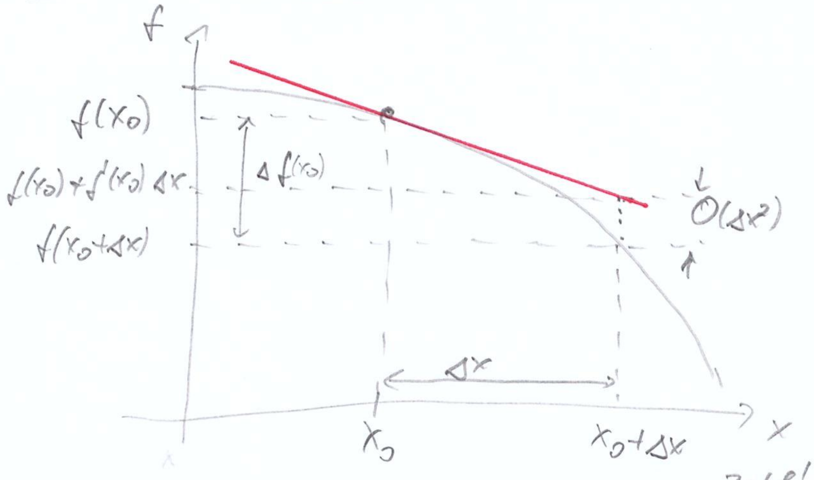
1.2 Lineare Näherung einer Funktion (Ableitung)



Ziel: Näherung von $f(x_0+\Delta x)$ bei bekanntem $f(x_0)$, so dass der Fehler von der Ordnung $O(\Delta x^2)$ ist.

Landau-Symbol
„wächst höchstens wie Δx^2"
(asymptotische obere Schranke)

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)}^{\text{Zahl!}}\,\Delta x + O(\Delta x^2)}$$

Weiter mit Definition $\Delta f(x_0) \underbrace{:=}_{\text{„definiert als"}} f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ folgt:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x^2)$$ (falls eine solche Funktion $f'(x)$ existiert)

Def.: 1) Die Funktion $f'(x)$ heißt **erste Ableitung** von $f(x)$. Man erhält sie aus dem **Differenzenquotienten**:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \underbrace{\left(-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x}\right)}_{=0}$$

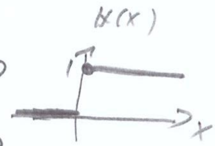
2) f heißt **differenzierbar** bei x_0, wenn $f'(x_0)$ existiert.
(beidseitiger Grenzwert!)

1.VL

16.10

2.VL

Gegenbeispiel: **Heaviside-Stufenfunktion** $H(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



$\Rightarrow$ H ist nicht differenzierbar bei $x_0=0$

Notation in der Physik: (i) $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$

bzw. $f'(x) = \frac{df}{dx}$ ← Ableitungsvariable

(ii) bei Ableitung nach der Zeit t schreibt man häufig: $f(t)$, $\dot f(t) = \frac{df}{dt}$

Bsp: $z(t) \Rightarrow \dot z(t) = \frac{dz}{dt}$

1.4 Ableitungsregeln

Siehe Definitionen_TPIa_WS24.pdf

Seien f, g, h differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

1. ***Linearität:*** Für $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
$$(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

Die Ableitung ist also ein linearer Operator

2. ***Produktregel:***
$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

3. ***Kettenregel:*** Für $h(x) = f(g(x))$ gilt:
$$h(x)' = f'(g(x))\,g'(x).$$

$$= \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

4. ***Quotientenregel:***
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.$$

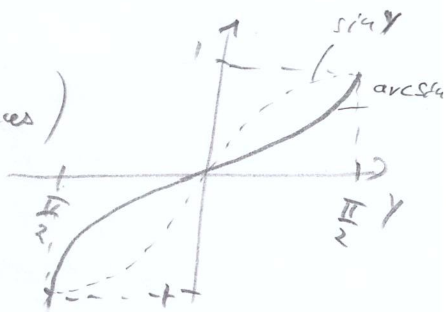
5. ***Ableitung einer inversen Funktion:*** Für eine invertierbare Funktion $f(x)$, d.h. $x = f^{-1}(y)$, gilt:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} f^{-1}(y) = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}\right|_{x=f^{-1}(y)}}.$$

Bsp: (i) 3. Kettenregel: $f(x) = \sin^2(x^2) = f(g(x))$ mit $f(y) = y^2$, $g(x) = \sin(x^2)$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2\sin(x^2)}_{\frac{df}{dy}} \underbrace{\frac{d}{dx}\sin(x^2)}_{\frac{dg}{dx}} = 2\sin(x^2)\,\underbrace{\cos(x^2)\,2x}$$

(ii) 5. Ableitung einer inversen Funktion:

$f(x) = y = \sin x \;\Rightarrow\; x = \arcsin y$ (Arkussinus)



(Spiegelung von $\sin x = y$ Diagonalen $x = y$)

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\arcsin y = \frac{1}{\left.\frac{d\sin x}{dx}\right|_{x=\arcsin y}}$$

$$= \frac{1}{\cos x|_{x=\arcsin y}}$$

$$\overset{\uparrow\; 1=\sin^2 x+\cos^2 x}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}\,\Big|_{x=\arcsin y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

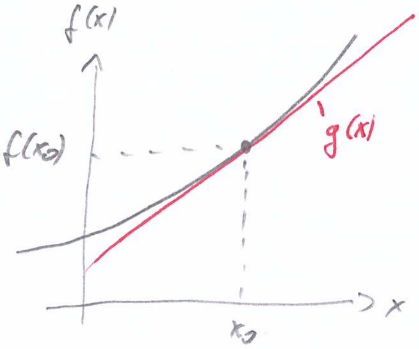
1.5 Wichtige Ableitungen

- $(\text{const})' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z})$
- $(x^a)' = ax^{a-1} \quad (x > 0,\quad a \in \mathbb{R})$ $\rightarrow f(x) = \sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = (\ln a)\, a^x \quad (a > 0)$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\quad x \neq (\frac{1}{2} + n)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ (Nullstellen von $\cos x$)
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
- $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$
- $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

1.6 Taylor-Entwicklung

Ziel: Näherung einer Funktion durch ein Polynom

- lineare Näherung: $f(x) = \underbrace{f(\overset{\substack{\text{Entwicklungspunkt}\\ \downarrow}}{x_0}) + f'(x_0)(x-x_0)}_{g(x)} + O((x-x_0)^2)$

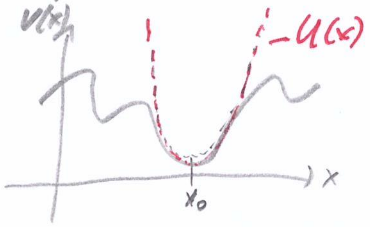


$\Rightarrow g(x_0) = f(x_0)$ und $g'(x_0) = f'(x_0)$

Bem.: Rechnung mit allgemeiner Funktion $f(x)$ oft komplizierter als mit linearer Näherung $g(x)$.

$\Rightarrow$ Linearisierung

- quadratische Näherung: Potenzial $V(x)$ und quadratische/„harmonische" Näherung $U(x)$ um x_0.



$$V(x) = \underbrace{V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2}_{U(x)} + O(|x-x_0|^3)$$

$\Rightarrow U(x_0) = V(x_0)$, $\underbrace{U'(x_0) = V'(x_0)}_{\text{gleiche Steigung}}$, $\underbrace{U''(x) = V''(x_0)}_{\text{gleiche Krümmung}}$

check: $U'(x) = V'(x_0) + V''(x_0)(x-x_0) \Rightarrow U'(x_0) = V'(x_0)$

$U''(x) = V''(x_0)$

(Vorbereitende) Definition:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \overset{\text{Teilmenge}}{\subset} \mathbb{R}$ heißt **(n mal) stetig differenzierbar**, wenn f im Intervall D (n-mal) differenzierbar ist und $f^{(n)}(x)$ stetig ist.

(Schreibweise: $f \in C^n(D)$)

„continuously differentiable"

Bem.: - Ist f beliebig oft differenzierbar, so nennt man f eine $C^\infty(D)$-Funktion.

- In der Physik sind Funktionen in der Regel diffbar, Knicke, Sprünge... sind eher selten.

Satz von Taylor:

Jede Funktion $f \in C^{n+1}(D)$ auf einem offenen Intervall D lässt sich für $x, x_0 \in D$ auf folgende Weise nach Potenzen entwickeln:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}_{\text{Taylor-Polynom } n\text{-ter Ordnung}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}}$$

also: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Restglied: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ mit ξ zwischen x und x_0

Beispiel: (i) Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ entwickelt um $x_0 = 0$:

Check: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ✓

$f^{(k)}(x) = e^x$ also $f^{(k)}(x_0) = 1$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + R_n(x)$$

Bem: $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, also: $e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$

($k!$ wächst schneller als x^k)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

(ii) Geometrische Reihe:

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$f''(x) = 2 \frac{1}{(1-x)^3}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = k! \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

$\Rightarrow f^{(k)}(x_0) = k!$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,(x-x_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

aber nur im Konvergenzradius $|x| < 1$

also: $x \in (-1, 1) =]-1, +1[$

- Totale vs. partielle Zeitableitg:

Mechanik: oft implizierte & explizierte Zeitableitungen:

$$f = f(x(t),\ y(t),\ t)$$

Bsp.: $f = x(t)^2 + y(t)^2 + \alpha t$

↳ partielle Ableitg: $\dfrac{\partial f}{\partial t} \equiv \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y\ \text{const}} = \alpha$

↳ totale zeitliche Ableitg: tatsächliche / im Experiment beobachtete Änderung von f:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

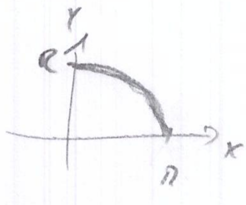
$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = 2x\,\dot{x} + 2y\,\dot{y} + \alpha$$

- implizierte Differentiation:

Idee: Zusammenhang von x und y nur als $f(x,y)=0$, aber nicht $y=y(x)$

Frage: $\dfrac{dy}{dx} = ?$

↳ Bsp.: (i) Kreis: $f(x,y) = R^2 - x^2 - y^2 = 0$, etwa $x,y \geq 0$



↳ $df = -2x\,dx - 2y\,dy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

↳ check $(R,0), (0,R)$

(ii) Ableitg von $y = x^x$, $x>0$:

$$\ln y = \ln x^x \Rightarrow f(x,y) = \ln y - x\ln x = 0$$

$$\Rightarrow df = \frac{1}{y}\,dy - \left(\ln x + x\,\frac{1}{x}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\,(\ln x + 1) = x^x\,(\ln x + 1)$$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -x$

Bem: $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$ z.B. mit Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{\ln \lim_{x\to 0} x^x} = e^{\lim_{x\to 0} \ln x^x} = e^{\lim_{x\to 0} x\ln x} = e^0 = 1$$

2.4 Der Gradient

Für eine Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet das totale Differenzial

bei $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vektor}}}{\underline{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$: $df(\underline{a}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}}}{\partial_{x_1}} f(\underline{a})\, dx_1 + \dots + \underbrace{\partial_{x_n} f(\underline{a})}_{\partial_{x_n} f(\underline{x})\big|_{\underline{x}=\underline{a}}} dx_n$

Alternative Schreibweise mit Vektoren: $d\underline{x} \equiv \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$

Wir definieren den **Gradienten** von f als

$$\text{grad} f(\underline{a}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\underline{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\underline{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} f(\underline{a}) .$$

$$\Rightarrow df(\underline{a}) = \text{grad} f(\underline{a}) \overset{\substack{\text{Skalarprodukt} \\ \swarrow}}{\cdot} d\underline{x} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\underline{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\underline{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(\underline{a})\, dx_i$$

Merke: grad f liefert durch Skalarprodukt mit $d\underline{x}$ die Änderung von f unter einer infinitesimalen Verschiebung $d\underline{x}$

Bem.: übliche Schreibweise ist $\underline{\nabla} f(\underline{a}) \equiv \text{grad} f(\underline{a})$ mit dem

Nabla-Operator $\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \Rightarrow df(\underline{a}) = \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot d\underline{x}$

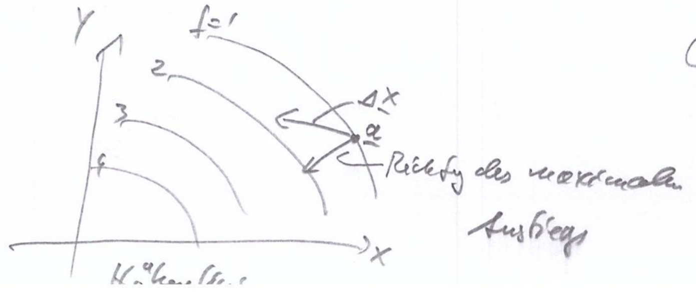
- $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ zeigt in Richtung des maximalen Anstiegs von f bei $\underline{a}$:

$$\Delta f = \underline{\nabla} f \cdot \Delta \underline{x} = |\underline{\nabla} f|\, |\Delta \underline{x}| \cos \overset{\substack{\text{Winkel zwischen } \Delta\underline{x} \text{ und } \underline{\nabla} f(\underline{a}) \\ \downarrow}}{\theta}$$

(Kap. 3.3 Skalarprodukt)

↳ bei $\theta = 0$ ($\Delta\underline{x} \parallel \underline{\nabla} f(\underline{a})$) ist $\cos\theta = 1$

$\Rightarrow \Delta f$ am größten



4 Vektoranalysis

4.1 (Konservative) Vektorfeldern

Def.: Ein Vektorfeld ist eine im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetige Abbildung

$$v : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \underline{x} \longmapsto \underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ v_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

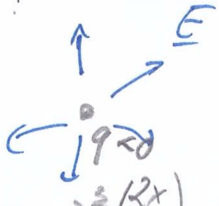
Def: Ein Vektorfeld $\underline{v}$ heißt C^s-Vektorfeld, falls die Komponenten $v_1, \dots, v_n$ s-fach stetig differenzierbar sind.

Bsp: - Elektrisches / magnetisches Feld
- Geschwindigkeitsfeld von Strömungen
- Gravitationsfeld

Def.: Ein Vektorfeld $\underline{v}(\underline{x})$ heißt konservativ (oder Gradientenfeld / Potenzialfeld), falls es sich als Gradient eines Skalarfeldes $\phi(\underline{x})$ (Potenzials) schreiben lässt:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\, \phi(\underline{x})$$

Bsp: (i) Elektrisches Feld einer Punktladung q im Ursprung:



$$\underline{E}(\underline{x}) = -\underline{\nabla}\, \phi(\underline{x}) \quad \text{mit} \quad \phi(\underline{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{x}|}$$

Probe: $\underline{\nabla} \frac{1}{|\underline{x}|} = \underline{\nabla} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = -\frac{\underline{x}}{x^3}$

(ii) Frage: Hat das Vektorfeld

$$\underline{v} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y e^{xy} + z \\ x e^{xy} \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

ein Potenzial?

Antwort: Dann müsste $\phi(x,y,z)$ existieren mit

$$\partial_x \phi = v_x \ , \ \partial_y \phi = v_y \ , \ \partial_z \phi = v_z .$$

Idee: Integration & Angleichen der Konstanten

(a) $\phi = \int v_x \, dx = e^{xy} + xz + C_1(y,z)$

(b) $\phi = \int v_y \, dy = e^{xy} \qquad + C_2(x,z)$

(c) $\phi = \int v_z \, dz = xz + z^2 + C_3(x,y)$

$\Rightarrow$ Alle 3 Bedingungen erfüllt durch:

$C_1(y,z) = z^2 , \ C_2(x,z) = xz + z^2 , \ C_3(x,y) = e^{xy}$

$\Rightarrow \phi = e^{xy} + xz + z^2$

$\Rightarrow \underline{v}$ ist konservativ

4.2 Ableitung von Vektorfeldern

(i) Def: Die Rotation (Wirbeldichte) eines Vektorfeldes $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$

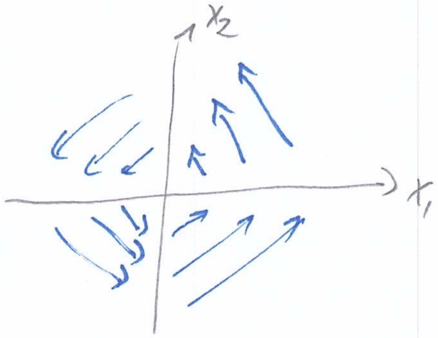
ist definiert als (in kartesischen Koordinaten)

$$\mathrm{rot}\,\underline{v} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{v} := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} .$$

oder auch: $(\mathrm{rot}\,\underline{v})_i = \varepsilon_{ijk} \, \partial_j v_k$ (Summenkonvention!)

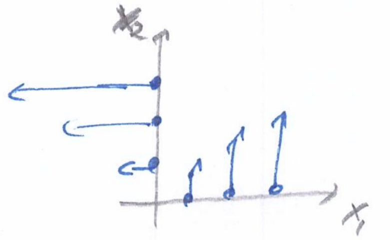
$$\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, \partial_j v_k$$

Bsp: (a) $\underline{v} = \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ +\omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega + \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$

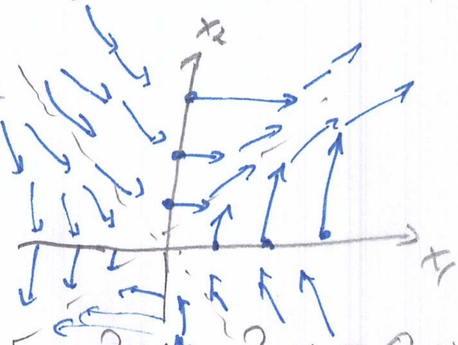


$\Rightarrow \operatorname{rot} \underline{v}$ in z-Richtung (Rechte-Daumen-Regel)

(b) Bei Bsp (a) $(\operatorname{rot} \underline{v})_3 = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$



vergleiche



$\underline{v} = \begin{pmatrix} \omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

↳ $\underbrace{\partial_1 v_2}_{>0} - \underbrace{\partial_2 v_1}_{<0} \neq 0 \Rightarrow$ Wirbel!

$\underbrace{\partial_1 v_2}_{>0} - \underbrace{\partial_2 v_1}_{>0} = 0 \Rightarrow$ keine Wirbel!

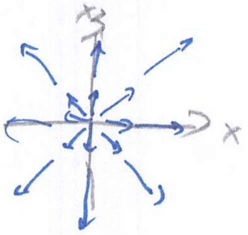
Idee: Wie ändert sich v_1 in Richtung 2 im Vergleich zu v_2 in Richtung 1?

(ii) Def: Die Divergenz (Quellendichte) von $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{pmatrix}$ ist definiert als:

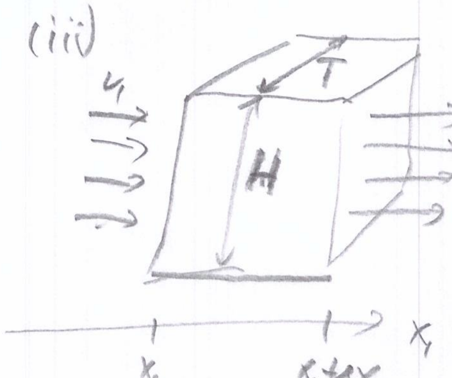
$$\operatorname{div} \underline{v} \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \equiv \partial_i v_i \quad \text{(Summenkonvention)}$$

Bsp: (i) $\underline{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ (keine Quellen)

(ii) $\underline{\nabla} \cdot \underline{x} = \underline{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3$



(iii)



Zufluss: $Z = v_1(x_1)\, HT$

Abfluss: $A = v_1(x_1 + \Delta x_1)\, HT$

$\Rightarrow$ Netto pro Volumen:

$$\frac{1}{\Delta x_1 HT}(A - Z) = \frac{v_1(x_1 + \Delta x_1) - v_1(x_1)}{\Delta x_1} \xrightarrow[\Delta x_1 \to 0]{} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1)$$