

Matrizen

Definition: Matrix.

Eine Matrix A mit Koeffizienten in einem Körper K ist ein rechteckiges Schema von endlich vielen Zahlen, also:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennen wir $(m \times n)$ -Matrix $\in K^{m \times n}$. Den Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte bezeichnen wir mit a_{ij} .

Rechenregeln: $A + B = C$, $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \rightarrow$ elementweise Addition

$$\mathcal{L}A = B \quad , \quad b_{ij} = \mathcal{L}a_{ij}$$

Matrixmultiplikation: $A \cdot B = C$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, nur möglich wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times n} \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Assoziativgesetz $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

z.B. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 8 & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot 8 & \end{pmatrix}$

elementare Umformungen: - Addieren / Subtrahieren von Zeilen

- Multiplizieren Zeile mit Skalar

- Vertauschen von Zeilen

Lineares Gleichungssystem als Matrix:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

LG5 lösen mit Gauß-Verfahren:

Beispiel:

I	$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$
II	$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$
III	$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{I}]{\text{II} - \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} - 2 \cdot \text{I}]{\text{III} - \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} + \text{II}]{\text{III} - \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array} \right)$$

Hier muss alles
= 0 sein!

$$\Rightarrow I, x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$\text{III. } -4x_3 = 2 \quad (\times) \quad x_3 = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = 1 \Rightarrow \pi = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow T = x_1 + \frac{4}{x_1} + 2 \cdot \left(\frac{4}{x_1} \right) =$$

$$\rightarrow \text{I} \quad x_4 + \frac{4}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{2}\right) = x_4 - \frac{4}{2} = 1 \quad (\text{we}) \quad x_4 = \frac{3}{2}$$

Definition: Die Matrix $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ist die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Definition: Inverse Matrix

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratisch, so ist es möglich, dass A eine Inverse A^{-1} besitzt mit $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1} \rightarrow A\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow A^{-1}\vec{y} = \vec{x}$

Verfahren: z.B. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$