6 Elemente der linearen Algebra

Wichtig für: - Quantenmechanik
- Mechanik
- Differentialgleichungen
- Fourier-Transformation
- Datenanalyse
- ...

6. Elemente der linearen Algebra

6.1 Lineare Gleichungen
6.2 Vektorräume
6.3 Linearkombinationen, lineare Hülle, Erzeugendensysteme
6.4 Basis eines Vektorraums
6.5 Matrizen als Darstellung linearer Abbildungen
6.6 Matrizenrechnung
6.7 Rang einer Matrix
6.8 Lösen linearer Gleichungssysteme, Gaußsches Eliminationsverfahren
6.9 Invertieren von Matrizen
6.10 Determinate
6.11 Basiswechsel und Koordinatentransformationen
6.12 Eigenwertproblem
6.13 Diagonalisieren von Matrizen
6.14 Orthogonale, unitäre, hermitesche Matrizen

Herausforderung: Lineare Algebra meist 2 volle VL für Mathematiker!
↳ hier: 2-3 Wochen nur!
⇒ Auswahl / Übersicht / Physikbrille

Achtung: viele Definitionen!
↳ Vokabellernen (damit wir uns überhaupt darüber unterhalten können)

Fokus: Intuition, Veranschaulichung, Beispiele, Physik

6.1 Lineare Gleichungen

Def: Lineare Gleichungen $L(u) = v$ sind definiert durch:

$$1)\quad L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$$

$$2)\quad L(\alpha u) = \alpha\, L(u)$$

u_1, u_2, u: Zahlen oder Vektoren

Bsp.: (i) Schwingungsgleichung:

$$\underbrace{\left(m \frac{d^2}{dt^2} + \underbrace{\gamma \frac{d}{dt}}_{\text{Stokesche Reibung}} + k\right)}_{L} x(t) = F(t)$$

(ii) Poisson-Gleichung (etwa in 2D):

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{L} u(x,y) = v(x,y)$$

(iii) Lineares Gleichungssystem:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = y_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = y_2$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(iv) Schrödinger-Gleichung:

$$\underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi}_{L_1 \psi} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi}_{L_2 \psi}$$

(v) Maxwell-Gleichungen:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} B$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \qquad \underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Gegenbeispiel: Newtonsche Reibung:

$$m \ddot{x} + \underbrace{\tilde{\gamma} (\dot{x})^2}_{\text{quadratisch!}} = F(t)$$

$\Rightarrow$ Lineare [illegible]

§.2 Vektorräume

Def: Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt **Vektorraum** über einem Körper $\mathbb{K}$ (meist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), wenn für alle $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

(V1) $\underline{v} + \underline{w} \in V, \ \lambda \cdot \underline{v} \in V$ — Abgeschlossenheit

(V2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ — Assoziativität

(V3) $\exists\, \underline{0} \in V : \underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$ — neutrales Element

(V4) $\exists\, \underline{u}' \in V : \underline{u} + \underline{u}' = \underline{0}$ — inverses Element

(V5) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ — Kommutativität

(V1)–(V5): Abel'sche kommutative Gruppe

(V6) $\lambda \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}$ — Distributivität

(V7) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda \underline{u} + \mu \underline{u}$

(V8) $(\lambda \mu) \cdot \underline{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{u})$

(V9) $1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$

Def: Die Elemente eines Vektorraums heißen **Vektoren**.

↳ Vektoren: mathematische Objekte, die man addieren und mit einem Skalar multiplizieren kann. Existenz von $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \times \underline{w}$ nicht notwendig!

↳ nicht unbedingt nur Pfeile in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Bsp.: (i) $V = \mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \,\middle|\, v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{K} \right\}$ etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(ii) Polynome vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$:

$$V = \{ a_n x^n + \ldots + a_1 x + x_0 \mid a_i \in \mathbb{K} \ \forall i \}$$

(iii) Funktionenräume:

$$V = \{ f : M \to \mathbb{K} \} \text{ mit } f + g : x \mapsto f(x) + g(x), \ \alpha \cdot f : x \mapsto \alpha f(x) \}$$

Def: Eine nichtleere Teilmenge U eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt **Untervektorraum**, wenn für $\underline{u}, \underline{v} \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

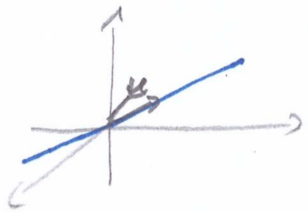
(U1) $\underline{u} + \underline{v} \in U$

(U2) $\lambda \underline{u} \in U$

Bem: Untervektorräume (Teilräume) sind Vektorräume

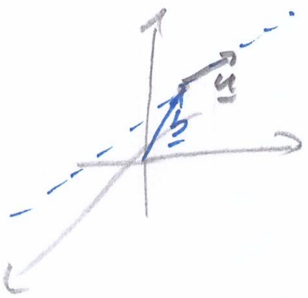
Bsp: (i) Lösungen $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ von $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$ bilden einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

(ii) Gerade im $\mathbb{R}^3$ in Richtung $\underline{u}$: $g = \{ \underline{x} = \underline{u} t \mid t \in \mathbb{R} \}$



Gegenbeispiel: um $\underline{b} \neq \underline{0}$ (nicht parallel) zu $\underline{u}$ verschobene Gerade

$$g' = \{ \underline{x} = \underline{u} t + \underline{b} \mid t \in \mathbb{R} \}$$: kein Untervektorraum!



etwa: $2 \underline{x}(t=0) = 2\underline{b} \notin g'$

$\Rightarrow$ **affiner Teilraum/Unterraum**

6.3 Linearkombinationen, Lineare Hülle (Aufspann), Erzeugendensysteme

Def: Jeder Vektor der Form

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \quad , \alpha_i \in \mathbb{K}$$

heißt Linearkombination der Vektoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$.

Def.: Die Menge aller Linearkombinationen aus $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ heißt ihr Aufspann (lineare Hülle, Erzeugnis): $\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

Bsp.: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ (auch ohne $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$)

↳ Der Aufspann ist ein Teilraum von V.

Def.: Ist $X \subseteq V$ und $\operatorname{span}(X) = U$ ein Teilraum von V
(alle Elemente von U eine Linearkombination von X
$\forall \underline{u} \in U: \underline{u} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \dots + \alpha_n \underline{x}_n \; , \; \underline{x}_i \in X \; , \; \alpha_i \in \mathbb{K}$),
so nennt man X ein Erzeugendensystem von U. (X erzeugt U)

Def.: U heißt endlich erzeugt, wenn U ein endliches Erzeugendensystem hat.

Def.: Die Vektoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ heißen linear unabhängig, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$ folgt: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Andernfalls heißen sie linear abhängig.

Alternativ (i) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für jede echte Teilmenge T von $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ gilt:

$$\operatorname{span}(T) \subsetneq \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

D.h.: T spannt nur einen Teil von $\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ auf.

(ii) linear unabhängig, wenn sich kein $\underline{v}_i$ durch Linearkombination der anderen $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n$ darstellen lässt.

6 Elements of linear algebra

6.1 Linear equations

linear equations $L(u)=v$ with linear operator L:

(i) $L(u+v) = L(u)+L(v)$ (ii) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$

6.2 Vektorspaces (linear spaces)

a non-empty set V with a binary operation $+$ and a binary function $\cdot$ is called a vector space over a field $\mathbb{K}$, if the following holds for all $\underline{v}, \underline{w}, \in V$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

(V1) $\underline{v}+\underline{w} \in V$, $\lambda \cdot \underline{v} \in V$

(V2) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$ (associativity)

(V3) $\exists\, \underline{0} \in V : \underline{u}+\underline{0} = \underline{u}$ (neutral element)

(V4) $\exists\, \underline{u}' \in V : \underline{u}+\underline{u}' = \underline{0}$ (inverse element)

(V5) $\underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u}$ (commutativity)

(V6) $\lambda \cdot (\underline{u}+\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v}$ (distributivity)

(V7) $(\lambda+\mu)\,\underline{u} = \lambda \underline{u} + \mu \underline{u}$

(V8) $(\lambda\mu)\cdot \underline{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{u})$

(V9) $1 \cdot \underline{u} = \underline{u}$

vector: element of a vector space

linear subspace: $U \subset V$ with V $\mathbb{K}$-vectorspace if

for $\underline{u}, \underline{v} \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$: (U1) $\underline{u}+\underline{v} \in U$

(U2) $\lambda\, \underline{u} \in U$

6.3 linear combination, span, generating set

linear combination $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$

span : set of all linear combinations of $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$: $\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

generating set: $X \subseteq V$, $\operatorname{span}(X) = U$: $\forall \underline{u} \in U$: $\underline{u} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \dots + \alpha_n \underline{x}_n$, $\underline{x}_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$

linear independence: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

alternatively: no vector of a set can be written as a linear combination of the other elements

Bsp: (i) $\underline{u}, \underline{v}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\underline{u} = \lambda \underline{v}$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig

(iii) $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}_3} \right\}$ linear unabhängig?

↳ Teste $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\quad + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \end{aligned}\right\} \alpha_1 + 3\alpha_3 = 0$$

$\Rightarrow$ Lösg: $\alpha_2 = \alpha_3 = 1, \alpha_1 = -3$ $\Rightarrow$ linear abhängig!

$\Rightarrow$ $\underline{v}_3 = 3\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ $\Rightarrow$ $\text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} = \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

6.4 Basis eines Vektorraums, Dimension

Def.: Die Menge $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ von Vektoren eines $\mathbb{K}$-Vektorraums heißt **Basis** von V, wenn sich jeder Vektor $\underline{v} \in V$ auf genau eine Linearkombination $\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$ darstellen lässt. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K})$

Die durch $\underline{v}$ eindeutig bestimmten Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ heißen **Koordinaten** von $\underline{v}$ bzgl. der Basis B:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B$$

Satz: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ ist genau dann eine Basis von V, wenn gilt:

- $\text{Span}\, B = V$ (B erzeugt V)
- B ist linear unabhängig.

D.h.: Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei B Basis von V

$\Rightarrow$ Span $B = V$ und alle $\underline{v} \in V$ lassen sich schreiben als

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{b}_n \Rightarrow$ also auch $\underline{v} = \underline{0}$.

mit eindeutigen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ (einzige Lösung)

$\Rightarrow B$ linear unabhängig

"$\Leftarrow$" Sei B linear unabhängiges Erzeugendensystem

Angenommen: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{b}_i$ (2 Darstellungen von $\underline{v}$)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \underline{v}_i = \underline{0}$

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \; \forall i$

$\Rightarrow$ Koordinaten eindeutig (also B ist Basis) $\square$

Bsp: (i) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$

(ii) $B = \{ X^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ ist Basis des Vektorraumes der Polynome

$\mathbb{K}[X] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mid n \in \mathbb{N}_0, a_k \in \mathbb{K} \; \forall k \right\}$

B hat unendlich viele Elemente.

Def: Sei B eine Basis aus n Vektoren eines endlich erzeugten Vektorraumes V. Dann heißt n die **Dimension** von V: $\dim V = n$. Ist V nicht endlich erzeugt, setzen wir $\dim(V) = \infty$

Bsp.: (i) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ (ii) $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$ (iii) $\dim(\mathbb{K}[X]) = \infty$

Satz: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

(Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis) (Basisauswahlsatz)

(Jede linear unabhängige Teilmenge von V kann durch Hinzunehmen weiterer Vektoren zu einer Basis ergänzt werden.)

(Basisergänzungssatz)

Bem: $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension n:

(i) Je n linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis von V.

(ii) Jedes Erzeugendensystem mit n Elementen bildet eine Basis

(iii) Mehr als n Vektoren sind stets linear abhängig.

6.5 Matrizen als Darstellung linearer Abbildungen

Satz: Sei $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die lineare Abbildung L durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

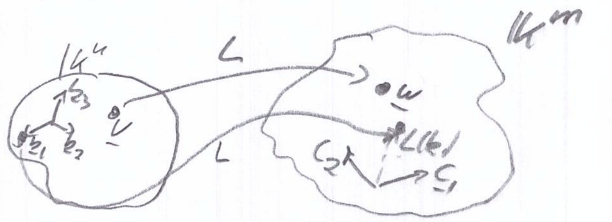
- Alle $\underline{v} \in V$ lassen sich auf genau eine Weise schreiben: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{b}_i$

$$\Rightarrow L(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(\underline{b}_i).$$

- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $\underline{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ geordnete Basis von $\mathbb{K}^n$ (Reihenfolge festgelegt)

$\underline{v} \mapsto \underline{w} = L(\underline{v})$ $\quad \underline{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ —"— von $\mathbb{K}^m$

$$\Rightarrow \underline{w} = \underbrace{L(\underline{b}_1)}_{\text{Bild des 1. Basisvektors}} \alpha_1 + \dots + L(\underline{b}_n)\alpha_n$$



$$\Leftrightarrow w_1 = L(\underline{b}_1)_1 \alpha_1 + \dots + L(\underline{b}_n)_1 \alpha_n$$

$$\vdots$$

$$w_m = \underbrace{L(\underline{b}_1)_m}_{\substack{m\text{-te Koordinate}\\ \text{bzgl. Basis } C \text{ des Bilds}\\ \text{des 1. Basisvektors von } B}} \alpha_1 + \dots + L(\underline{b}_n)_m \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}_C}_{\text{Koordinaten in Basis } C} = \underbrace{\begin{pmatrix} L(\underline{b}_1)_1 & \dots & L(\underline{b}_n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ L(\underline{b}_1)_m & \dots & L(\underline{b}_n)_m \end{pmatrix}}_{= \underline{\underline{A}}\text{: Matrix legt eindeutig die Abbildung } L \text{ fest}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B}_{\text{Koordinaten bzgl. Basis } B}$$

"Zeile mal Spalte"
"Matrix mal Vektor"

Mit $a_{ij} = L(\underline{b}_j)_i \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m$

ergibt sich eine $m \times n$ Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$

$$\Rightarrow \quad \underline{w}_C = \underline{\underline{A}}\, \underline{v}_B$$

↳ l-ter Basisvektor: $\underline{b}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert l-te Spalte von $\underline{\underline{A}}$: $\underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemein:

Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\underline{v} \in V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "k_B"] & \underline{w} \in W \arrow[d, "k_C"] \\
\underline{v}_B \in K^n \arrow[r, "{}_C L_B"] & \underline{w}_C \in K^m
\end{tikzcd}$$

Koordinaten-abbildung

Verknüpfung

darstellende Matrix: ${}_C L_B : K^n \to K^m$ mit ${}_C L_B = k_C \circ L \circ k_B^{-1}$

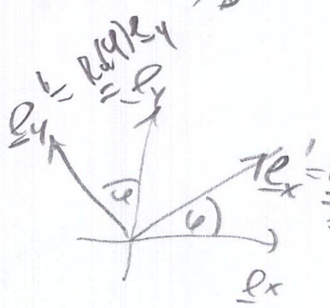
Bsp.: (i) Ableitungsoperator:

$B = \{ p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2 \}$: geordnete Basis des Vektorraums der Polynome mit Grad ≤ 2.

Ableitungsoperator $D = \frac{d}{dx}$ hat Bilder von $p_0, \dots, p_2$:

$D p_0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad D p_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad D p_2 = 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B$

$$\Rightarrow \quad {}_B\underline{\underline{D}}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



(ii) Rotation in $\mathbb{R}^2$ um Winkel φ:

$B = \{ \underline{e}_x, \underline{e}_y \}$ mit $\underline{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \underline{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

$$\left.\begin{aligned} &↳ \underline{e}_x' = \cos\varphi\, \underline{e}_x + \sin\varphi\, \underline{e}_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_B \\ &\underline{e}_y' = -\sin\varphi\, \underline{e}_x + \cos\varphi\, \underline{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad {}_B\underline{\underline{R}}_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

6.6 Matrizenrechnung

$\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}, \underline{\underline{B}} = \{b_{ij}\}, \underline{\underline{C}} = \{c_{ij}\}$ Matrizen

(i) Summe: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) \quad \text{assoziativ}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \quad (\text{kommutativ})$$

(ii) skalare Multiplikation: $(\alpha \underline{\underline{A}})_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad \alpha \in \mathbb{K}$

↳ Matrizen $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ bilden einen Vektorraum der Dimension mn

(iii) Multiplikation

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{m \times n}, \underline{\underline{B}} = \mathbb{K}^{n \times p} \Rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \in \mathbb{K}^{m \times p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \equiv a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, p$$

Bsp.: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & +2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

offenbar $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ (nicht kommutativ)

aber: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$ (distributiv)

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}) \quad (\text{assoziativ})$$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ nur definiert, falls Anzahl Spalten von $\underline{\underline{A}}$ = # Zeilen von $\underline{\underline{B}}$

6.4 Basis and dimension

- $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ is a basis of V if all elements $\underline{v} \in V$ can be written as a unique linear combination of generating set $\underline{B}$:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$$

coordinates

- Theorem: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ basis $\Leftrightarrow$ span $B = V$ and B linearly independent.

- Dimension of V: $\dim V = |B|$ ($|\cdot|$: # elements of B)

basis of V

- Theorem: Every vector space has a basis

  ↳ every generating set contains a basis (reduction)

  ↳ extend linearly independent subsets to basis (extension)

6.5 Matrices as representation of linear maps

Theorem: $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ basis of V, $L: V \to W$ linear map.

Then: L completely/fully determined by images of B.

commuting diagram:

basis of V

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b}_i$$

$$\begin{tikzcd}
\underline{v} \in V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_B"'] & \underline{w} \in W \arrow[d, "K_C"] \\
\underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C L_B"'] & \underline{w}_C \in \mathbb{K}^m_C
\end{tikzcd}$$

coordinate map

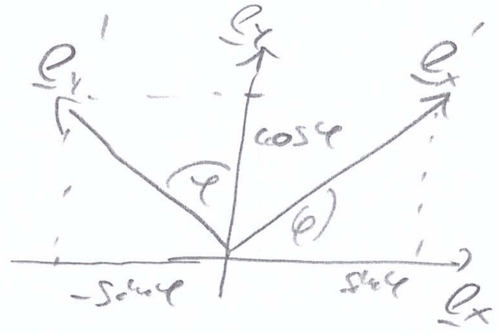
$$\underline{w} = \sum_{j=1}^{m} w_j \underline{c}_j$$

basis of W

transformation matrix $\quad {}_C L_B = K_C \circ L \circ K_B^{-1}$

Rotations in $\mathbb{R}^2$ by angle φ:

$B = \{e_x, e_y\}$ with $e_x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



$$e_x' = \cos e_x + \sin\varphi\, e_y = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}_B$$

$$e_y' = -\sin\varphi\, e_x + \cos\varphi\, e_y = \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}e_x'\\ e_y'\end{pmatrix}_B = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}}_{R_{B=B}} \begin{pmatrix}e_x\\ e_y\end{pmatrix}_B$$

6.6 Matrix calculations

(i) sum: $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(A+B)+C = A+(B+C)$, $A+B = B+A$

(ii) $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$

(iii) $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B = \mathbb{K}^{n\times p}$, $C = \mathbb{K}^{p\times q}$

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}b_{11} & \dots & b_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \dots & b_{np}\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}c_{11} & \dots & c_{1q}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{p1} & \dots & c_{pq}\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow A B = C$ matching dimensions!

$(A+B)C = AC + BC$, but $AB \neq BA$ (most often)

$(AB)C = A(BC)$

$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ or $B = 0$, e.g. $A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

dot product: $\underset{n\times 1}{a} \cdot b = \underset{1\times n}{a^T} b = (a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

$$\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow w = A v$$

$$\left(\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})\right)_{ij} = \sum_k a_{ik} (\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})_{kj}$$
$$= \sum_k a_{ik} \sum_l b_{kl} c_{lj}$$
$$= \sum_l \underbrace{\left(\sum_k a_{ik} b_{kl}\right)}_{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{il}} c_{lj}$$
$$= \left((\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}\right)_{ij}$$

- $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ nicht kommutativ

  Bsp.: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

  $\hookrightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kommutator $[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] := \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$

wichtig in Quantenmechanik

$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \neq 0$

Orts- Impulsoperator

nicht gleichzeitig genau bestimmbar (Heisenbergsche Unschärferel.)

- nicht nullteilerfrei: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$ folgt nicht $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$ oder $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$

  Bsp: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ obwohl $\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{0}}$

- Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$: $\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 \ldots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \underline{a}^T \underline{b} \in \mathbb{R}$

  transponiert

- Matrix mal Vektor = Vektor

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \underline{\underline{A}}\ \underline{u}$$

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k$$

- Matrixmultiplikation: Verkettung von 2 linearen Abbildungen

$$U \xrightarrow{L} V \xrightarrow{M} W$$

Dim	n	m	l
Basis	A	B	C
Matrix	${}_B L_A \in \mathbb{K}^{m\times n}$	${}_C M_B \in \mathbb{K}^{l\times m}$	

$M \circ L : U \to W$

$\underline{u} \in U \mapsto \underline{w} = M(L(\underline{u})) = (M \circ L)(\underline{u}) \in W$

$$\underline{w}_C = {}_C M_B \left({}_B L_A\, \underline{u}_A\right)$$
$$= \underbrace{\left({}_C M_B\, {}_B L_A\right)}_{\in \mathbb{K}^{l\times n}} \underline{u}_A$$
$$= (M \circ L)\ \underline{u}$$

6.7 Rang einer Matrix

lin. Abbildung $L: V \to W$ mit Matrix $\underline{\underline{M}}_L$:

- **Zeilenrang** := # linear unabhängiger Zeilenvektoren
- **Spaltenrang** := # —— " —— Spaltenvektoren

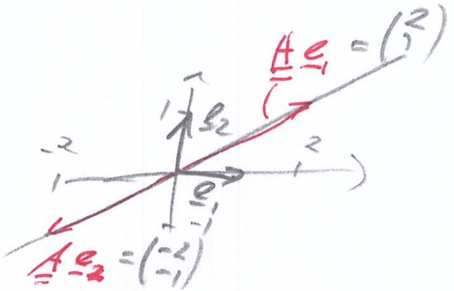
Es gilt: Zeilenrang = Spaltenrang =: Rang der Matrix M_L : rang(M_L)

$\text{Bild}(L) = \{L(\underline{u}) \mid \underline{u} \in V\} \subset W$

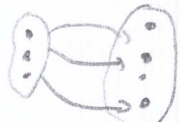
$\Rightarrow \text{rang}\, M_L = \dim(\text{Bild}(L))$

Bsp: (i) $\text{rang} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}}_{=3} = 2$ lin. abhängig

(ii) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow \text{rang}\, \underline{\underline{A}} = 1$



- $L: K^n \to K^m$ **injektiv** $\Leftrightarrow \text{rang}\, \underline{\underline{M}}_L = n$

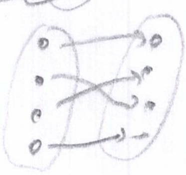


linkseindeutig

- $L: K^n \to K^m$ **surjektiv** $\Leftrightarrow \text{rang}\, \underline{\underline{M}}_L = m$

jedes Element hat ein Urbild

- $L: K^n \to K^m$ **bijektiv** $\Leftrightarrow n = m = \text{rang}(\underline{\underline{M}}_L)$



- $\underline{\underline{A}}^T$ **(Transponierte)** von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $(\underline{\underline{A}}^T)_{ij} = a_{ji} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T \in \mathbb{R}^{n\times m} \Rightarrow \text{rang}\, \underline{\underline{A}} = \text{rang}\, \underline{\underline{A}}^T$

- $\underline{\underline{C}}^+$ **(Adjungierte von** $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{C}^{m\times n}$**)**: $(\underline{\underline{C}}^T)_{ij} = c^*_{ji} \Rightarrow \text{rang}\, \underline{\underline{C}} = \text{rang}\, \underline{\underline{C}}^+$

- Wenn $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}$: **orthogonal** $\underline{\underline{A}}$

- wenn $\underline{\underline{C}}^+ = \underline{\underline{C}}^{-1}$: **unitär** $\underline{\underline{C}}$

6.7 Rank of a matrix

linear map $L: V \to W$ with representing matrix $\underline{\underline{M}}_L$

- column rank: number of linearly independent columns
- row rank: — " — rows

$\hookrightarrow$ row rank = column rank = rang $(\underline{\underline{M}}_L) \equiv$ rank $(\underline{\underline{M}}_L)$

- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ injective $\Leftrightarrow$ rank $\underline{\underline{M}}_L = n$ (full column rank)
  (one-to-one)
  $\underline{\underline{M}}_L = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$
- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ surjective $\Leftrightarrow$ rank $\underline{\underline{M}}_L = m$ (full row rank)
  (onto/full image)
- $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bijective $\Leftrightarrow$ rank $\underline{\underline{M}}_L = m = n$

- transposed matrix: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ with $(\underline{\underline{A}}^T)_{ij} = a_{ji}$
  rank $\underline{\underline{A}}^T$ = rank $\underline{\underline{A}}$

- adjoint matrix: $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{C}^{m\times n} \Rightarrow \underline{\underline{C}}^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times m}$ with $(\underline{\underline{C}}^\dagger)_{mn} = a_{nm} - ib_{nm}$
  $\underline{\underline{C}}^\dagger = (\underline{\underline{C}}^*)^T = (\underline{\underline{C}}^T)^* = \underline{\underline{C}}^H \leftarrow$ Hermitian

- orthogonal matrix: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ with $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{1}}$

- unitary matrix: $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ with $\underline{\underline{C}}^\dagger \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{C}}^\dagger = \underline{\underline{1}}$

6.8 Lösen linearer Gleichungssysteme (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Löse: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\underline{x} \in \mathbb{K}^{n}$, $\underline{b} \in \mathbb{K}^{m}$

(m Gleichungen mit n Unbekannten)

Bsp.:
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Schritt 1: Zeilen vertauschen, sodass oben links $a_{11} \neq 0$ (hier ok)

Schritt 2: Stufenform herstellen (durch Äquivalenzumformungen)

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \mathrm{II}':\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}':\ \mathrm{III}-3\,\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathrm{III}' - 3\,\mathrm{II}' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Normierung der Zeilen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 4: Rückwärts einsetzen

$x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = -2x_3 = -6$, $x_1 = 2 - 3x_3 - 2x_2 = 5 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(Test, ob's stimmt!)

Lösbarkeit: für $m = n$:

(i) $\operatorname{rang} \underline{\underline{A}} = n$: $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{K}^n \Rightarrow$ Lösung existiert und ist eindeutig

(ii) $\operatorname{rang} \underline{\underline{A}} < n$: – Lösungsmenge (Gerade / Ebene) falls $\underline{b} \in \operatorname{Bild}(A)$

– Kein Lösung, falls $\underline{b} \notin \operatorname{Bild}(\underline{\underline{A}})$

Bsp: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow s := x_3$, $x_2 = -2s$, $x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3$
$= 2 - s$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge: $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $s \in \mathbb{R}$

6.9 Invertieren von Matrizen

Lösen von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ per inverse Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$, sodass

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}}_{\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

Def: Eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt invertierbar (regulär), falls eine Matrix $\underline{\underline{B}}$ existiert mit $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

B ist eindeutig bestimmt und heißt Inverse zu $\underline{\underline{A}}$: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$

- $(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$
- $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ invertierbar: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})(\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^{-1})\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \mathbb{1}$$

- $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar $\Leftrightarrow$ rag $\underline{\underline{A}} = n$

Cramersche Regel

- allgemein: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ Falls $ad-bc \neq 0$: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Bsp: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Test $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar (rag $\underline{\underline{A}} = 1$)

(iii) $\underline{\underline{R}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{R}}(\alpha)^{-1} = R(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Rotationsmatrix

da $R(\alpha)\underline{\underline{R}}(\alpha) = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Wie geht Invertieren allgemein?

$$\left(\underline{\underline{A}}\,\middle|\,\underline{\underline{1}}\right) \Longrightarrow \left(\underline{\underline{1}}\,\middle|\,\underline{\underline{A}}^{-1}\right)$$

↑ Umformen nach Gauß'schem Verfahren (links wie rechts)

Bsp.: (i)

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II}: \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{I}' = \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \mathrm{II}' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{I}'' \\ \mathrm{II}'' = \mathrm{II}' - 2\mathrm{I}' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{I}''' \\ \mathrm{II}''' = -\mathrm{II}'' \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{I}''' - 3\mathrm{II}''' \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Test} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+16 & 24-24 \\ -10+10 & 16-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.10 Determinante

"alternierende Multilinearform auf Spaltenvektoren"

Def.: Gegeben sei $\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \in K^{n\times n}$.

Für $n=1$: $\underline{\underline{A}} = a_{11}$ definieren wir $\det \underline{\underline{A}} = a_{11}$ als **Determinante**

Für $n \geq 2$: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(\underline{\underline{A}}_{i1})$

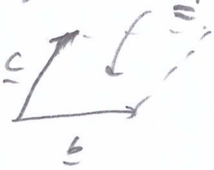
Achtung! nicht $(\underline{\underline{A}})_{ij} = a_{ij}$

wobei $\underline{\underline{A}}_{ij}$ hervorgeht aus $\underline{\underline{A}}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte

$\underline{\underline{A}}_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{A}}_{21} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix}$

Bsp.: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $n=2 \Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = a_{11} \underbrace{\det(\underline{\underline{A}}_{11})}_{= \det a_{22} = a_{22}} - a_{21} \underbrace{\det(\underline{\underline{A}}_{21})}_{= \det a_{12} = a_{12}}$

$\underline{b} \quad \underline{c}$ Fläche



$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$

(ii)
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 4 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5)$$

$$= -3 \quad -4 \, (-6) \quad +7 \, (-3)$$

$$= -3 \quad +24 \quad -21$$

$$= 0$$

(iii) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$

(iv) $\det(\mathbb{1}_n) = 1$

• $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$\underline{b} \quad \underline{c} \quad \underline{d}$

(Sarrus-Regel)

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

$\det \underline{\underline{A}} = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{d})$

falls $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lin. abhängig

Eigenschaften: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(i) $\det \underline{\underline{A}}^T = \det \underline{\underline{A}}$

(ii) $\det \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$

(iii) $\det \underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$

(iv) $\det \underline{\underline{A}} = 0 \iff \operatorname{rang} \underline{\underline{A}} < n$, $\underline{\underline{A}}$ singulär

$\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \iff \operatorname{rang} \underline{\underline{A}} = n$, $\underline{\underline{A}}$ regulär (invertierbar)

(v) Entwicklung nach beliebiger Zeile oder Spalte:

r-te Zeile: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det \underline{\underline{A}}_{rs}$ $\in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

s-te Spalte: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det \underline{\underline{A}}_{rs}$

Bsp.: $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} = 0$, klar, weil $2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rang} \underline{\underline{A}} = 2$

↳ Spaltenvektoren (Bilder der Basisvektoren) spannen nur eine Ebene auf ⇒ Volumen 0.

6.8 Systems of linear equations (Gaussian elimination)

Solve $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ by transforming $\underline{\underline{A}}$ to row echelon form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \longrightarrow \dots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & * & \tilde{b}_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots\, 0 & 1 & \tilde{b}_m \end{array}\right)$$

Does a solution $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ exist for $m = n$?

(i) $\operatorname{rank} \underline{\underline{A}} = n$: $\operatorname{image}(\underline{\underline{A}}) = \mathbb{K}^n \Rightarrow$ unique solution exists.

(ii) $\operatorname{rank} \underline{\underline{A}} < n$: solution exists (but is not unique) if $\underline{b} \in \operatorname{image}(\underline{\underline{A}})$

— " — does not exist if $\underline{b} \notin \operatorname{image}(\underline{\underline{A}})$

6.9 Inverse matrix

Solution of $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ given by $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$ with $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \mathbb{1}$

Def.: A square matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ is called invertible if a matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ exists with $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \mathbb{1}$.

condition: $\operatorname{rank} \underline{\underline{A}} = n \Leftrightarrow \det \underline{\underline{A}} \neq 0$

- $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ Cramer's rule (if $ad-bc \neq 0$)
- Find inverse $\underline{\underline{A}}^{-1}$ by transforming

$$(\underline{\underline{A}}\,|\,\mathbb{1}) \longrightarrow (\mathbb{1}\,|\,\underline{\underline{A}}^{-1})$$

6.10 Determinant

Def: $\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

remove i-th row, j-th column

We define: for $n=1$: $\det \underline{\underline{A}} = a_{11}$

for $n \geq 2$: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(\underline{\underline{A}}_{i1})$

$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det(\underline{\underline{A}}_{rs})$ $\in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$

$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+s} a_{rs} \det(\underline{\underline{A}}_{rs})$

- Sarrus rule : $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$- \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$

- $\det \underline{\underline{A}}^T = \det \underline{\underline{A}}$
- $\det \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$
- $\det \underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$
- $\det \underline{\underline{A}} = 0 \iff \mathrm{rank}\,\underline{\underline{A}} < n$ (singular)
- $\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \iff \mathrm{rank}\,\underline{\underline{A}} = n$ (regular)

ex. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$ columns linearly dependent

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- $\det \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{d})$ (triple product)

6.11 Basiswechsel und Koordinatentransformation

Betrachte $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Basen $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$, $C=\{\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n\}$

$$\Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \underline{c}_i$$

derselbe Vektor in 2 Koordinatensystemen: $\underline{v}_B = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}_B$, $\underline{v}_C = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}$

Transformationsmatrix: $\underline{v}_C = \underbrace{{}_C\underline{\underline{M}}_B(\mathrm{id}_V)}_{\text{darstellende Matrix der Identitätsabbildung}} \underline{v}_B =: \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{v}_B$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "k_B"'] & V \arrow[d, "k_C"] \\
\underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C\underline{\underline{M}}_B(\mathrm{id}_V)"'] & \underline{v}_C \in \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$${}_C\underline{\underline{M}}_B(\mathrm{id}_V) = \Big(\underbrace{(\underline{b}_1)_C, \dots, (\underline{b}_n)_C}_{\substack{\text{Bilder der Basisvektoren von } B \\ \text{bzgl. Basis } C}}\Big) \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Nun: $L: V \to V$, $\underline{u} \mapsto \underline{v}$ lineare Abbildung (statt Identität id_V)

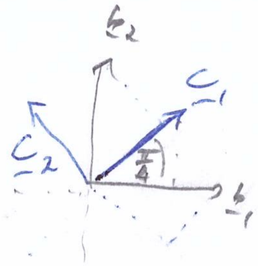
$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "k_B"'] & V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "k_B"] & V \arrow[d, "k_C"] \\
\underline{u}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_B\underline{\underline{L}}_B"'] & \underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C\underline{\underline{M}}_B(\mathrm{id}_V) \,=\, \underline{\underline{S}}^{-1}"'] & \underline{v}_C \in \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{\underline{v}_B \overset{!}{=} {}_B\underline{\underline{L}}_B\, \underline{u}_B}$$

$$= \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{v}_B = \underline{\underline{S}}^{-1}\, {}_B\underline{\underline{L}}_B\, \underline{u}_B \Leftrightarrow \underline{v}_C = \overbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\, {}_B\underline{\underline{L}}_B}^{{}_C\underline{\underline{L}}_B}\, \underline{u}_B$$

$$\underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\,\underline{v}_B}_{\underline{v}_C} = \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\,{}_B\underline{\underline{L}}_B\,\underline{\underline{S}}}_{{}_C\underline{\underline{L}}_C}\;\underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\,\underline{u}_B}_{\underline{u}_C}$$

Bsp.: $\mathbb{R}^2$ mit $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ und $C=\{\underline{c}_1,\underline{c}_2\}$ um $\frac{\pi}{4}$ gedreht



$$\Rightarrow (\underline{c}_1)_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\underline{b}_1}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\underline{b}_2}\Bigg],\quad (\underline{c}_2)_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}_{-\underline{b}_1}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\underline{b}_2}\Bigg]$$

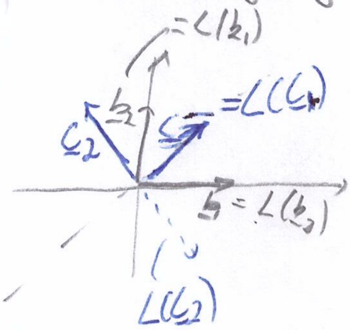
$$\Rightarrow {}_C\underline{\underline{M}}_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix} =: \underline{\underline{S}}^{-1}$$

Basistransformationsmatrizen

$$(\underline{b}_1)_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad (\underline{b}_2)_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_C \Rightarrow {}_B\underline{\underline{M}}_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\left[\;\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\;\right]$$

L: Spiegelung an Diagonalen $y=x$



$$\left.\begin{aligned}L(\underline{b}_1) &= \underline{b}_2\\ L(\underline{b}_2) &= \underline{b}_1\end{aligned}\right\}\quad {}_B\underline{\underline{L}}_B = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}{}_C\underline{\underline{L}}_C &= \underline{\underline{S}}^{-1}\,{}_B\underline{\underline{L}}_B\,\underline{\underline{S}}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}_{\text{schön, einfach}}\end{aligned}$$

$\leftarrow \underline{c}_1$ auf sich selbst ✓

$\leftarrow \underline{c}_2$ auf $-\underline{c}_2$ ✓

$$L : V \to W$$
$$\underline{v} \mapsto \underline{w}$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, dash] \arrow[d, "K_A"] & V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "K_B"] & W \arrow[r, "id_W"] \arrow[d, "K_C"] & W \arrow[d, "K_D"] \\
\underline{v}_A \in \mathbb{K}^n & \underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[l, "\underline{\underline{T}}^{-1}"] \arrow[r, "\underline{\underline{L}}_{CB}"] & \underline{w}_C \in \mathbb{K}^m \arrow[r, "\underline{\underline{S}}^{-1}"] & \underline{w}_D \in \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$$\underline{v}_B = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{v}_A$$

$$\underline{v}_A = \underline{\underline{T}}\, \underline{v}_B$$

$$\underline{w} = L(\underline{v})$$

$$\Leftrightarrow \underline{w}_C = \underline{\underline{L}}_{CB}\, \underline{v}_B$$

$$\underline{w}_D = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{w}_C$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{w}_C = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{L}}_{CB}\, \underline{v}_B \qquad \left(\underline{w}_D = \underline{\underline{L}}_{DB}\, \underline{v}_B\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{w}_D = \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{L}}_{CB}}\, \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{T}}\, \underline{v}_B}$$

Transformation $B \to A$

$$\Leftrightarrow \underline{w}_D = \underline{\underline{L}}_{DA}\, \underline{v}_A$$

Berücksichtige Koordinatenänderung $B \to A$ bei L

darstellende Matrix von L bzgl Basen A und D

6.12 Eigenwertproblem

Frage/Idee: Finde Basis, für die eine gegebene Matrix Diagonalform bekommt

$$_B\underline{\underline{L}}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow {}_B\underline{\underline{L}}_B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ \lambda_n v_n \end{pmatrix}$$

Def: Sei $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert** von $\underline{\underline{A}}$, wenn es Vektor $\underline{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\underline{0}\}$ gibt mit $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$.

$\underline{v}$ heißt **Eigenvektor** zum Eigenwert λ.

Der Untervektorraum $Eig_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \{ \underline{v} \in \mathbb{K}^n \mid \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v} \}$ heißt **Eigenraum** zum Eigenwert λ.

Berechnung: Suche $\lambda, \underline{v} \neq \underline{0}$ mit $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} - \lambda \underline{\underline{1}}_n \underline{v} = \underline{0}$

$$\Leftrightarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}_n)\, \underline{v} = \underline{0}$$ lineares Gleichungssystem!

$\Rightarrow$ nichttriviale Lösung ($\underline{v} \neq \underline{0}$), wenn $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}_n) = 0$

Def: $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = \det(\underline{\underline{A}} - x \underline{\underline{1}}_n)$ heißt **charakteristisches Polynom** von $\underline{\underline{A}}$.

Es gilt: λ ist Eigenwert von $\underline{\underline{A}} \Leftrightarrow \chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = 0$ (Nullstelle von $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x)$)

$\underbrace{\phantom{\chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)}}_{=\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}})}$

Bsp.: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: λ Eigenwert $\Leftrightarrow |\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$: $(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{1}})\underline{v}_1 = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow v_1^{(1)} = v_2^{(1)} \Rightarrow Eig_{\underline{\underline{A}}}(1) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$: $(\underline{\underline{A}} + 1\,\mathbb{1})\,\underline{v}_2 = \underline{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} +1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1^{(2)} = -v_2^{(2)}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow Eig_{\underline{\underline{A}}}(-1) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

(ii) Rotation um $\frac{\pi}{4} = \varphi$ (also 45°)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} \chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = |\underline{\underline{A}} - \lambda\,\mathbb{1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2}$$

keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, aber $\mathbb{C}$: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

- Im Komplexen ($\underline{\underline{A}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$) faktorisiert: $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = (\lambda_1 - x)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - x)^{k_r}$

  mit $k_1 + \ldots + k_r = n$.

  k_i heißt algebraische Vielfachheit

- $\dim Eig_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$ heißt geometrische Vielfachheit.

  $\dim Eig_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) > 1$: λ ist entartet.

6.11 Coordinate transformation (change of basis)

$\mathbb{K}$ vector space V with 2 basis sets: $B=\{\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n\}$, $C=\{\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n\}$

$$\Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \underline{c}_i \Leftrightarrow \underline{v}_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

coordinates w.r.t. B and C, resp.

- transformation matrix: $\underline{v}_C = {}_C\underline{\underline{M}}_B\, \underline{v}_B =: \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{v}_B$ given by

$$ {}_C\underline{\underline{M}}_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ (\underline{b}_1)_C & \cdots & (\underline{b}_n)_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

- $L: V \to V$ linear map:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\kappa_B"] & V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "\kappa_B"] & V \arrow[d, "\kappa_C"] \\
\underline{u}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_B\underline{\underline{L}}_B"'] & \underline{v}_B \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_C\underline{\underline{M}}_B = \underline{\underline{S}}^{-1}"'] & \underline{v}_C \in \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_B = {}_B\underline{\underline{L}}_B\, \underline{u}_B$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{v}_B = \underline{\underline{S}}^{-1}\, {}_B\underline{\underline{L}}_B\, \overbrace{\underline{\underline{S}}\, \underline{\underline{S}}^{-1}}^{\mathbb{1}}\, \underline{u}_B$$

$$\underline{v}_C = {}_C\underline{\underline{L}}_C \qquad \underline{u}_C$$

6.12 Eigenvalue problem

- $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $\Rightarrow$ $\lambda \in \mathbb{K}$ eigenvalue of $\underline{\underline{A}}$ if $\underline{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\underline{0}\}$ exists with

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

($\underline{v}$: Eigenvektor)

- subspace $Eig_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \{\underline{v} \in \mathbb{K}^n \mid \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}\}$: eigenspace (Eigenvektorraum)

- characteristic polynomial: $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}})$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

- λ eigenvalue of $\underline{\underline{A}}$ $\Leftrightarrow$ $\chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = 0$

- $\chi_{\underline{\underline{A}}}(x) = \underbrace{(\lambda_1 - x)^{k_1} \cdots (\lambda_r - x)^{k_r}}_{\text{factorization of } \chi_{\underline{\underline{A}}}}$ with $k_1 + \ldots + k_r = n$

- k_i : algebraic multiplicity

- $\dim Eig_{\underline{\underline{A}}}(\lambda)$: geometric multiplicity

- $\dim Eig_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) > 1$: λ is called degenerate (entartet).

Bsp.: (i) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ mit $\dim \mathrm{Eig}_A(\lambda) = \mathbb{R}^2$

(ii) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -\lambda(2-\lambda)+1$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$$
$$= (\lambda-1)^2 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Aber $\underline{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ ist einziger Eigenvektor

Test: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0}$

6.13 Diagonalisieren

$L: V \to V$ mit Matrix ${}_C\underline{\underline{L}}_C$ bzgl. Basis C

Aufsuchen Basis $\underline{B} = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ aus Eigenvektoren von ${}_C\underline{\underline{L}}_C$

$${}_C\underline{\underline{L}}_C \, \underline{b}_i = \lambda_i \underline{b}_i$$

$\Rightarrow {}_B\underline{\underline{L}}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ Diagonalform.

Bilden die Eigenwerte

Test: $\left({}_B\underline{\underline{L}}_B\right)_{ij} = \left(\underline{\underline{S}}^{-1} \, {}_C\underline{\underline{L}}_C \, \underline{\underline{S}}\right)_{ij}$

$$= \sum_k (S^{-1})_{ik} \sum_l ({}_C\underline{\underline{L}}_C)_{kl} \underbrace{S_{lj}}_{(\underline{b}_j)_{C,l}}$$

$$= \sum_k (S^{-1})_{ik} \sum_l ({}_C\underline{\underline{L}}_C)_{kl} (\underline{b}_j)_{C,l}$$

$$= \sum_k (\underline{\underline{S}}^{-1})_{ik} \; \lambda_j \underbrace{(\underline{b}_j)_{C,k}}_{(\underline{\underline{S}})_{kj}} \qquad \underline{\underline{S}} = \left((\underline{b}_1)_C \; \dots \; (\underline{b}_n)_C \right)$$

$$= \lambda_j \sum_k \underbrace{(\underline{\underline{S}}^{-1})_{ik} \; (\underline{\underline{S}})_{kj}}_{\delta_{ij}}$$

$$= \lambda_j \delta_{ij}$$

Def: Eine Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *diagonalisierbar*, wenn eine invertierbare Matrix $\underline{\underline{S}}$ existiert, sodass $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{S}}$ Diagonalform hat.

Satz: $\underline{\underline{A}}$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren.

(Basistransformationsmatrix $\underline{\underline{S}} = (\underline{b}_1 \dots \underline{b}_n)$)