Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik I+II für Lehramt

Universität des Saarlandes
Dr. habil. Philipp Hövel, Max Lauer

WS 2025/26 **Blatt 8** **09.12.2025**

Abgabe bis Freitag, den 19.12.2025 Uhr über die Moodle-Plattform.

Aufgabe 22 *Delta-Funktion*

Die Delta-Funktion (genauer Delta-Distribution) wurde zwar nicht von Paul Dirac erfunden, aber er hat ihr den Namen in Analogie zum Kronecker-δ gegeben. Daher wird die δ-Funktion oft Dirac'sche δ-Funktion oder nur Dirac-Funktion genannt. Die δ-Funktion findet zahlreiche Anwendungen in der Physik, zum Beispiel in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik. Wir sammeln und zeigen einige Eigenschaften der Delta-Funktion $\delta(x)$, die in der Vorlesung eingeführt wurde. Die δ-Funktion ist definiert über die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$$

Bemerkung: Die δ-Funktion ist keine mathematische Funktion (also keine Abbildung $\mathbb{R} \supset \Omega \to \mathbb{R}$), sondern eine sogenannte Distribution – eine Erweiterung des Funktionsbegriffs. Mathematisch sauber wird sie als Abbildung aus einem Funktionenraum nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ definiert. Siehe z.B.: https://de.wikipedia.org/wiki/Delta-Distribution

a) Beweise, dass die Funktionenfolge

$$d_l(x) = \begin{cases} 1/l & -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $l \to 0$ formal gegen die Delta-Funktion konvergiert.

b) Die Ableitung der Delta-Funktion ist definiert durch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta'(x - x_0) f(x) = -f'(x_0)$$

Überzeuge dich, dass die Definition kompatibel ist mit üblichen Differentiations- und Integrationsregeln. *Hinweis:* Eine partielle Integration könnte nützlich sein.

c) Zeige: $\delta(x - x_0) = \Theta'(x - x_0)$ mit der Heaviside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

d) In drei Raumdimensionen und kartesischen Koordinaten ist

$$\delta(\vec{x} - \vec{x_0}) = \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0)$$

Bestimme die Darstellung der Delta-Funktion in Kugel- und Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 23 *Homogen geladene Kreisscheibe*

Betrachte eine unendlich dünne Kreisscheibe mit Radius R und Kreismittelpunkt im Ursprung. Die Scheibe liegt in der (x, y)-Ebene und trägt eine homogene Flächenladungsdichte σ.

a) Berechne die elektrische Feldstärke $E = |\vec{E}|$ und das Potenzial ϕ auf der z-Achse.

b) Wie verhalten sich $E(z)$ und $\phi(z)$ für $z \to \pm\infty$?
Hinweis: Verwende eine geeignete Näherung für $\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}$.

Aufgabe 24 *Ladungsverteilungen und Delta-Funktion*

Drücke mit Hilfe der Diracschen δ-Distribution in geeigneten Koordinaten die folgenden Ladungsverteilungen als räumliche Ladungsdichten $\rho(\vec{x})$ aus und überprüfe das Ergebnis mittels direkter Intergration: $Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r$

a) Eine über eine Kugelschale vom Radius R gleichmäßig verteilte Ladung Q in Kugelkoordinaten.

b) Eine über die Oberfläche eines unendlich langen Zylinders vom Radius R verteilte Ladung λ pro Längeneinheit ($\lambda = Q/l$) in Zylinderkoordinaten.

c) Die über eine flache, infinitesimal dünne Kreisscheibe vom Radius R gleichmäßig verteilte Ladung Q in (i) Zylinderkoordinaten; (ii) Kugelkoordinaten.

Hinweis: Erinnere dich an die Delta-Funktion in Kugel- und Zylinderkoordinaten und beachte die richtige Normierung der Dichten.