, c

aufgespannten Parallelepipeds.



$$V = \underbrace{|b \times c|}_{\text{Fläche}} \underbrace{|a| \cos \varphi}_{\text{Höhe}} = abc \sin \theta \cos \varphi$$

$\hookrightarrow$ gleiches Volumen bei zyklischer Vertauschung:

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$$

↳ Berechnung über Determinante:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \sum_{i=1}^3 a_i (\underline{b} \times \underline{c})_i$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

$$(iii) (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c})$$

links rechts rechts links

$$\hookrightarrow (\underline{a} \times \underline{b})^2 = (\underline{a} \cdot \underline{a})(\underline{b} \cdot \underline{b}) - (\underline{a} \cdot \underline{b})(\underline{b} \cdot \underline{a})$$

$$= a^2 b^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$$

$$= a^2 b^2 - (ab \cos \varphi)^2$$

$$= a^2 b^2 (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$= a^2 b^2 \sin^2 \varphi$$

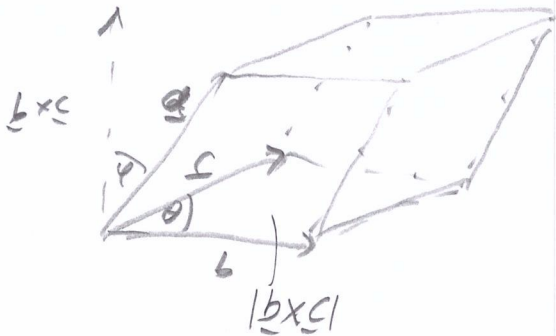
$$\hookrightarrow \underline{a} \times \underline{b} = ab \sin \varphi \underline{\hat{n}}$$

3.6 Products involving Vectors / tripl product

44c

(i) bac - cab rule : $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\underline{a} \cdot \underline{b})$
 "bac minus cab" rule

(ii) (Scalar) triple product : $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \text{volume of parallelepiped spanned by } \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$
 box product



$$\begin{aligned} &= \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \end{aligned}$$

(iii) Lagrange's identity :

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) (\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d}) (\underline{b} \cdot \underline{c})$$

left right outer inner