

1 Algebra und (Un-)Gleichungen - Vertiefung

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke bzw. bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\sqrt[24]{x^{3^3} / (x^{3^2}(x^3)^2)}$

d) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x+3} - \frac{20}{x^2+x-6} - \frac{3}{x^2+3x}$

e) $\sqrt{x+16} - \sqrt{x-12} = 2$

f) $8x^2 - 14x = 9$

c) $\frac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}}$

g) $x^4 - \frac{7}{4}x^2 - \frac{9}{8} = 0$

h) $|x+1| + |x+2| \leq 2$

i) $\frac{x+2}{x^2-x-2} < -1$

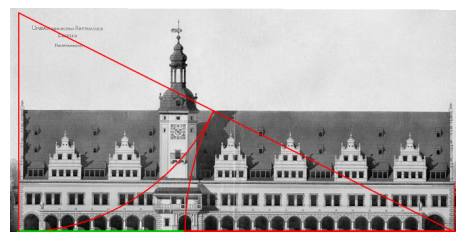
2 Allgemeinbildung: Goldener Schnitt

Der goldene Schnitt war schon in der Antike dem Euklid (300 v.Chr.) bekannt. Viele Bauten und Kunstwerke beruhen auf diesem „angenehmen“ Verhältnis zweier Seiten.

Es soll eine Strecke ℓ so in zwei ungleich große Teilintervalle a und b , $a > b$ zerlegt werden, dass das Verhältnis von ℓ zum größeren der beiden Intervalle gleich dem Verhältnis zwischen a und b ist.

Stellen Sie die zugehörige Gleichung auf und berechnen Sie $\Phi = a/b$.

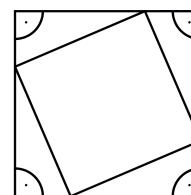
Anmerkung: Das Verhältnis Φ taucht in vielen anderen Zusammenhängen in der Mathematik auf, so gilt auch $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$, mit dem Taschenrechner ausprobieren.



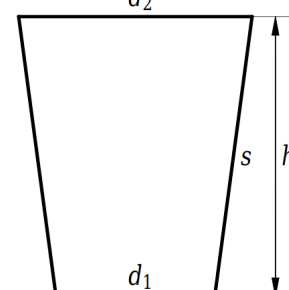
Altes Rathaus in Leipzig Quelle Wikipedia

3 Geometrie und Koordinaten

- a) Beweisen Sie mithilfe der Abbildung den Satz des Pythagoras. Berechnen Sie dazu die Gesamtfläche des äußeren Quadrats über zwei Wege und setzen Sie die Ergebnisse gleich.



- b) Der in der nebenstehenden Schnittzeichnung dargestellte Abfallbehälter habe die Form eines geraden Kegelstumpfes mit folgenden Maßen: $d_1 = 17$ cm, $d_2 = 25$ cm, $h = 30$ cm. Wie groß ist das Fassungsvermögen in Litern? Wie groß ist die Mantelfläche in Quadratmetern? Wie hoch ist der Materialverbrauch in Quadratdezimetern?
Hinweis: das Kegelvolumen ist $\frac{1}{3}G \cdot h_{\text{Kegel}}$, G -Grundfläche.



- c) Geben Sie die Punkte (x, y, z) in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) an.

a) $(1, 0, 0)$

c) $(1, 1, 1)$

e) $(2, 3, 4)$

b) $(1, 1, 0)$

d) $(1, \sqrt{2}, 0)$

f) $(0, 0, 0)$

4 Einheiten

Ohne Taschenrechner.

- Wie setzt sich ein N (Newton) aus den SI-Basiseinheiten zusammen? Aus welchem Gesetz lässt sich die zusammengesetzte Einheit herleiten?
- Wie setzt sich ein J (Joule) aus den SI-Basiseinheiten zusammen? Aus welchem Gesetz ist dies ersichtlich?
- Nach dem Coulomb-Gesetz gilt für das elektrische Feld einer Punktladung q im Ursprung

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Welche Einheit besitzt das elektrische Feld?

Hinweis: Die Einheit des Ortsvektors $\vec{r}$ ist die einer Länge. Die Einheit von ϵ_0 ist $\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$, die Ladung ist Stromfluss·Zeit.

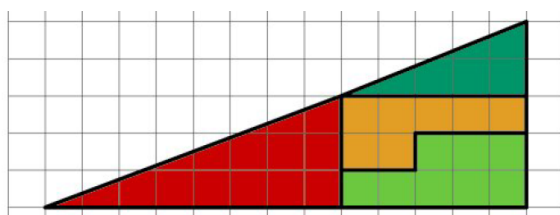
- Rechnen Sie in $\text{dm}^2 \text{ um}$.

- | | |
|--------------------------|---|
| a) 235 km^2 | d) $8,342 \cdot 10^4 \text{ mm} \cdot \text{m}$ |
| b) $0,287 \text{ m}^2$ | e) $3,648 \cdot 10^{17} \mu\text{m}^2$ |
| c) 342748 mm^2 | f) $2 \mu\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{dm}/\text{km}$ |

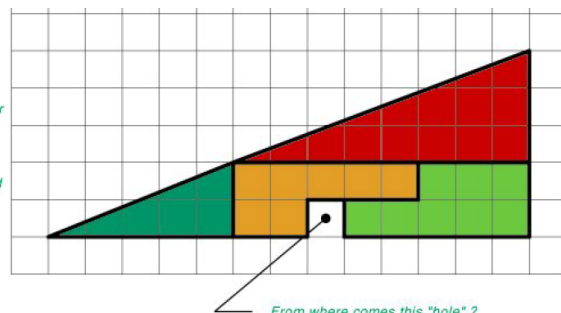
Rechnen Sie in $\text{cm}^3 \text{ um}$.

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $9,837 \cdot 10^{19} \text{ nm}^3$ | d) $2 \mu\text{m} \cdot \text{dm} \cdot \text{km}$ |
| b) $5,32 \cdot 10^4 \text{ ml}$ | e) $4370 \text{ mm} \cdot \text{l}/\text{cm}$ |
| c) $0,0345 \text{ m}^3$ | f) $0,45 \mu\text{m}^2/\text{dm} \cdot \text{km}^2/\text{nm} \cdot \text{cm}$ |

5 Wie kann das sein?



Below the four
parts are
moved around



The partitions
are exactly the
same, as those
used above

From where comes this "hole"?

6 Für Freaks: Fibonacci-Folge

Die Folge $(f_n)_{n=0,1,\dots} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ der Fibonacci-Zahlen ist rekursiv definiert durch $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n > 1$, siehe auch <https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge>. Zeige, dass:

- Für $n \geq 0$ gilt $f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 1.618$, das Φ des goldenen Schnittes. Es gilt auch $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.

Viel Spaß beim Lösen. ☺