

Vektoren

Definition: Vektor

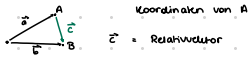
Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraumes. In einem zu einem K -Vektorraum K^n gehörenden n -dimensionalen Koordinatensystem kann ein Vektor durch n Komponenten dargestellt werden, die in einer Zeile oder Spalte aufgeführt werden.

K : Körper z.B. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Spaltenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, Zeilenvektor $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $a_i, b_i \in K$, $\vec{a}, \vec{b} \in K^n$

Jeder Vektor kann einem Punkt im Raum eindeutig zugeordnet werden. Zu diesem Punkt ist der Vektor der Ortsvektor.

$$\vec{a} \rightarrow A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$



Rechenregeln

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad c_i = (\vec{a} + \vec{b})_i = a_i + b_i$$

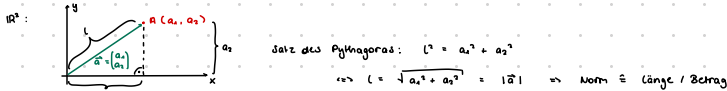
$$\text{Multiplikation mit Skalar (= Zahl): } \lambda \vec{a} = \vec{b} \quad b_i = (\lambda \vec{a})_i = \lambda a_i, \quad \lambda \in K$$

Produkte

$$\text{Skalarprodukt: } \vec{a} \in K^n, \vec{b} \in K^n \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \in K$$

$$\text{Spezialfall: } \vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\text{Daher definieren wir die „euklidische Norm“ } |\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \geq 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^n$$



$$\text{Normierung: } \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \rightarrow \text{Länge} = 1$$

$$\text{Beweis: } \left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \sqrt{\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$

$$\text{Winkelformel: } \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{Rechenregeln: Distributivgesetz } \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\text{Assoziativgesetz } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\text{Assoziativ? } \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \stackrel{?}{=} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\text{Kreuzprodukt: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in K^n$$

geometrisch: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, \vec{b}$, Beweis ÜB

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

$$\text{Rechenregeln: NICHT assoziativ, } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

$$\text{Antikommutativ: } \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\text{Distributivgesetz: } \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$