4 Vektoranalysis

4.1 (Konservative) Vektorfeldern

Def.: Ein Vektorfeld ist eine im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetige Abbildung

$$\underline{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \underline{x} \longmapsto \underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ v_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

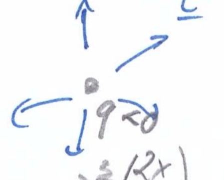
Def.: Ein Vektorfeld $\underline{v}$ heißt C^s-Vektorfeld, falls die Komponenten $v_1, \dots, v_n$ s-fach stetig differenzierbar sind.

Bsp.:
- Elektrisches / magnetisches Feld
- Geschwindigkeitsfeld von Strömungen
- Gravitationsfeld

Def.: Ein Vektorfeld $\underline{v}(\underline{x})$ heißt konservativ (oder Gradientenfeld | Potenzialfeld), falls es sich als Gradient eines Skalarfeldes $\phi(\underline{x})$ (Potenzials) schreiben lässt:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\, \phi(\underline{x})$$

Bsp.: (i) Elektrisches Feld einer Punktladung q im Ursprung:



$$\underline{E}(\underline{x}) = -\underline{\nabla}\, \phi(\underline{x}) \quad \text{mit } \phi(\underline{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{x}|}$$

Probe: $\underline{\nabla} \frac{1}{|\underline{x}|} = \underline{\nabla} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = -\frac{\underline{x}}{x^3}$

(ii) Frage: Hat das Vektorfeld

$$\underline{v} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y e^{xy} + z \\ x e^{xy} \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

ein Potenzial?

Antwort: Dann müsste $\phi(x,y,z)$ existieren mit

$$\partial_x \phi = v_x \ , \ \partial_y \phi = v_y \ , \ \partial_z \phi = v_z .$$

Idee: Integration & Angleichen der Konstanten

(a) $\phi = \int v_x \, dx = e^{xy} + xz + C_1(y,z)$

(b) $\phi = \int v_y \, dy = e^{xy} + C_2(x,z)$

(c) $\phi = \int v_z \, dz = xz + z^2 + C_3(x,y)$

$\Rightarrow$ Alle 3 Bedingungen erfüllt durch:

$C_1(y,z) = z^2$, $C_2(x,z) = xz + z^2$, $C_3(x,y) = e^{xy}$

$\Rightarrow \phi = e^{xy} + xz + z^2$

$\Rightarrow \underline{v}$ ist konservativ

4.2 Ableitung von Vektorfeldern

(i) Def: Die Rotation (Wirbeldichte) eines Vektorfeldes $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$

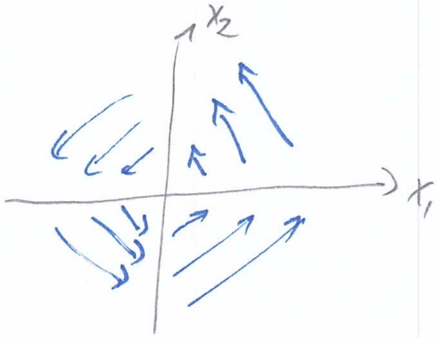
ist definiert als (in kartesischen Koordinaten)

$$\text{rot}\,\underline{v} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{v} := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} .$$

oder auch: $(\text{rot}\,\underline{v})_i = \varepsilon_{ijk} \, \partial_j v_k$ (Summenkonvention!)

$$\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, \partial_j v_k$$

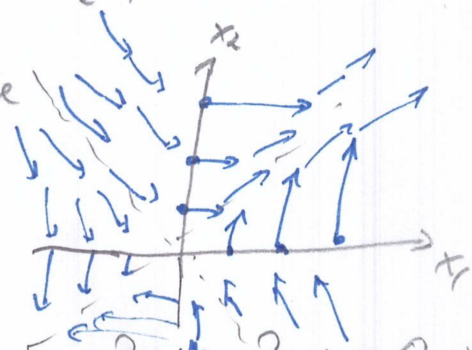
Bsp: (a) $\underline{v} = \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ +\omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega+\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$



$\Rightarrow$ rot $\underline{v}$ in z-Richtung (Rechte-Daumen-Regel)

(b) Bei Bsp (a) $(\text{rot}\,\underline{v})_3 = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$

vergleiche



$\underline{v} = \begin{pmatrix} \omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \underbrace{\partial_1 v_2}_{>0} - \underbrace{\partial_2 v_1}_{<0} \neq 0 \Rightarrow$ Wirbel!

$\underbrace{\partial_1 v_2}_{>0} - \underbrace{\partial_2 v_1}_{>0} = 0 \Rightarrow$ keine Wirbel!

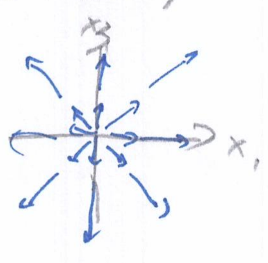
Idee: Wie ändert sich v_1 in Richtung 2 im Vergleich zu v_2 in Richtung 1?

(ii) Def: Die Divergenz (Quellendichte) von $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$ ist definiert als:

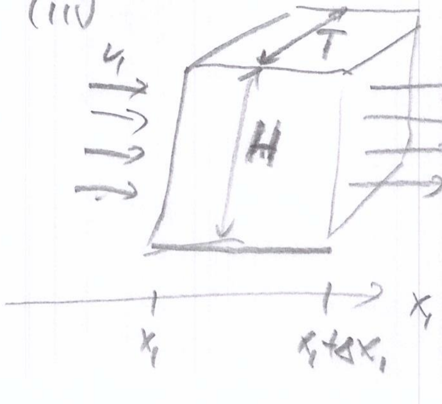
$$\text{div}\,\underline{v} \equiv \underline{\nabla}\cdot\underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \equiv \partial_i v_i \quad \text{(Summenkonvention)}$$

Bsp: (i) $\underline{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ (keine Quellen)

(ii) $\underline{\nabla}\cdot\underline{x} = \underline{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3$



(iii)



Zufluss: $Z = v_1(x_1)\,HT$

Abfluss: $A = v_1(x_1+\Delta x_1)\,HT$

$\Rightarrow$ Netto pro Volumen:

$$\frac{1}{\Delta x_1 HT}(A-Z) = \frac{v_1(x_1+\Delta x_1) - v_1(x_1)}{\Delta x_1} \xrightarrow[\Delta x_1 \to 0]{} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1)$$

4. Vector calculus / analysis

4.1 (Conservative) vector fields

- Vectorfield: $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ v_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$
  potentially dim Ω < n
- C^s-vectorfield: $v_1, \dots, v_n$ s-times continuously differentiable.
- Conservative vectorfield: $\underline{v}$ is gradient of scalar potential ϕ

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\nabla} \phi(\underline{x})$$

4.2 Derivations of vectorfields

- (Rotation) curl of $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$:

$$\text{rot}\,\underline{v} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{v} := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{rot}\,\underline{v})_i = \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$$

- Divergence of $\underline{v}(\underline{x})$: $\text{div}\,\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} := \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3$

(iii) Def: Der Laplace-Operator ist definiert als: $\Delta := \text{div grad}$

Also: $$\Delta\phi(x_1,x_2,x_3) = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\phi) = (\partial_{x_1},\partial_{x_2},\partial_{x_3})\cdot\begin{pmatrix}\partial_{x_1}\phi\\ \partial_{x_2}\phi\\ \partial_{x_3}\phi\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\phi$$

↳ Laplace-Gleichung: $\Delta\phi = 0$ (wichtig bei Transportprozesse, Potenzialtheorie...)

Achtung: $\Delta\underline{A} = \frac{\partial^2\underline{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\underline{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\underline{A}}{\partial z^2} = \text{grad div}\underline{A} - \text{rot rot}\underline{A} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})$

Bem: • div, rot, grad sind linear: $\text{rot}(\underline{u}+\underline{v}) = \text{rot}\,\underline{u} + \text{rot}\,\underline{v}$

$\text{div}(\underline{u}+\underline{v}) = \text{div}\,\underline{u} + \text{div}\,\underline{v}$

$\text{grad}(\phi+\psi) = \text{grad}\,\phi + \text{grad}\,\psi$

Aufgabe 64.8a

• Produktregel: $\text{div}(\phi\underline{v}) = \phi\,\text{div}\,\underline{v} + (\text{grad}\,\phi)\cdot\underline{v}$

$\text{rot}(\phi\underline{A}) = \underline{\nabla}\phi\times\underline{A} + \phi(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \text{grad}\,\phi\times\underline{A} + \phi\,\text{rot}\,\underline{A}$

4.3 Gradienten- & Wirbelfelder

Satz: Gradientenfelder $\underline{v} = \underline{\nabla}\phi$ sind wirbelfrei.

Beweis: $\text{rot}\,\underline{v} = \underline{\nabla}\times\underline{v} = \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\phi)$

i-te Komponente: $[\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi]_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j(\underline{\nabla}\phi)_k$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\substack{\text{antisymm}\\ \text{in } j,k}}\,\underbrace{\partial_j\partial_k}_{\substack{\text{symm in}\\ j,k}}\phi = 0$$

Also: (i) $\text{rot grad} = \underline{\nabla}\times\underline{\nabla} = 0$

(ii) Umkehrung gilt auch: Jedes wirbelfreie Feld $\underline{v}$ ($\text{rot}\,\underline{v}=0$) hat ein Potenzial ϕ ($\underline{v} = \underline{\nabla}\phi$)

$\Rightarrow$ $\underline{v}$ ist konservativ $\Leftrightarrow$ $\text{rot}\,\underline{v} = 0$

Bsp.: $\underline{A}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -y^3 z \\ x e^z \\ e^{2y} \end{pmatrix} \Rightarrow$ Berechne $\Delta \underline{A}$ (Laplace-Operator)

$$\Rightarrow \Delta \underline{A} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 \\ e^z \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} -3y^2 z \\ 0 \\ 2e^{2y} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} -y^3 \\ x e^z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6yz \\ 0 \\ 4e^{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xe^z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6yz \\ xe^z \\ 4e^{2y} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) = \underline{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x} A_1 + \frac{\partial}{\partial y} A_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_3\right) =$$

$$= \underline{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^3 z) + \frac{\partial}{\partial y}(xe^z) + \frac{\partial}{\partial z}(e^{2y})\right)$$

$$= \underline{\nabla}(0) = \underline{0}$$

$$-\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla} \times \begin{pmatrix} 2e^{2y} - xe^z \\ -y^3 - 0 \\ e^z + 3y^2 z \end{pmatrix} = \underline{\nabla} \times \begin{pmatrix} 2e^{2y} - xe^z \\ -y^3 \\ e^z + 3y^2 z \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 6yz - 0 \\ -xe^z - 0 \\ 0 - 4e^{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6yz \\ xe^z \\ 4e^{2y} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Delta \underline{A} = \text{grad div}\,\underline{A} - \text{rot rot}\,\underline{A}$

Satz: Wirbelfelder $\underline{v} = \text{rot}\,\underline{A}$ sind quellenfrei.

Beweis: $\text{div}\,\underline{v} = \text{div}(\text{rot}\,\underline{A}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\underline{A} = \sum_i \partial_i (\underline{\nabla}\times\underline{A})_i$

$$= \sum_{ijk} \partial_i \, \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$= 0$$

Also: (i) div rot $= 0$

(ii) Umkehrung gilt auch: Jedes quellenfreie Feld hat ein

Vektorpotential.

z.B.: $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$

Anwendung: Maxwell-Gleichungen (homogene)

(a) $\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$ (b) $\underline{\nabla}\times\underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$

mit $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$: $\underline{\nabla}\times\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\times\underline{A} = 0$

Satz v. Schwarz $\Rightarrow$ $\underline{\nabla}\times\left(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right) = 0$

wirbelfrei $\Rightarrow$ $\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\underline{\nabla}\phi$ (Konvention)

$\Rightarrow$ $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$

$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$ ($\phi, \underline{A}$ nicht eindeutig $\Rightarrow$ Eichtransformationen)

4.2 Derivations of vector fields

(iii) Laplace-Operator: (a) $\Delta\phi := \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\phi)$ scalar field potential

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi$$

(b) $\Delta\underline{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{A} \overset{?}{=} \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{A}$

$$= \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})$$

- rot, grad, div: linear operators
- product rules: (a) $\operatorname{div}(\phi\underline{v}) = \phi\operatorname{div}\underline{v} + (\operatorname{grad}\phi)\cdot\underline{v}$

$$\underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{v}) = \phi(\underline{\nabla}\cdot\underline{v}) + (\underline{\nabla}\phi)\cdot\underline{v}$$

(b) $\operatorname{rot}(\phi\underline{A}) = \phi\operatorname{rot}\underline{A} + \operatorname{grad}\phi\times\underline{A}$

$$= \phi(\underline{\nabla}\times\underline{A}) + (\underline{\nabla}\phi)\times\underline{A}$$

4.3 Gradient field and curl

Theorem: (i) Gradient fields have no curl

$$\underline{v} = \underline{\nabla}\phi \Rightarrow \operatorname{rot}\underline{v} = \underline{0}$$

(ii) $\operatorname{rot}\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{\nabla}\phi$

$\underline{v}$ conservative $\Leftrightarrow \operatorname{rot}\underline{v} = 0$

Theorem: (i) $\underline{v} = \operatorname{rot}\underline{A} \Rightarrow$ no sink / no source $(\operatorname{div}\underline{v} = 0)$

(ii) $\operatorname{div}\underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \operatorname{rot}\underline{A}$

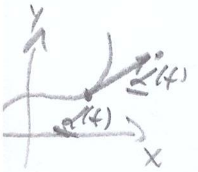
4.4 Raumkurven

Parametrisierung α einer Raumkurve $C:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

Def: Eine **Raumkurve** α ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Intervall $I\subset\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{\alpha}: I\longrightarrow\mathbb{R}^n$$
$$t\longmapsto\underline{\alpha}(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_n(t)\end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $\dot{\underline{\alpha}}(t) := \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\underline{\alpha}(t+\Delta t)-\underline{\alpha}(t)}{\Delta t}=\begin{pmatrix}\dot{\alpha}_1(t)\\ \vdots\\ \dot{\alpha}_n(t)\end{pmatrix}$

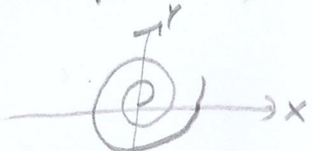


liefert den **Tangentenvektor** an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt **regulär**, wenn gilt: $\dot{\underline{\alpha}}(t)\neq\underline{0}\ \forall t\in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t>0$)

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$



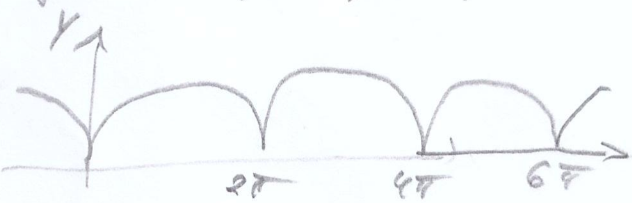
(ii) Schraubenlinie (regulär für $t\in\mathbb{R}$)

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}R\cos t\\ R\sin t\\ h t\end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\dots$

$$t\longmapsto\begin{pmatrix}t-\sin t\\ 1-\cos t\end{pmatrix}$$

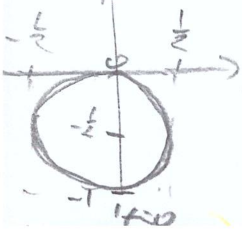
Punkt auf rollendem Rad



$$\dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\Rightarrow\dot{\underline{\alpha}}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ für } t=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\dots)$$

(iv) $\alpha: t\longmapsto\left(\dfrac{t}{t^2+1},\ -\dfrac{1}{t^2+1}\right)$

Frage: Was beschreibt α?



$$\frac{x}{y}=-t\Rightarrow x=\frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1}=\frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=y$$

$$\Rightarrow x^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}\Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \tfrac{1}{2} \text{ um } \left(0;-\tfrac{1}{2}\right).$$

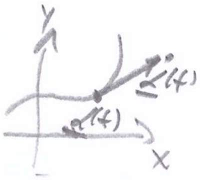
4.4 Raumkurven

Parametrisierung α einer Raumkurve $C: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Def: Eine **Raumkurve** α ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Interval $I \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $\underline{\dot{\alpha}}(t) := \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\underline{\alpha}(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n(t) \end{pmatrix}$

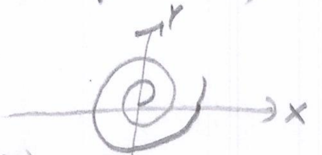


liefert den **Tangentenvektor** an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt **regulär**, wenn gilt: $\underline{\dot{\alpha}}(t) \neq \underline{0} \ \forall t \in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t > 0$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$$



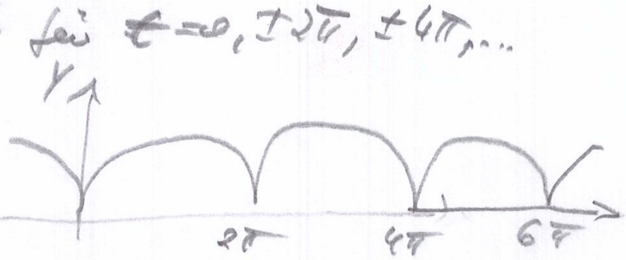
(ii) Schraubenlinie (regulär für $t \in \mathbb{R}$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ h t \end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

Punkt auf rollendem Rad



$$\underline{\dot{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots)$$

(iv) $\underline{\alpha}: t \longmapsto \left(\dfrac{t}{t^2+1}, -\dfrac{1}{t^2+1} \right)$

Frage: Was beschreibt $\underline{\alpha}$?

$$\frac{x}{y} = -t \Rightarrow x = \frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1} = \frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = y$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} \Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \tfrac{1}{2} \text{ um } \left(0, \tfrac{1}{2}\right).$$

4.5 Bogenlänge

Frage: Länge L eines Kurvenstücks C $(\underline{\alpha}:[a,b]\to C \subset \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \underline{\alpha}(t))$

Idee: Näherung durch Polygonzug / Sehnenpolygone

$\Delta t = t_k - t_{k-1} \Leftrightarrow t_k = t_{k-1} + \Delta t$

$$\Rightarrow L_m = \sum_{k=1}^{m} \left|\underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1})\right| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1})}{\Delta t}\right| \Delta t$$

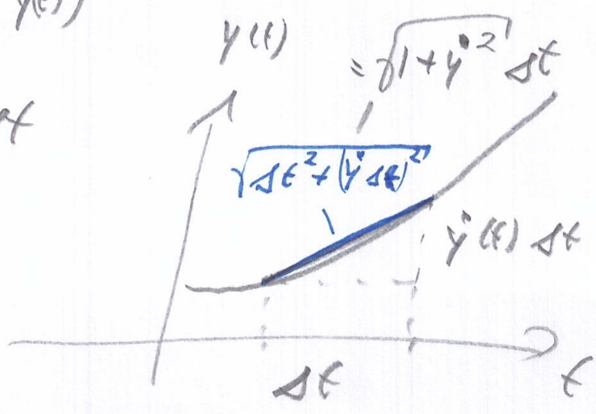
$$\underset{\Delta t \text{ klein}}{\approx} \sum_{k=1}^{m} \left|\dot{\underline{\alpha}}(t_{k-1})\right| \Delta t$$

Satz: Für eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\underline{\alpha}(t)$ der Kurve C $(\underline{\alpha}:[a,b]\to\mathbb{R}^n)$ gilt für die Länge von C:

$$L(C) = \int_a^b |\dot{\underline{\alpha}}(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(t)^2}\,dt$$

Bsp.: $\underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L(C) = \int_a^b \sqrt{1+\dot{y}(t)^2}\,dt$$

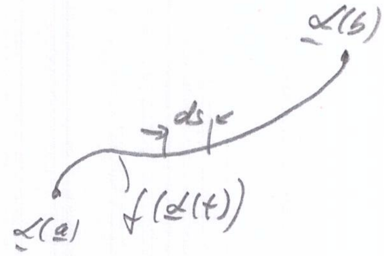


4.6 Wegintegrale

1. Skalares Wegintegral: bezieht sich auf Integrand (Skalarfeld)

Def.: Das **skalare Weg-/Kurvenintegral** von $f: \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$ über eine Kurve $C: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \underline{\alpha}(t)$ ist definiert als

$$\int_C f(\underline{x})\, ds := \int_a^b f(\underline{\alpha}(t))\, |\underline{\dot\alpha}(t)|\, dt$$



mit dem **Bogenelement** $ds = |\underline{\dot\alpha}(t)|\, dt$.

Bsp.: (i) Länge einer Kurve ($\to$ 4.5): $f(\underline{x}) = 1$.

(ii) Kreisförmiger Draht um Ursprung mit Radius R und Längendichte ϱ (Masse pro Länge).

Frage: (a) Gesamtmasse

(b) Schwerpunkt

Idee: **Parametrisierung** der Drahtschleife $C: t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow |\underline{\dot\alpha}(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

(a) $$M = \int_C dm = \int_C \varrho\, ds = \int_0^{2\pi} \varrho\, R\, dt = 2\pi R \varrho$$

(b) $$\underline{R}_S = \frac{1}{M} \int_C \underline{r}\, dm = \frac{1}{M} \int_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dm$$

$\hookrightarrow$ x-Koordinate: $$X_S = \frac{1}{M} \int_C x\, dm = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} R\cos t\; \varrho R\, dt$$

$$= 0 \qquad (Y_S \text{ analog})$$

alternativ: $\underline{\alpha}(s) = R \begin{pmatrix} \cos 2s \\ \sin 2s \end{pmatrix}$ mit $s \in [0, \pi) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (X_S, Y_S) = (0,0)$

Kettenregel (...) als Substitution ...

2. vektorielle Wegintegrale (Integral: Vektorfeld)

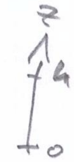
Def.: Das **vektorielle Weg-/Kurvenintegral** entlang einer mit $\underline{\alpha}(t)$ parametrisierten Kurve C über das Vektorfeld $\underline{v}$ ist definiert als

$$\int_C \underline{v}\cdot d\underline{s} := \int_a^b \underline{v}(\underline{\alpha}(t))\cdot \dot{\underline{\alpha}}(t)\,dt,$$

wobei $d\underline{s} = \dot{\underline{\alpha}}(t)\,dt$ der infinitesimale Tangentenvektor ist

Bsp.: mechanische Arbeit entlang eines Weges C

$$W=\int_C \underline{F}\cdot d\underline{s}, \quad \underline{F}=-mg\,\hat{\underline{e}}_z \text{ und } \underline{\alpha}:[0,1]\mapsto\mathbb{R}^3, \; t\mapsto h t\,\hat{\underline{e}}_z$$

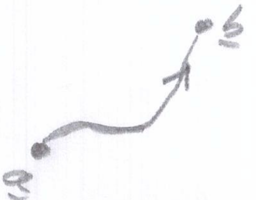


(*) s.a. 3a

$$\Rightarrow W=\int_0^1 -mg\,\hat{\underline{e}}_z\cdot h\,\hat{\underline{e}}_z\,dt = -mgh \qquad \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}} = h\,\hat{\underline{e}}_z$$

3. Wegintegral über konservatives Vektorfeld

$\underline{v}$ konservativ $\Rightarrow \underline{v} = \nabla\phi$, C: Weg von $\underline{a}$ nach $\underline{b}$



$$\int_C \underline{v}\cdot d\underline{x} = \int_C \underbrace{(\nabla\phi)\cdot d\underline{x}}_{d\phi}$$

, totales Differential:

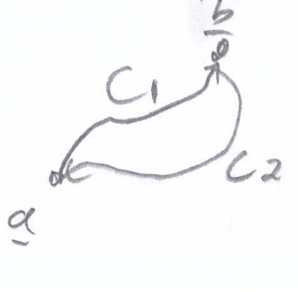
$$d\phi(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\phi\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\phi\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\phi\,dz = (\nabla\phi)\cdot d\underline{x}$$

$$= \int_C d\phi = \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a})$$

(vgl.: $\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a)$)

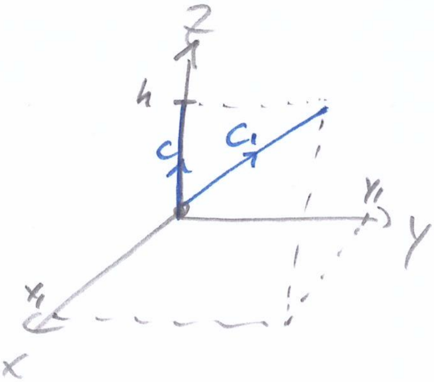
$\Rightarrow$ Wegintegral über konservativem Vektorfeld hängt nicht vom Weg ab!

Insbesondere: $$\int_{C_1}\underline{v}\cdot d\underline{x} + \int_{C_2}\underline{v}\cdot d\underline{x} = \oint_{C=C_1\cup C_2}\underline{v}\cdot d\underline{x}$$



$$= \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a}) + \phi(\underline{a}) - \phi(\underline{b}) = 0$$

⊛ mechanische Arbeit entlang eines Weges C:



Parametrisierung von C: $\underline{\alpha}(t) = ht\,\hat{\underline{e}}_z,\ t\in[0,1]$

—— " —— C_1: $\underline{\beta}(t) = ht\,\hat{\underline{e}}_z + x_1 t\,\hat{\underline{e}}_x + y_1 t\,\hat{\underline{e}}_y$

$$W = \int_C \underline{F}\cdot d\underline{s} = \ldots = -mgh \quad (\text{s. S.S3})$$

$$W_1 = \int_{C_1} \underline{F}\cdot d\underline{s} = \int_0^1 (-mg)\,\hat{\underline{e}}_z \cdot \dot{\underline{\beta}}(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 dt\,(-mg)\Big[\hat{\underline{e}}_z\cdot h\,\hat{\underline{e}}_z + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z\cdot x_1\hat{\underline{e}}_x}_{=0} + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z\cdot y_1\hat{\underline{e}}_y}_{=0}\Big]$$

$\hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_x,\ \hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_y$

Oder auch $\hat{\underline{e}}_i \cdot \hat{\underline{e}}_j = \delta_{ij}$

$$= \int_0^1 dt\,(-mg)\,h = -mgh = W$$

gilt auch für noch kompliziertere Wege von $z=0$ auf Höhe h.

4.2 Derivations of vector fields

(iii) Laplace-Operator: (a) $\Delta\phi := \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\phi)$ scalar field potential

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi$$

(b) $$\Delta\underline{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{A} \overset{?}{=} \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{A}$$

$$= \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})$$

- rot, grad, div : linear Operators
- productrules: (a) $\operatorname{div}(\phi\underline{v}) = \phi\operatorname{div}\underline{v} + (\operatorname{grad}\phi)\cdot\underline{v}$

$$\underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{v}) = \phi(\underline{\nabla}\cdot\underline{v}) + (\underline{\nabla}\phi)\cdot\underline{v}$$

(b) $\operatorname{rot}(\phi\underline{A}) = \phi\operatorname{rot}\underline{A} + \operatorname{grad}\phi\times\underline{A}$

$$= \phi(\underline{\nabla}\times\underline{A}) + (\underline{\nabla}\phi)\times\underline{A}$$

4.3 Gradient field and Curl

Theorem: (i) Gradientfields have no curl

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v} = \underline{\nabla}\phi \Rightarrow \operatorname{rot}\underline{v} = \underline{0} \\ \text{(ii)} \quad \operatorname{rot}\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{\nabla}\phi \end{array}\right\} \underline{v}\text{ conservative} \Leftrightarrow \operatorname{rot}\underline{v} = 0$$

Theorem: (i) $\underline{v} = \operatorname{rot}\underline{A} \Rightarrow$ no sink/no source ($\operatorname{div}\underline{v} = 0$)

(ii) $\operatorname{div}\underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \operatorname{rot}\underline{A}$

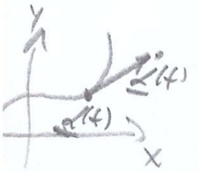
4.4 Raumkurven

Parametrisierung einer Raumkurve $C : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Def: Eine **Raumkurve** $\underline{\alpha}$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $\dot{\underline{\alpha}}(t) := \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\underline{\alpha}(t+\Delta t) - \underline{\alpha}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n(t) \end{pmatrix}$

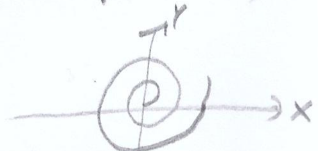


liefert den **Tangentenvektor** an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt **regulär**, wenn gilt: $\dot{\underline{\alpha}}(t) \neq \underline{0} \;\; \forall t \in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t > 0$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$$

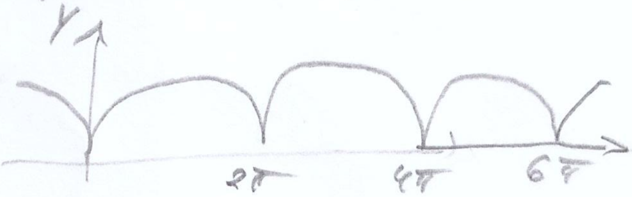


(ii) Schraubenlinie (regulär für $t \in \mathbb{R}$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos t \\ R \sin t \\ h t \end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

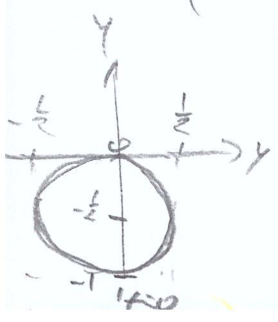


Punkt auf rollendem Rad

$$\dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots)$$

(iv) $\underline{\alpha} : t \longmapsto \left(\dfrac{t}{t^2+1} , -\dfrac{1}{t^2+1} \right)$

Frage: Was beschreibt $\underline{\alpha}$?



$$\frac{x}{y} = -t \Rightarrow x = \frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1} = \frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = y$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} \Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \tfrac{1}{2} \text{ um } \left(0, -\tfrac{1}{2}\right).$$

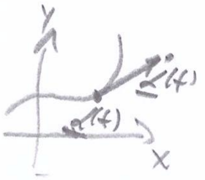
4.4 Raumkurven

Parametrisierung α einer Raumkurve $C: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Def: Eine Raumkurve α ist eine stetig differenzierbare Abbildung vom Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

Def: Die Ableitung $\dot{\underline{\alpha}}(t) := \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\underline{\alpha}(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n(t) \end{pmatrix}$

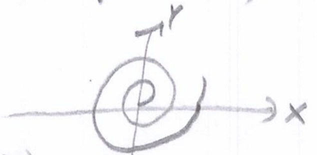


liefert den Tangentenvektor an die Kurve.

Def: Eine Raumkurve heißt regulär, wenn gilt: $\dot{\underline{\alpha}}(t) \neq \underline{0} \;\; \forall\, t \in I$.

Bsp.: (i) Archimedische Spirale (regulär für $t > 0$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$$



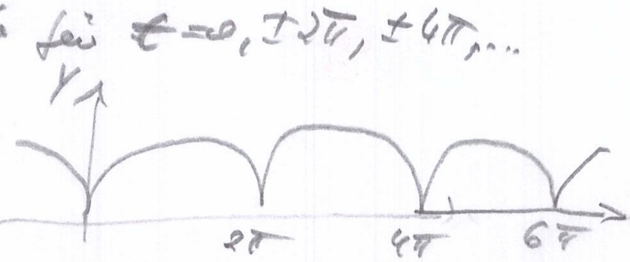
(ii) Schraubenlinie (regulär für $t \in \mathbb{R}$)

$$t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos t \\ R \sin t \\ h t \end{pmatrix}$$

(iii) Zykloide (nicht regulär für $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

Punkt auf rollendem Rad



$\dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots)$

(iv) $\underline{\alpha}: t \longmapsto \left(\dfrac{t}{t^2+1}, \; -\dfrac{1}{t^2+1} \right)$

Frage: Was beschreibt $\underline{\alpha}$?

$$\frac{x}{y} = -t \Rightarrow x = \frac{-\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1} = \frac{x}{y\,\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = y$$

$\Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ um $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

4.5 Bogenlänge

Frage: Länge eines Kurvenstücks $C\,(\underline{\alpha}:[a,b]\to C\subset\mathbb{R}^n,\ t\mapsto\underline{\alpha}(t))$

Idee: Näherung durch Polygonzug / Sehnenpolygone

$\Delta t = t_k - t_{k-1} \Leftrightarrow t_k = t_{k-1} + \Delta t$

$$\Rightarrow L_m = \sum_{k=1}^{m} \left|\underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1})\right| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\underline{\alpha}(t_k) - \underline{\alpha}(t_{k-1})}{\Delta t}\right| \Delta t$$

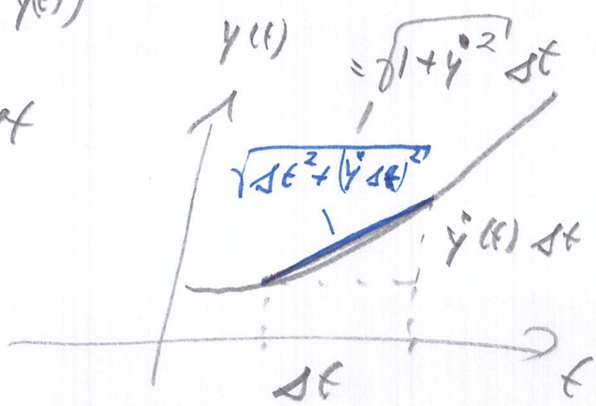
$$\underset{\Delta t \text{ klein}}{\approx} \sum_{k=1}^{m} \left|\underline{\dot{\alpha}}(t_{k-1})\right| \Delta t$$

Satz: Für eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\underline{\alpha}(t)$ der Kurve $C\,(\underline{\alpha}:[a,b]\to\mathbb{R}^n)$ gilt für die Länge von C:

$$L(C) = \int_a^b |\underline{\dot{\alpha}}(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i(t)^2}\,dt$$

Bsp.: $\underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t)\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L(C) = \int_a^b \sqrt{1+\dot{y}(t)^2}\,dt$$

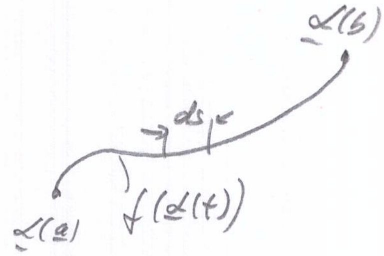


4.6 Wegintegrale

(1. Skalares Wegintegral : bezieht sich auf Integrand (Skalarfeld)

Def.: Das **skalare Weg-/Kurvenintegral** von $f: \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$ über eine Kurve $C: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \underline{\alpha}(t)$ ist definiert als

$$\int_C f(\underline{x})\, ds := \int_a^b f(\underline{\alpha}(t))\, |\dot{\underline{\alpha}}(t)|\, dt$$



mit dem **Bogenelement** $ds = |\dot{\underline{\alpha}}(t)|\, dt$.

Bsp.: (i) Länge einer Kurve ($\to$ 4.5): $f(\underline{x}) = 1$.

(ii) Kreisförmiger Draht um Ursprung mit Radius R und Längendichte ϱ (Masse pro Länge).

Frage: (a) Gesamtmasse

(b) Schwerpunkt

Idee: **Parametrisierung** der Drahtschleife $C: t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow |\dot{\underline{\alpha}}(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

(a) $$M = \int_C dm = \int_C \varrho\, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \varrho\, R\, dt = 2\pi R \varrho$$

(b) $$\underline{R}_s = \frac{1}{M} \int_C \underline{r}\, dm = \frac{1}{M} \int_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dm$$

$\hookrightarrow$ x-Koordinate: $$X_s = \frac{1}{M} \int_C x\, dm = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} R\cos t\ \varrho R\, dt$$

$$= 0 \qquad (Y_s \text{ analog})$$

alternativ: $\underline{\alpha}(s) = R \begin{pmatrix} \cos 2s \\ \sin 2s \end{pmatrix}$ mit $s \in [0, \pi) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (X_s, Y_s) = (0,0)$

Kettenregel (...) als Substitution ...

2. vektorielle Wegintegrale (Integrand: Vektorfeld)

Def.: Das vektorielle Weg-/Kurvenintegral entlang einer mit $\underline{\alpha}(t)$ parametrisierten Kurve C über das Vektorfeld $\underline{v}$ ist definiert als

$$\int_C \underline{v}\cdot d\underline{s} := \int_a^b \underline{v}(\underline{\alpha}(t))\cdot \dot{\underline{\alpha}}(t)\,dt,$$

wobei $d\underline{s} = \dot{\underline{\alpha}}(t)\,dt$ der infinitesimale Tangentenvektor ist

Bsp.: mechanische Arbeit entlang eines Weges C

$$W = \int_C \underline{F}\cdot d\underline{s}\,, \qquad \underline{F} = -mg\,\hat{\underline{e}}_z \text{ und } \underline{\alpha}:[0,1] \mapsto \mathbb{R}^3,\ t \mapsto ht\hat{\underline{e}}_z$$

(*) s.a. 3a

$$\Rightarrow W = \int_0^1 -mg\,\hat{\underline{e}}_z\cdot h\,\hat{\underline{e}}_z\,dt = -mgh \qquad \Rightarrow \dot{\underline{\alpha}} = h\,\hat{\underline{e}}_z$$

3. Wegintegral über konservatives Vektorfeld

$\underline{v}$ konservativ $\Rightarrow \underline{v} = \nabla\phi$, C: Weg von $\underline{a}$ nach $\underline{b}$

$$\int_C \underline{v}\cdot d\underline{x} = \int_C \underbrace{(\nabla\phi)\cdot d\underline{x}}_{d\phi}\,,$$

totales Differential:

$$d\phi(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\phi\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\phi\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\phi\,dz = (\nabla\phi)\cdot d\underline{x}$$

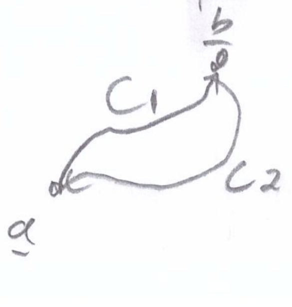
$$= \int_C d\phi = \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a})$$

(vgl.: $\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a)$)

$\Rightarrow$ Wegintegral über konservativem Vektorfeld hängt nicht vom Weg ab!

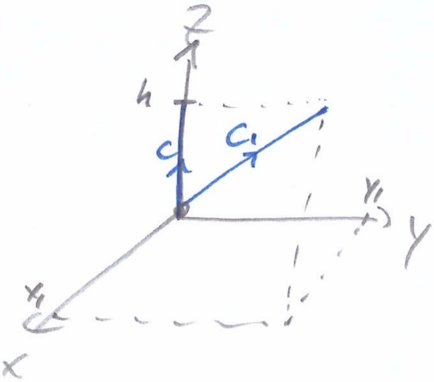
Insbesondere:

$$\int_{C_1} \underline{v}\cdot d\underline{x} + \int_{C_2} \underline{v}\cdot d\underline{x} = \oint_{C = C_1\cup C_2} \underline{v}\cdot d\underline{x}$$



$$= \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a}) + \phi(\underline{a}) - \phi(\underline{b}) = 0$$

⊛ mechanische Arbeit entlang eines Weges C:



Parametrisierung von C: $\underline{\alpha}(t) = h t \,\hat{\underline{e}}_z$, $t \in [0,1]$

—— " —— C_1: $\underline{\beta}(t) = h t \,\hat{\underline{e}}_z + x_1 t \,\hat{\underline{e}}_x + y_1 t \,\hat{\underline{e}}_y$

$$W = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{s} = \dots = -mgh \quad \text{(s. S. S3)}$$

$$W_1 = \int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_0^1 (-mg)\,\hat{\underline{e}}_z \cdot \dot{\underline{\beta}}(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 dt\,(-mg) \Big[\hat{\underline{e}}_z \cdot h \hat{\underline{e}}_z + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z \cdot x_1 \hat{\underline{e}}_x}_{=0} + \underbrace{\hat{\underline{e}}_z \cdot y_1 \hat{\underline{e}}_y}_{=0} \Big]$$

$\hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_x$, $\hat{\underline{e}}_z \perp \hat{\underline{e}}_y$

oder auch $\hat{\underline{e}}_i \cdot \hat{\underline{e}}_j = \delta_{ij}$

$$= \int_0^1 dt\,(-mg)\, h = -mgh = W$$

gilt auch für noch kompliziertere Wege von $z=0$ auf Höhe h.

4.4 (Parameterization of) curves

- curve C (set of points in $\mathbb{R}^n$): parameterized by a function

$$\underline{\alpha} : \underbrace{[a,b]}_{I} \rightarrow \mathbb{R}^n \, , \quad t \mapsto \underline{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

- Derivative: $\dot{\underline{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n(t) \end{pmatrix}$ vector tangential on curve C at $\underline{\alpha}(t)$

- regular curve: $\dot{\underline{\alpha}}(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in I$

4.5 Length of a curve

- length of C: $L(C) = \int_a^b |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, dt$

4.5 Integration along curves

- scalar $\left(f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \atop \underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \right)$: $\int_C f(\underline{x}) \, ds = \int_a^b f(\underline{\alpha}(t)) |\dot{\underline{\alpha}}(t)| \, ds$

- vectorial $\left(\underline{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \atop \underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x}) \right)$: $\int_C \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{v}(\underline{\alpha}(t)) \cdot \dot{\underline{\alpha}}(t) \, dt$

4.7 Parametrisierung von Flächen

Hier: Flächen im $\mathbb{R}^3$

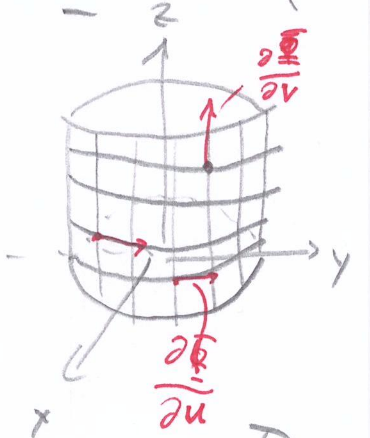
Def: Die Parametrisierung $\underline{\Phi}$ einer Fläche F im $\mathbb{R}^3$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung von einem zusammenhängenden Gebiet $B \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$:

etwa $\underbrace{[a,b]}_{\partial u} \times \underbrace{[c,d]}_{\partial v}$

$$\underline{\Phi}: B \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$$

Bsp: (i) Kreiszylinder mit z-Achse als Symmetrieachse

$$\underline{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{matrix} 0 \le u < 2\pi \\ v \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} B = [0,2\pi) \times \mathbb{R}$$



$\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$: Tangentenvektoren (linear unabhängig!)

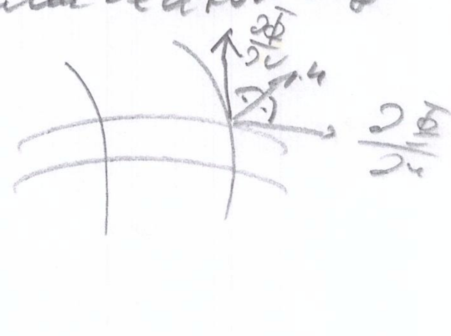
häufig abgekürzt als $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$

(ii) Ebene: $\underline{\Phi}(u,v) = \underline{a} + u\underline{b} + v\underline{c}$, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ const
$u, v \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \underline{b} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u}$, $\underline{c} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$

$\Rightarrow$ Tangentenvektoren liefern den Normalenvektor auf $\underbrace{\text{der Fläche}}_{\text{ggf. gekrümmten}}$

$$\underline{n} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial v}$$



4.8 Flächenintegrale

1. Skalare Funktionen:

Def.: Das (skalare) Oberflächenintegral einer skalaren Funktion f über die von $\underline{\Phi}$ parametrisierte Fläche F ist definiert als:

$$\underbrace{\binom{u}{v}}_{\in B} \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$$

$$\int_F f(\underline{x})\, dA := \int_B f(\underline{x}(u,v)) \underbrace{\left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right|}_{\text{Oberflächenelement}} du\, dv$$

Bsp.: Fläche der Kugel mit Radius R: $4\pi R^2$

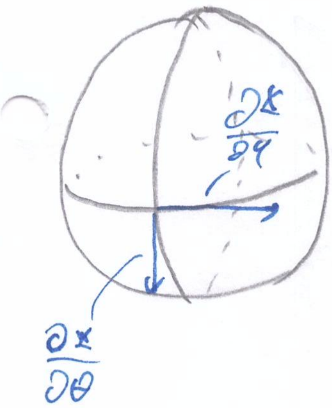
Parametrisierung durch Kugelkoordinaten (s. 2.9.2)

$$\underline{\Phi}: (\theta,\varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$\Rightarrow B = [0,\pi]\times[0,2\pi)$$

$\Rightarrow$ Oberflächenelement:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots =$$



$$= R^2\sin\theta \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ (\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1})\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Länge}=1}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}\right| = R^2\sin\theta$$

$$\Rightarrow dA = \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}\right| d\theta\, d\varphi = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow \text{Oberfläche Kugel} = \int dA = \int_B \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}\right| d\theta\, d\varphi$$

Kugeloberfläche

$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, R^2\sin\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta = 4\pi R^2$$

4.7 Parametrization of areas

$[a,b]\times[c,d]$

- area F : parametrized by $\underline{\Phi}: B \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$$

- tangential vectors: $\dfrac{\partial\underline{\Phi}}{\partial u}, \dfrac{\partial\underline{\Phi}}{\partial v}$

4.8 Integration over areas

- scalar $\left(\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \end{array}\right)$:

$$\int_F f(\underline{x})\,dA = \int_B f(\overbrace{\underline{x}(u,v)}^{\underline{\Phi}(u,v)}) \overbrace{\left|\frac{\partial\underline{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\underline{x}}{\partial v}\right|}^{\left|\frac{\partial\underline{\Phi}}{\partial u}\times\frac{\partial\underline{\Phi}}{\partial v}\right|} du\,dv$$

- recap: spherical coordinates: $r=R$

$$\underline{\Phi}: (\theta,\varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$\Rightarrow B = [0,\pi]\times[0,2\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\underline{x}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\varphi \end{pmatrix} = R\,\underline{\vec{e}}_\theta$$

$$\frac{\partial\underline{x}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = R\sin\theta\,\underline{\vec{e}}_\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\underline{x}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\underline{x}}{\partial\varphi} = \ldots = R^2\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = R^2\sin\theta\,\underline{\vec{e}}_r$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial\underline{x}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\underline{x}}{\partial\varphi}\right| = \ldots = R^2\sin\theta$$

- $\{\underline{\vec{e}}_\theta, \underline{\vec{e}}_\varphi, \underline{\vec{e}}_r\}$: orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ (equivalent to $\underline{\vec{e}}_x, \underline{\vec{e}}_y, \underline{\vec{e}}_z$

Bemerkung: (i) Die Parametrisierung der Kugel liefert auch die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten und somit eine Basis $\{\vec{\underline{e}}_r, \vec{\underline{e}}_\Theta, \vec{\underline{e}}_\varphi\}$ (sogar Orthonormalbasis)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \Theta} \end{pmatrix} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \Theta} = r \begin{pmatrix} \cos\Theta \cos\varphi \\ \cos\Theta \sin\varphi \\ -\sin\Theta \end{pmatrix} = r\vec{\underline{e}}_\Theta$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = r \sin\Theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r \sin\Theta\, \vec{\underline{e}}_\varphi$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \Theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = r^2 \sin\Theta \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos\varphi \\ \sin\Theta \sin\varphi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} = r^2 \sin\Theta\, \vec{\underline{e}}_r$$

(ii) Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten: $\{e$

$$\left.\begin{array}{l} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho \sin\varphi \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varrho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\underline{e}}_\varrho$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \varrho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho\, \vec{\underline{e}}_\varphi$$

$$= \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\underline{e}}_z = \vec{\underline{e}}_\varrho \times \vec{\underline{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

2. Vektorfelder:

Def: Das (vektorielle) Flussintegral eines Vektorfeldes $\underline{v}$ über die durch $\underline{\Phi}: B \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$ parametrisierte Fläche F ist definiert als

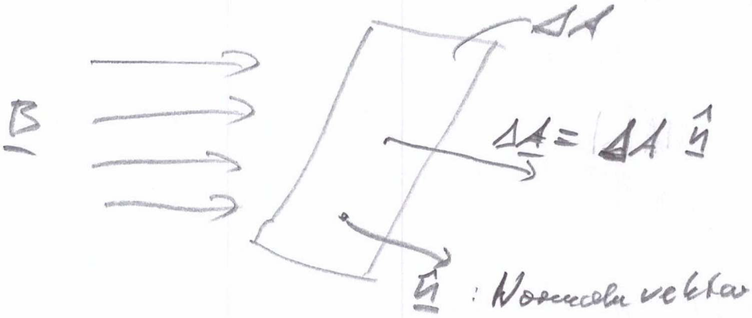
$$\int_F \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{A} := \int_B \underline{v}(\underline{x}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right) du\,dv$$

mit dem vektoriellen Oberflächenelement $d\underline{A} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\, du\,dv$.

hat Richtung!

Achtung: nicht verwechseln mit Parametrisierung $\underline{\Phi}$

Bsp.: (i) Magnetischer Fluss $\Delta\Phi$ durch Fläche ΔA

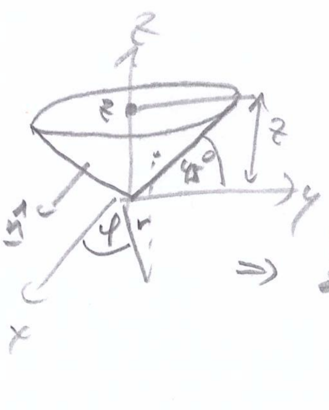


$\underline{\hat{n}}$: Normalenvektor (kann Richtung ändern bei gekrümmten Flächen)

$\Rightarrow$ Gesamtfluss durch Fläche F:

$$\Phi = \int_F d\Phi = \int_F \underline{B} \cdot \underline{\hat{n}}\, dA = \int_F \underline{B} \cdot d\underline{A}$$

(ii) Fluss von $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2y + y^3 \\ x^2 y \end{pmatrix}$ durch $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| z = \sqrt{x^2+y^2},\ z < 2 \right\}$



Parametrisierung von F: $(r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$, $r \in [0,2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}(r,\varphi)) = r^3 \begin{pmatrix} \cos^3\varphi + \cos\varphi \sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi \sin\varphi + \sin^3\varphi \\ \cos^2\varphi \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{v} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial r} \right) = \ldots = r^4 \left(1 - \cos^2\varphi \sin\varphi \right)$$

$$\uparrow$$

$$r^4 \left(\cos\varphi(\cos^3\varphi + \cos\varphi \sin^2\varphi) + \sin\varphi \left(\cos^2\varphi \sin\varphi + \sin^3\varphi \right) - \cos^2\varphi \sin\varphi \right)$$

$$= r^4 \left(\cos^4\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\varphi + \sin^4\varphi - \cos^2\varphi \sin\varphi \right)$$

$$= r^4 \left(\underbrace{\cos^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \sin^2\varphi \underbrace{(\cos^2 + \sin^2\varphi)}_{=1}}_{=1} - \cos^2\varphi \sin\varphi \right)$$

$$= r^4 (1 - \cos^2\varphi \sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \int_F \underline{v} \cdot d\underline{A} = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^4 (1 - \cos^2\varphi \sin\varphi)$$

$$= \int_0^2 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\underbrace{1 - \cos^2\varphi \sin\varphi}_{= 1 - (1 - \sin^2\varphi)\sin\varphi = 1 - \sin\varphi + \sin^3\varphi} \right)$$

$$= \ldots = \frac{64}{5} \pi$$

4.9 Satz von Gauß

Satz: Für ein Flussintegral eines C^1-Vektorfeldes $\underline{v}: \underline{x} \longmapsto \underline{v}(\underline{x})$ über den Rand/die Oberfläche ∂V eines Volumens V gilt:

$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot d\underline{A} = \int_V \operatorname{div}\underline{v}\; dV.$$

Bem.:
- Feldlinien weisen auf Oberfläche ∂V $\Leftrightarrow$ Quellen im Innern (div)
- Notation: Integral über geschlossene Fläche $\int_{\partial V} \to \oint_{\partial V}$
- Elektrostatik: $\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}_{\text{differenzielle Form des Gauß'schen Gesetzes der Elektrostatik}}$ (ρ: Ladungsdichte)

$$\Rightarrow \int_V \underline{\nabla}\cdot\underline{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_V \rho\, dV}_{Q_{innen}}$$

Q_{innen}: Ladung in V

Satz v. Gauß

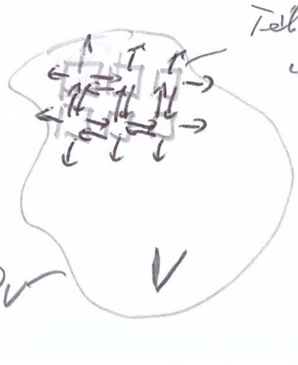
$$\Rightarrow \int_{\partial V} \underline{E}\cdot d\underline{A} = \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0} \quad \text{(integrale Schreibweise)}$$

Idee: (i) Betrachte kleinen Würfel $\underline{X}_W$ mit Volumen ΔV und

Oberfläche ∂V $\Rightarrow$ Der Fluss von $\underline{v}$ aus Würfel:

$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot d\underline{A} \approx \operatorname{div}\underline{v}(\underline{x}_W)\,\Delta V \quad (\underline{v} \approx \text{const. im Würfel})$$

(ii) Betrachte zusammenhängendes Volumen



Der Fluss aus V ist die Summe der Flüsse aus den Teilvolumina V_i am Rand ∂V, weil sich die Flüsse im Innern aufheben.

$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot d\underline{A} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial V_i} \underline{v}\cdot d\underline{A} \approx \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div}\underline{v}(\underline{x}_i)\,\Delta V_i \xrightarrow[n\to\infty]{\Delta V_i \to 0} \int_V \operatorname{div}\underline{v}(\underline{x})\,dV$$

4.10 Satz von Stokes

Satz: Für ein Wegintegral eines C^1-Vektorfeldes $\underline{v}: \underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x})$ über den Rand ∂F einer Fläche F gilt:

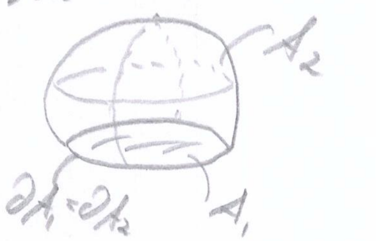
$$\int_{\partial F} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_F \operatorname{rot} \underline{v} \cdot d\underline{A} .$$

Bem: • Notation: ∂F ist geschlossener Weg: $\oint_{\partial F}$

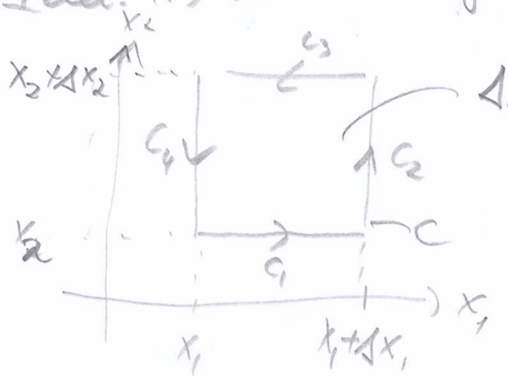
• Zirkulation entlang Flächenrand ∂F $\Leftrightarrow$ Wirbel auf Fläche

• Flächenintegral $\int_F \operatorname{rot} \underline{v} \cdot d\underline{A}$ hängt nur vom Rand ∂F ab:

$$\int_{F_1} \operatorname{rot} \underline{v} \cdot d\underline{A} = \int_{F_2} \operatorname{rot} \underline{v} \cdot d\underline{A}$$



Idee: (i) Betrachte geschlossenen Weg in (x_1, x_2)-Ebene



$\Delta A = \Delta x_1 \Delta x_2$

$$\oint_C \underline{v} \cdot d\underline{s} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (5.1.(2)) $\epsilon \in (0, \Delta x_1)$

$$\int_{C_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_{C_3} \underline{v} \cdot d\underline{s} = v_1(x_1+\epsilon_1; x_2)\,\Delta x_1 - v_1(x_1+\epsilon_1, x_2+\Delta x_2)\,\Delta x_1$$

$$= - \underbrace{\frac{v_1(x_1+\epsilon_1, \cancel{x_2}+\Delta x_2) - v_1(x_1+\epsilon_1, x_2)}{\Delta x_2}}\, \Delta x_1 \Delta x_2$$

$$\underset{\substack{\Delta x_1 \to 0 \text{ also } \epsilon_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}}{=} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)\, \Delta x_1 \Delta x_2$$

$\epsilon_2 \in (0, \Delta x_2)$

$$\int_{C_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_{C_4} \underline{v} \cdot d\underline{s} = v_2(x_1+\Delta x_1, x_2+\epsilon_2)\,\Delta x_2 - v_2(x_1, x_2+\epsilon_2)\,\Delta x_2$$

$$= \underbrace{\frac{v_2(x_1+\Delta x_1, x_2+\epsilon_2) - v_2(x_1, x_2+\epsilon_2)}{\Delta x_1}}_{\Delta x_1 \to 0,\ \Delta x_2 \to 0,\ \epsilon_2 \to 0}\, \Delta x_1 \Delta x_2$$

$$= \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \quad \Delta x_1 \Delta x_2$$

$$\Rightarrow \int_C \underline{v} \circ d\underline{s} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \Delta x_1 \Delta x_2$$

$$= \underbrace{\left(\mathrm{rot}\, \underline{v} \right)_3}_{\substack{\text{Anteil von rot } \underline{v} \\ \text{in Richtung} \\ \text{Flächennormale}}} \underbrace{\Delta x_1 \Delta x_2}_{\text{eingeschlossene Fläche}}$$

(ii) Betrachte Wegintegral entlang ∂F:

Teilfläche F_i mit Rand ∂F_i am Ort $\underline{x}_i$ und Flächennormalen $\hat{\underline{n}}_i$.

Wegintegral entlang ∂F ist Summe der Wegintegrale um F_i am Rand, weil sich Wegintegrale im Inneren aufheben:

$$\oint_{\partial F} \underline{v} \circ d\underline{s} = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\partial F_i} \underline{v} \circ d\underline{s}$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rot}\, \underline{v}(\underline{x}_i) \circ \hat{\underline{n}}_i \underbrace{\Delta x_1 \Delta x_2}_{=\Delta A_i}$$

$$\xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ \Delta A_i \to 0}]{} \int_F \mathrm{rot}\, \underline{v}(\underline{x}) \circ d\underline{A}$$

Parametrization using, e.g., spherical coordinates:

$$\underline{\Phi}: (\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$\hookrightarrow B = [0,\pi] \times [0, 2\pi)$

$\hookrightarrow$ unit vectors: $\{\hat{\underline{e}}_\theta, \hat{\underline{e}}_\varphi, \hat{\underline{e}}_r\}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\underline{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \\ \hat{\underline{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\underline{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{derived via } \frac{\partial \underline{x}}{\partial\theta}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial\varphi}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial\varphi} \text{ and normalization}$$

surface/area element: $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial\varphi} \right| = R^2 \sin\theta$

4.8 Integration over areas

Surface integral of vector fields: $\underline{\Phi}: B \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto \underline{x} = \underline{\Phi}(u,v)$

$$\int_F \underline{v}(\underline{x}) \cdot d\underline{A} := \int_B \underline{v}(\underline{x}(u,v)) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) du\, dv}_{d\underline{A}}$$

4.9 Gauss's theorem (Divergence theorem)

$$\int_{\partial V} \underline{v} \cdot d\underline{A} = \int_V \underbrace{\operatorname{div} \underline{v}}_{\underline{\nabla} \cdot \underline{v}}\, dV$$

flux through closed surface $\leftrightarrow$ divergences (sources) of field enclosed

4.10 Stoke's theorem

$$\int_{\partial F} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_F \underbrace{\operatorname{rot} \underline{v}}_{\underline{\nabla} \times \underline{v}} \cdot d\underline{A}$$

line integral around boundary $\leftrightarrow$ curl over surface

4.11 Partielle Integration

- Erinnerung: Skalare Funktionen: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

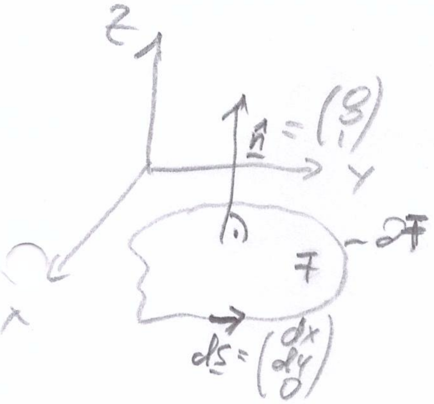
$$\int_a^b f'g \, dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b fg' \, dx$$

- Für Felder (skalar: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vektoriell: $\underline{v} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$) gilt:

$$\int_V \underbrace{\underline{\nabla} \cdot (f \underline{v})}_{\mathrm{div}(f\underline{v})} \, dV \overset{(\text{Kap. } 4.2)}{=} \int_V (\underbrace{\underline{\nabla} f}_{\mathrm{grad} f}) \cdot \underline{v} \, dV + \int_V f (\underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{v}}_{\mathrm{div}\,\underline{v}}) \, dV$$

$$\overset{\text{Satz v. Gauß}}{\Rightarrow} \int_V (\underline{\nabla} f) \cdot \underline{v} \, dV = \underbrace{\int_{\partial V} f \underline{v} \cdot d\underline{A}}_{\text{Randterm}} - \int_V f (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) \, dV$$

4.12 Satz von Green



F: Fläche in (x y)-Ebene

$\underline{v} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \\ v_z \end{pmatrix}$ C^1-Vektorfeld

$$\Rightarrow \int_{\partial F} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_B \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\,dy$$

s. Übungsblatt 9