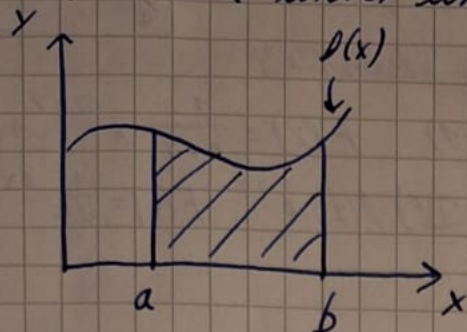


Integrale

Ziel: Fläche unter einem Funktionsgraphen bestimmen



Anwendungsbeispiel:

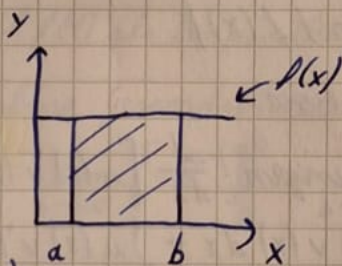
Die Funktion $f(t)$ gibt an, wie sehr der Wasserhahn zum Zeitpunkt $t = t_0$ aufgedreht ist. Uns interessiert, wie viel Wasser im Intervall $t \in [a, b]$ hinzufließen ist.

Die Menge an Wasser entspricht der Fläche unter der Funktion $f(t)$.

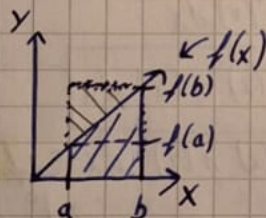
Ober-/Untersumme

[A] Konstante Funktionen:

Fläche: $(b-a) \cdot f(x)$

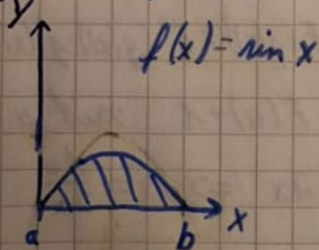


[B] Geraden:

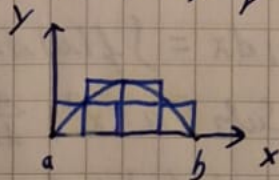


Fläche: $(b-a) \cdot f(a) + \frac{1}{2}(b-a) \cdot (f(b) - f(a))$

[C] Beliebige differenzierbare Funktionen:



Idee: Zerlegung in Ober- und Untersummen bei kleiner werdenden Intervallen



Für $n \rightarrow \infty$ Intervalle gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \int_a^b f(x) dx$

mit $U_n = \sum f_{\min, i} \cdot \Delta x_i$

$O_n = \sum f_{\max, i} \cdot \Delta x_i$

Hauptatz der Differential & Integralrechnung

Intuitiv: • Differenzieren misst momentane Änderung (Steigung)

• Integrieren summiert alle winzige Änderungen wieder auf

$\Rightarrow$ Kennt man $f(x)$ als Steigung von $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$),

dann ist das Integral die gesamte Änderung von $F \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$\Rightarrow$ Für Integrale ist die Stammfunktion essenziell

Bsp. Stammfunktionen: I) $f(x) = x^n$ ($n \neq -1$) $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

II) $f(x) = \frac{1}{x}$ $F(x) = \ln|x| + C$

IV) $f(x) = e^{ax}$ $F(x) = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

III) $f(x) = \sin(x)$ $F(x) = -\cos(x) + C$ etc.

Tipp: Stammfunktion ableiten und schauen, ob $f(x)$ rauskommt

Wichtige Methoden zur Bestimmung von Stammfunktionen:

A $\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad | \int$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

Bsp.: $\int \frac{1}{x} dx$ Hier $f(x) = x$ $f'(x) = 1$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

B Partielle Integration:

Produktregel Ableitungen: $\frac{d}{dx} [u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad | \int$

$$\Rightarrow u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

Formulierung mit Stammfunktion: $\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$

Bsp.: $\int_a^b x e^x dx = x e^x \Big|_a^b - \int_a^b e^x dx = x e^x - e^x \Big|_a^b = e^x \cdot (x-1) \Big|_a^b$

C Substitution: Kettenregel Ableitungen: $\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \quad | \int$

$$\Rightarrow F(g(x)) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C \quad \text{mit } u = g(x); du = g'(x) dx$$

Bsp.: $\int 2x \cos(x^2) dx$ Subs.: $u = x^2; \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$\Rightarrow \int \cos(u) \frac{2x}{2x} du = \sin(u) + C$$

Rücksubstitution: $u = x^2 \Rightarrow \int 2x \cos^2(x^2) dx = \sin(x^2) + C$

Weitere wichtige Anwendungen:

Länge einer Kurve: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Mittelwert einer Funktion: $f_{\text{mittel}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Volumen eines Rotationskörpers: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Weitere Integralregeln: $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ (Linearität)

• $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ (Konstante Faktorregel)

• $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ (Vertauschen der Grenzen)

• $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (Zerlegung des Integrals)

Uneigentliche Integrale:

Wichtig, wenn man den ganzen "Raum" betrachtet und auf Konvergenz bzw. Divergenz testet.

Anwendungsbeispiel: Ein Körper kühlt proportional zur Zeit ab.

Funktion $f(t) = e^{-t}$ ab. Mit $f(t)$ als Temperaturänderung.

Die an die Umgebung abgegebene Gesamtwärmemenge Q ist dabei

$$Q = \int_0^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

Das macht Sinn, da sich die Temperatur des Körpers langfristig der Temperatur der Umgebung annähert und nicht eine unendlich große Wärmemenge abgegeben werden kann.