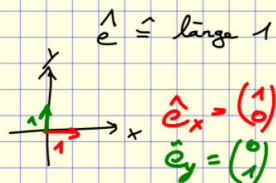


Aufgabe 3:

i) geg: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1\hat{e}_x + 2\hat{e}_y$

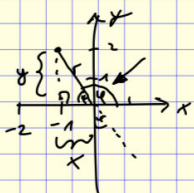
ges: r, φ

Polarkoordinaten: $\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$



G A G A
H H A G

$\cos(\varphi) = \frac{A}{r} = \frac{x}{r} \quad / \cos(\varphi)$



$x^2 + y^2 = r^2 \quad \sqrt{\quad}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{5}$

$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 117^\circ$

$\Rightarrow \vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

ii) $A(-1/12/5); B(1/2/5); C(6,12,5)$

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

iii) $A(-1/2/1), B(1/0/3), C(2/2/1)$

Volumen Spat:

$V = |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}|$

$\Rightarrow V = \left| \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$

Notation:

Vektor:

Matrix:

$\vec{r} = \underline{\underline{r}}$
 $\underline{\underline{A}}$

iv) a) $g_1: y = 3x - 7 \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 3x-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$

$g_2: y = 7x - 3 \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 7x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$

$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1+21}{\sqrt{1^2+3^2} \sqrt{1^2+7^2}} = \frac{22}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = \frac{22}{\sqrt{500}}$

$\cos^{-1}\left(\frac{11\sqrt{5}}{25}\right) \approx 10,3^\circ$

$= \frac{11\sqrt{5}}{25}$

$$b.) \quad g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 3x-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 7x+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren gleich a.), daher gleiches Ergebnis ($\varphi = 10,3^\circ$)

$$v.) \quad g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{r} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4+a \\ -1-2a \\ 4+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b \\ b \\ 6-5b \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{I)} \\ \text{II)} \\ \text{III)} \end{matrix}$$

① a berechnen II) $-1-2a = b$ in I: $4+a = 3(-1-2a)$

$$\Leftrightarrow 4+a = -3-6a \quad | +6a$$

$$\Leftrightarrow 4+7a = -3 \quad | -4$$

$$\Leftrightarrow 7a = -7 \quad | \cdot \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{a = -1}}$$

② b berechnen in II) $-1-2a = b$

$$\Leftrightarrow -1-2(-1) = b$$

$$\Leftrightarrow -1+2 = b \Rightarrow \underline{\underline{b = 1}}$$

• Schnittpunkt: $g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Schnittwinkel:

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{3-2-15}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} \cdot \sqrt{3^2+1^2+(-5)^2}} \\ = \frac{-14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow \varphi = 129,232^\circ \quad \text{theoretisch}$$

$$\cos^{-1}(\pi - (-\sqrt{\frac{2}{5}})) \approx 50^\circ$$

$$50^\circ < 129$$

$$\Rightarrow \varphi = 50^\circ$$

$$\text{vi.) } e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$e_2: \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} = 5 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} - 5 = 0$$

$\vec{x}$ aus e_1 in e_2 einsetzen

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right] = 5$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha} + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \beta} = 5$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3+2} + \underbrace{4\alpha+9\alpha+2\alpha} + \underbrace{16\beta+3\beta-14\beta} = 5$$

$$\Leftrightarrow 5 + 15\alpha + 5\beta = 5 \quad | -5$$

$$\Leftrightarrow 15\alpha + 5\beta = 0 \quad | \cdot \frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{3}\beta = 0 \quad | -\frac{1}{3}\beta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{3}\beta}$$

einsetzen in e_1 :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\beta\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\beta \begin{pmatrix} -1/3 - 4 \\ 1 + 1 \\ 1/3 - 7 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 13/3 \\ 0 \\ 20/3 \end{pmatrix}$$