Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik I+II für Lehramt

Universität des Saarlandes
Dr. habil. Philipp Hövel, Max Lauer

WS 2025/26 **Blatt 12** **20.01.2026**

Abgabe bis Freitag, den 30.01.2026 Uhr über die Moodle-Plattform.

Aufgabe 34 *Fourier-Transformation*

Die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ ist die spektrale Zerlegung von $f(x)$, d.h. sie gibt an, mit welcher "Gewichtung"die harmonischen Funktionen (oder ebenen komplexen Wellen) e^{ikx} in $f(x)$ vorkommen. In anderen Worten: Mit der Fourier-Transformation zerlegt ihr eine Funktion in Beiträge aus ebenen Wellen. Sie hat zahlreiche Anwendungen in der Natur- und Ingenieurwissenschaften.
Die Fourier-Transformation einer Funktion $f(x)$ und die inverse Fourier-Transformation sind definiert als

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, \mathrm{d}x,$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k)\, \mathrm{d}k.$$

a) Zeigt, dass $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k e^{ikx}$ eine Darstellung der $\delta-$Funktion ist.

b) Berechnet die Fourier-Transformierte von $f(x) = e^{-a|x|}, (a > 0)$.

c) Berechnet die Fourier-Transformierte von $f(x) = \cos(k_0 x)$.

d) Berechnet die Fourier-Transformierte einer Gaußfunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$.

e) Sei $f(x) = (g * h)(x)$ die Faltung zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, d.h.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) h(y)\, \mathrm{d}y$$

Zeigt, dass $\tilde{f}(k) = \tilde{g}(k)\tilde{h}(k)$ gilt. In Worten: Die Faltung zweier Funktionen wird durch Fourier-Transformation in ein Produkt der Funktionen überführt. Faltungen kommen beispielsweise in der Signaltheorie oder in der Bildbearbeitung vor. *(2 Punkte)*

f) Wie lautet die Fourier-Transformierte von $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$?

g) Findet eine Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \kappa f(x) = \varphi(x)$$

mithilfe der Fourier-Transformation. Wenn ihr die Differenzialgleichung transformiert, erhaltet ihr eine algebraische Gleichung. Löst diese und transformieren Sie das Ergebnis anschließend zurück. Denkt dabei an die Produktregel der Faltung e).

Aufgabe 35 *Elektromagnetische Wellen im Vakuum*

Es wurde bereits gezeigt, dass das elektrische und magnetische Feld im Vakuum der Wellengleichung

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

gehorcht. In dieser Aufgabe werden nun einige Eigenschaften elektromagnetischer Wellen als Lösung dieser Gleichungen hergeleitet.

a) Führte bei Gleichung (1) eine räumliche Fourier-Transformation durch und zeigt, dass die Fundamentallösungen durch ebene Wellen

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega_{\boldsymbol{k}}t)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega_{\boldsymbol{k}}t)}$$

gegeben sind. Bestimmt $\omega_{\boldsymbol{k}}$ als Funktion des Wellenvektors $\boldsymbol{k}$.
Hinweis: Aufgrund der gleichen Struktur der Wellengleichungen für $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld könnt euch auf ein Feld beschränken.

b) Die Lösung der Wellengeleichungen sind allgemeiner als die Lösungen der Maxwell-Gleichungen. Aus den Maxwell-Gleichungen lassen sich daher noch weitere Beziehungen zwischen elektrischem und magnetischem Feld ableiten. Im Folgenden beschränken wir uns auf Wellen der Form $\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega_{\boldsymbol{k}}t)}$ für $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld.

Angenommen eine elektromagnetische Welle breitet sich in eine fest vorgegebene Richtung $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e_z}$ aus. Zeigt, dass jeweils $\boldsymbol{E}$-Feld und $\boldsymbol{B}$-Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen.

c) Zeigt, dass $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld senkrecht aufeinander stehen.

d) Bestimmt die Energiestromdichte parallel und senkrecht zu $\boldsymbol{k}$.

e) Bestimmt die Feldenergiedichte.

Aufgabe 36 *Brechung ebener Wellen*

Ein großer Erfolg Maxwells war, dass er die Optik und den Elektromagnetismus auf eine gemeinsame theoretische Grundlage gestellt hat. Hier wollen wir uns davon überzeugen, dass das Brechungsgesetz aus den Maxwell-Gleichungen folgt. Wir betrachten dazu eine monochromatische ebene Welle beschrieben durch

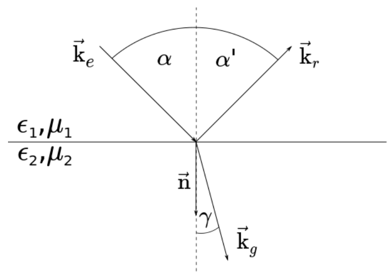
$$\vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\right], \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}} e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\right].$$

Verwendet für die Rechnung die komplexe Darstellung der Felder. Aus den Maxwell-Gleichungen wissen wir, dass

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{n}{c}(\hat{k}\times\vec{\mathcal{E}})$$

gilt, wobei $n = c\sqrt{\mu\epsilon}$ der Brechungsindex ist. μ ist die Permeabilität und ϵ die Permittivität (Dielektrizitätskonstante) des Mediums. Folglich genügt es im folgenden, nur die Ausbreitung von $\vec{E}(\vec{x},t)$ zu betrachten.

Auf eine Grenzfläche mit Normalenvektor $\vec{n}$ zwischen zwei Medien fällt eine elektromagnetische Welle ein und wird zum Teil gebrochen, zum Teil reflektiert.



In dieser Aufgabe werden nun einige Eigenschaften elektromagnetischer Wellen als Lösung dieser Gleichungen hergeleitet.

a) Überlegt euch, warum an der Grenzfläche zu jeder Zeit und an jedem Ort die Phasenbedingung

$$\exp[i(\vec{k}_e\vec{x}-\omega_e t)] = \exp[i(\vec{k}_r\vec{x}-\omega_r t)] = \exp[i(\vec{k}_g\vec{x}-\omega_g t)]$$

erfüllt sein muss. Die Indizes e, r, g stehen für die **e**infallende, **r**eflektierte und **g**ebrochene Welle.

b) Leitet daraus $\omega_e = \omega_r = \omega_g$, $\alpha = \alpha'$ (Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel) und das bekannte Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}$$

ab. Die Brechungsindizes n_i sind definiert als $n_i = \sqrt{\epsilon_i\mu_i}$.
Hinweis: Beachtet, dass $\omega = k/\sqrt{\epsilon\mu}$ gilt.