Theoretische Physik I und II für Lehramt: Analytische Mechanik und Elektrodynamik Definitionen, Sätze, Formales...

Dr. habil. Philipp Hövel

November 26, 2025

1 Newtonsche Mechanik

Newtonsche Axiome:

1. Kräftefreie Körper bewegen sich geradlinig und gleichförmig.
2. Beschleunigung $\mathbf{a} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{v} \sim \mathbf{F}$ (allgemeiner: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$)
3. *actio* = *reactio*
4. Lineare Superposition von Kräften

Drehmatrizen:

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Das D'Alembertsche Prinzip

Zwangsbedingungen:

- **holonom:** $f_\mu(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \mu = 1, \dots, \Lambda$
  vollständiges/totales Differenzial $\mathrm{d}f_\mu = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r_i}} f_\mu \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i + \frac{\partial f_\mu}{\partial t}\mathrm{d}t = 0$
- **nicht holonom:** $\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\mu i}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_{\mu 0}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \mathrm{d}t = 0$
  aber: es existiert kein *integrabler* Faktor g_μ, so dass $g_\mu \mathbf{a}_{\mu i} = \nabla_{\mathbf{r_i}} f_\mu$
- **rheonom:** zeitabhängige Zwangsbedingung
- **skleronom:** nicht explizit zeitabhängige Zwangsbedingung

virtuelle Verrückungen $\{\delta \mathbf{r}_i\}$: infinitesimale Änderung der Koordinaten, die zu fester Zeit ($\delta t = 0$) die Zwangsbedingungen erfüllen.

reale Verrückungen $\mathrm{d}\mathbf{r}_i$: infinitesimale Änderung der Koordinaten in Zeitinterval $\mathrm{d}t$ entlang der Bahn

Methode der Lagrange-Parameter: (zur Hintergrundinformation für TPI+II für Lehramt)
Allgemeine Notation: $\mathbf{r}_i \longrightarrow x_j, \mathbf{X}_i \longrightarrow K_j, \mathbf{r}_i \longrightarrow x_j, \mathbf{a}_{\mu i}, \nabla_{\mathbf{r_i}} f_\mu \longrightarrow \phi_j^\mu$ mit $i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, 3N$

1. Addiere Nebenbindungen mit Lagrange-Multiplikation λ_μ:

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu \right) \delta x_j = 0$$

2. Eliminiere $\delta x_1, \ldots, \delta x_\Lambda$ aus den Nebenbindungen. Dann sind $\delta x_{\Lambda+1}, \ldots, \delta x_N$ frei wählbar.

3. Bestimme $\lambda_1, \ldots, \lambda_\Lambda$, so dass

$$m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu = 0 \qquad \text{für} j = 1, \ldots, \Lambda$$

   und somit

$$\sum_{j=\Lambda+1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu(t) \phi_j^\mu \right) \delta x_j = 0$$

4. Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu = 0$$

   Also für holonome Zwangsbedingungen:

$$m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\Lambda} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_j} = 0$$

Kochrezept der Lagrange-Gleichungen 2. Art:

1. Auswählen generalisierter Koordinaten: $q_1, \ldots, q_f$, die die (holonomen) Zwangsbedingungen erfüllen: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_f, t) \equiv \mathbf{r}_i(q_k, t)$
2. Berechnen von Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_i(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_i(q_k, t)$ und kinetischer Energie $T(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i(q_k, \dot{q}_k, t)^2$
3. Potenzielle Energie für konservative Kräfte: $V(q_k, t) = V(\mathbf{r}_i(q_k, t))$ $\Rightarrow$Lagrange-Funktion $L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k, t) - V(q_k, t)$ (Potenzielle/Lage-) Energie für nichtkonservative Kräfte: $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i \frac{\partial}{\partial q_j}\mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_f, t)$
4. Aufstellung der Bewegungsgleichungen ($j = 1, \ldots, f$):
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}L\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}L = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}T\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}T = Q_j$$
5. Lösen der Bewegungsgleichungen

3 Das Hamiltonsche Prinzip

Variationsidee:
Sei $I : \mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{q}(t) \mapsto I[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ein Funktional.
Suche $\mathbf{q}(t)$, so dass $\delta I[\mathbf{q}] = 0$, d.h. I wird extremal.

Annahmen für variierte Bahnen:
Zu jedem t aus $t_1 \leq t \leq t_2$ wird dem Punkt $\mathbf{q}(t)$ auf der realen Bahn ein variierter Bahnpunkt $\mathbf{q}'(t)$ zugeordnet. Dabei gilt:

1. $\mathbf{q}'(t) \in \mathcal{C}^2$
2. $\delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}'(t) - \mathbf{q}(t)$
3. $\delta t = 0$
4. $\mathbf{q}'(t_1) = \mathbf{q}(t_1)$ und $\mathbf{q}'(t_2) = \mathbf{q}(t_2)$ Also gilt: $\delta\mathbf{q}'(t_1) = \delta\mathbf{q}'(t_2) = 0$

Variationsrechnung:

1. Extremum einer Funktion $f(x)$ einer Variablen:
$$\delta f(x) = f(x + \delta x) - f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\delta x = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}_{\text{,}}f}{\mathrm{d}x} = 0 \,\text{bei}\, x = x^*$$
2. Extremum einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_N)$ mehrerer Variablen:
$$\delta f = f(x_1 + \delta x_1, \ldots, x_N + \delta x_N) - f(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \,\text{bei}\, x_i = x_i^*$$

3. Extremum eines Funktionals $f[x]$ einer Funktion $x(t)$:

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_N &\longrightarrow x(t) \\ \delta x_1, \dots, \delta x_N &\longrightarrow \delta x(t) \\ x_i^* &\longrightarrow x^*(t) \\ \delta f = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i &\longrightarrow \delta f = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\delta f}{\delta x(t)} \delta x(t) \end{aligned}$$

   Mit $f[x] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t F(x(t))$ folgt:

$$\delta f = f[x(t)+\delta x(t)] - f[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \{F(x(t)+\delta x(t)) - F(x(t))\} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \delta x(t) = 0$$

   und somit $\frac{\delta f}{\delta x(t)} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0$ bei $x(t) = x^*(t)$

Satz. Die **Eichtransformation**

$$L \mapsto L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M(\mathbf{q}, t)$$

mit beliebiger **Eichfunktion** M lässt die Euler-Lagrange-Gleichungen invariant.

4 Hamilton-Formalismus

Kochrezept der Hamiltonschen Gleichungen:

1. Auswählen generalisierter Koordinaten: $q_1, \dots, q_f$
2. Transformation $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$ und $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
3. Berechnen der Lagrange-Funktion $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
4. Berechnen der generalisierten Impulse $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
   und deren Umkehrung $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$
5. Legendre-Transformation $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j p_j - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
6. Aufstellung der Bewegungsgleichungen ($j = 1, \dots, f$):

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \text{und} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

7. Lösen der Bewegungsgleichungen

zur Hintergrundinformation für TPI+II für Lehramt:

Definition. **Kanonische Transformationen** sind diffeomorphe Transformationen (umkehrbar eindeutig, 2mal differenzierbar):

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longrightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \qquad \text{und} \qquad H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \longrightarrow \bar{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t),$$

welche die Hamiltonschen Gleichungen forminvariant lassen.

zur Hintergrundinformation für TPI+II für Lehramt:

Definition. Für zwei beliebige Observable $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ und $h(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ist die **Poisson-Klammer** definiert als:

$$\{g, h\} := \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial q_i} \right).$$

zur Hintergrundinformation für TPI+II für Lehramt:

Satz. Die Poisson-Klammern sind invariant unter kanonischen Transformationen.

zur Hintergrundinformation für TPI+II für Lehramt:

Satz. Die Transformation $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longrightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ist genau dann kanonisch, wenn gilt:

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad \{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0.$$

zur Hintergrundinformation für TPI+II für Lehramt:
Bezug zur Quantenmechanik:

klassische Observable $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$	$\rightarrow$	quantenmechanischer Operator $\hat{g} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
Poisson-Klammern $\{g, h\}$	$\rightarrow$	Kommutator $\left[\hat{g}, \hat{h}\right] = \hat{g}\hat{h} - \hat{h}\hat{g}$
fundamentale Poisson-Klammern $\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}$ $\{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0$	$\rightarrow$	$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{kl}$ $[\hat{q}_k, \hat{q}_l] = [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0$
Hamilton-Funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$	$\rightarrow$	Hamilton-Operator $\hat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t)$
Bewegungsgleichungen: $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$	$\rightarrow$	Heisenbergsche Bewegungsgleichungen: $\frac{\mathrm{d}\hat{g}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{g}, \hat{H}\right] + \frac{\partial \hat{g}}{\partial t}$

5 Starrer Körper

Definition. Der **Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}$** ist gegeben durch:

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(d^{(i)}\right)^2 \delta_{jk} - d_j^{(i)} d_k^{(i)} \right].$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{d}^{(i)}$ die Koordinaten/den Ort des i-ten Teilchens im körperfesten Bezugssystem und $\left(d^{(i)}\right)^2 = \mathbf{d}^{(i)} \cdot \mathbf{d}^{(i)}$.

Analog für kontinuierliche Massendichten ρ:

$$\Theta_{jk} = \int \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{d}) \left[d^2 \delta_{jk} - d_j d_k \right].$$

Definition. Das **Trägheitsmoment** Θ_n bzgl. einer Drehachse $\hat{\mathbf{n}}$ ist gegeben durch:

$$\Theta_n = \hat{\mathbf{n}}^T \boldsymbol{\Theta} \hat{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(d^{(i)}\right)^2 - \left(\mathbf{d}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{n}}\right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(l^{(i)}\right)^2$$

mit $l^2 = \left(d^{(i)}\right)^2 - \left(\mathbf{d}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{n}}\right)^2$ dem quadratischem Abstand des i-ten Teilchens von der Drehachse $\hat{\mathbf{n}}$.

Satz (Satz von Steiner). Sei Θ_{jk} der Trägheitstensor eines Körpers der Masse M in einem im Schwerpunkt zentrierten, körperfesten System S. Sei $S^{'}$ ein zu S achsenparalleles, um $\mathbf{a}$ verschobenes System. Dann gilt:

$$\Theta_{jk}^{'} = \Theta_{jk} + M \left[a^2 \delta_{jk} - a_j a_k \right].$$

Mit $l^2 = a^2 - (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2$ (quadratischer Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse $\hat{\mathbf{n}}$) folgt für das Trägheitsmoment bzgl. $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\Theta_n^{'} = \Theta_n + M l^2.$$

Satz (Schwerpunktsatz). Der Schwerpunkt eines starren Körpers bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und die Resultierende $\mathbf{F}^{\text{außen}}$ aller äußeren Kräfte in ihm angreifen:

$$M \ddot{\mathbf{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}^{(i)\text{außen}} = \mathbf{F}^{\text{außen}}.$$

Satz (Drehimpulssatz). Die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\mathbf{L}$ entspricht dem angreifenden Drehmoment $\mathbf{M}_{¸}$:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{d}^{(i)} \times \ddot{\mathbf{d}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{d}^{(i)} \times \mathbf{F}^{(i)\text{außen}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}$$