1.5.7 Substitution

Bsp: $\underbrace{\ln(x)}^2 - 4\ln(x) + 4 = 0$

$y = \ln(x) \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2$

gesucht ist $x \rightarrow x = e^y \Rightarrow x = e^2$

1.5.8 Ungleichungen mit Bruchtermen

Bsp: $\frac{x-1}{x+3} \geq 1$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ← nur diesen Bereich überprüfen

$\frac{x-1}{x+3} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1-x-3}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-4}{x+3} \geq 0$

Wann ist (Zähler ≤ 0 und Nenner < 0) $\vee$ (Zähler ≥ 0 und Nenner > 0)?

Fall 1) $-4 \geq 0$ und $x+3 > 0$
$\lightning$

2) $-4 \leq 0$ und $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$ $L = (-\infty, -3)$
$]-\infty, -3[$

allgemein beachte: Umkehr des Ungleichheitszeichens bei Multiplikation mit negativer Zahl

$\frac{-4}{x+3} \geq 0$

Fallunterscheidung Nenner: 1) $x+3 > 0 \rightarrow \frac{-4}{x+3} \geq 0 \quad | \cdot (x+3)$

$\Rightarrow -4 \geq 0 \quad \lightning$

2) $x+3 < 0 \rightarrow \frac{-4}{x+3} \geq 0 \quad | \cdot (x+3)$

$\Rightarrow -4 \leq 0 \quad ✓$

$\Rightarrow x < -3$

$\frac{-4+x}{x+3} \geq 1$ 1) $x+3 > 0 \Rightarrow -4+x \geq x+3$

2) $x+3 < 0 \Rightarrow -4+x \leq x+3$

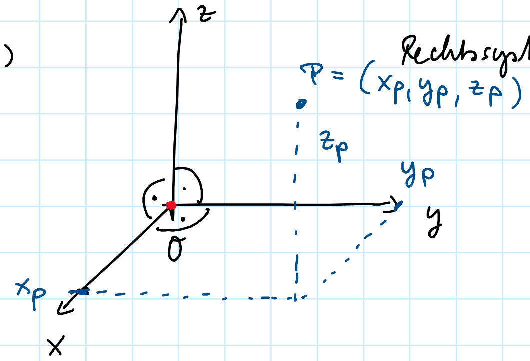
2. Elementare Geometrie

2.1 Koordinatensysteme

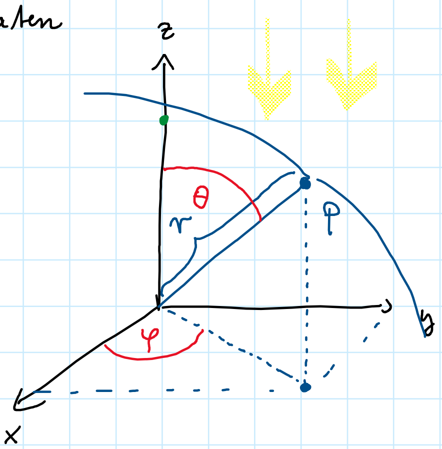
- Kartesisches Koordinatensystem

(x, y, z)

Rechtssystem: rechtshändiges Dreibein



- Kugelkoordinaten



$P = (r, \theta, \varphi)$

r: Radius, Abstand auf Kugeloberfläche

θ: Polarwinkel, φ: Azimutwinkel

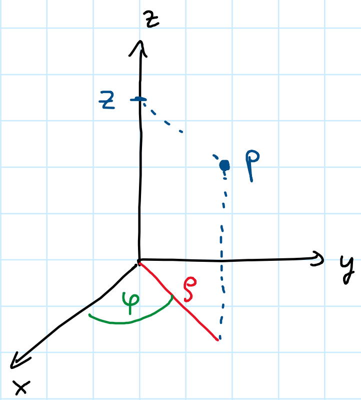
Transformation:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

andere Richtung: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\theta = \operatorname{acos}\left(\frac{z}{r}\right)$$
$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

- Zylinderkoordinaten



(ρ, φ, z)

Transformation: $x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \sin\varphi$

$z = z$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z$$

2.2. Elementare geometrische Objekte

2D: Gerade $y = m \cdot x + n$

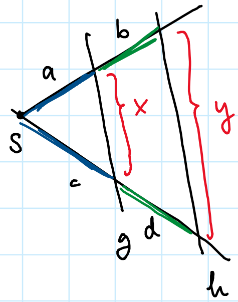
2D: Gerade $y = m \cdot x + n$

m: Steigung, n: Achsenabschnitt

Strahlensätze: 1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \qquad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

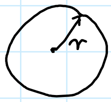
2) $\frac{y}{x} = \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$



$g \parallel h$

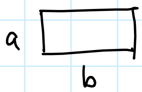
- Formen und Maße

Kreis



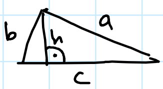
$A = \pi r^2 \qquad U = 2\pi r$

Rechteck



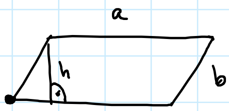
$A = a \cdot b \qquad U = 2a + 2b$

Dreieck

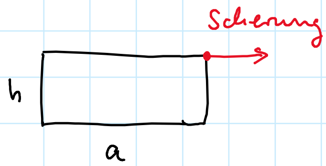


$A = \frac{1}{2} c \cdot h \qquad U = a + b + c$

Parallelogramm



geht hervor aus



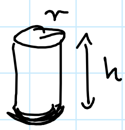
$A = a \cdot h \qquad U = 2(a+b)$

3D:

Kugel

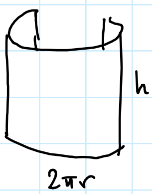
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad O = 4\pi r^2$

Zylinder



$V = \pi r^2 \cdot h \qquad O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

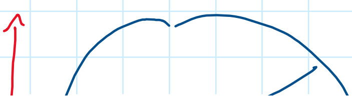
$U = 2\pi r$



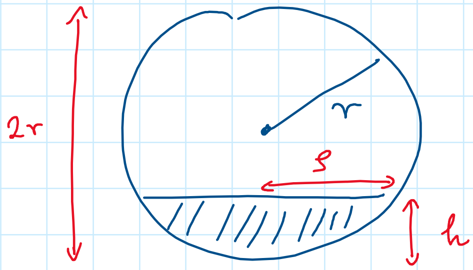
Kegel

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Kugelsegment



$a = \sqrt{h(2r-h)}$



$\rho = \sqrt{h(2r-h)}$

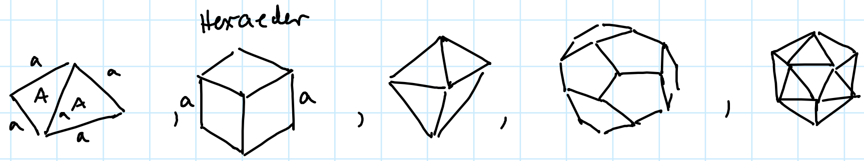
$V = \frac{1}{6}\pi h\,(3\rho^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$

Oberfläche $O = 2\pi r h + \pi \rho^2$
$= \pi(2rh + \rho^2)$

Platonische Körper

Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder

Hexaeder



3. Analysis

3.1 Funktionen

3.1.1. Eigenschaften und Definitionen

Funktion: Zuordnung einer Zahl der Menge D, $x \in D$, zu einer Zahl y aus W, $y \in W$.

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad x \longmapsto f(x)$$

$f(x)$: Bild von x, x: Urbild von $f(x)$

D: Definitionsbereich, W: Wertebereich

$f(D)$: Bildmenge $\quad f(D) = \{ f(x) \mid x \in D \}$

Funktionsgleichung (explizite Darstellung)

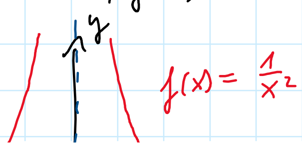
$$y = f(x) \qquad f: D \longrightarrow W$$

f Funktion auf $\mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

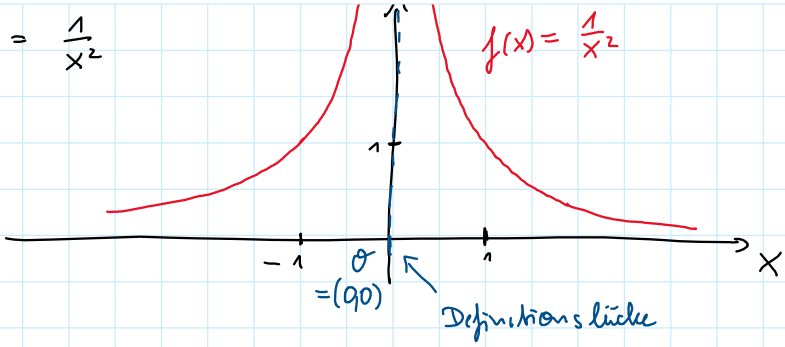
Graph einer Funktion: Veranschaulichung einer Funktion

Punkte auf dem Graph $(x,y) = (x, f(x))$

<u>Bsp</u>: $f(x) = \frac{1}{x^2}$



Bsp: $f(x) = \frac{1}{x^2}$



- Monotonie

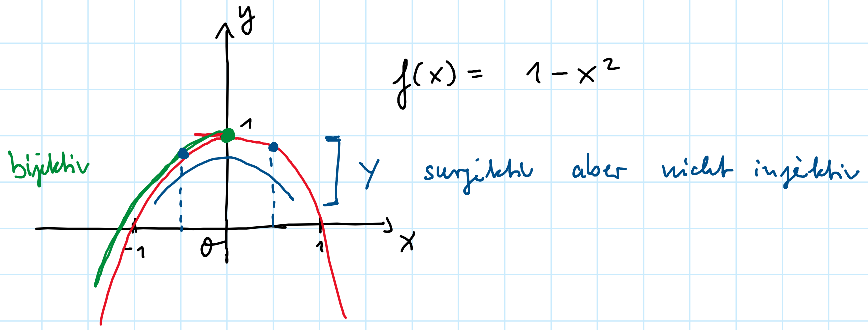
$y = f(x)$ heißt im bestimmten Bereich B

- monoton wachsend, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- monoton fallend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton wachsend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Bsp:



B:] [streng monoton steigend

B:]] monoton steigend

] [streng monoton fallend

[[monoton fallend

Beschränktheit

Eine Funktion ist nach oben / unten beschränkt, wenn $f(x)$ nicht kleiner oder größer als eine bestimmte Zahl wird

$$a \leq f(x) \leq b \quad \text{für alle } x \in D$$

falls $a \to -\infty$, $b \to +\infty$: unbeschränkt falls $a \to -\infty$, $b \to +\infty$: unbeschränkt

a endlich, $b \to +\infty$: a als untere Schranke

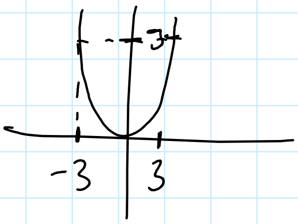
$a \to -\infty$, b endlich: b —"— obere —"—

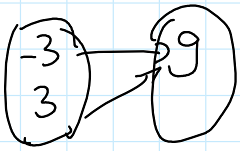
a endlich, b endlich: beschränkt / beidseitig beschränkt

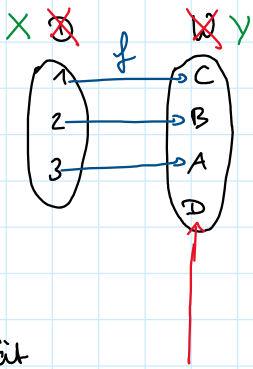
$f(x) = x^2 \quad a = 0$

$f(x) = e^x \quad a = 0$

- Injektivität: zu jedem $y \in$ ~~W~~ Y gehört höchstens ein Element der Menge ~~D~~ X



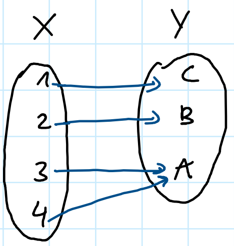




Achtung: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität immer bzgl. bestimmter Bereiche.

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

- Surjektivität



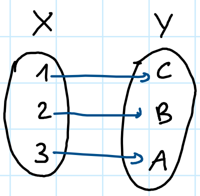
Jedes Element aus Y besitzt mindestens ein Element aus X mit $y = f(x)$

$$y \in Y \Rightarrow \exists\, x \in X : y = f(x)$$

„es existiert"

- Bijektivität

Eine Funktion ist sowohl injektiv, surjektiv $\Rightarrow$ bijektiv



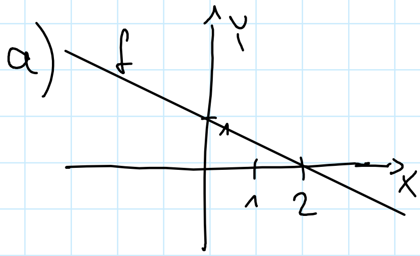
Ist eine Funktion bijektiv, kann man sie umkehren

Eine Funktion ist immer surjektiv, wenn man Definitionsmenge D und Wertemenge W betrachtet.

Vorrechnen Blatt 3:

Aufgabe 1:

a)

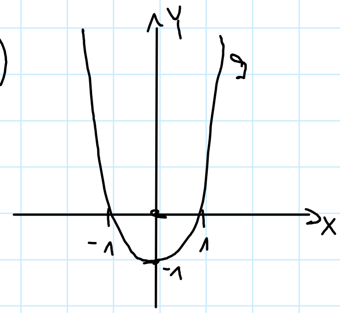


$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x+1$

bijektiv auf f $\quad f: \underset{D}{\mathbb{R}} \to \underset{W}{\mathbb{R}}$

x-Werte $\quad$ y-Werte

b)

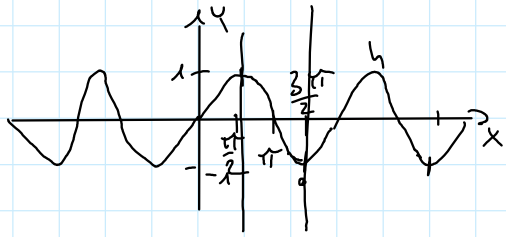


$g(x) = x^2 - 1$ $\quad (-\infty;0] \to [-1,\infty)$

n surjektiv $\quad$ ↳ auf diesem Intervall

n. injektiv $\quad$ bijektiv

c)

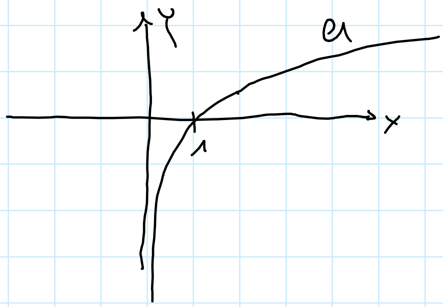


$h(x) = \sin(x)$

n surjektiv, n. injektiv

bijektiv $h\ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1;1]$

d)



$a(x) = \ln(x)$

bijektiv $\quad a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

ii) a) $f(x) = x^2 + 2x - 15$

$f: \mathbb{R} \to [-16;\infty)$, NSt: $x \in \{-5, 3\}$

b) $f(x) = (x-3)(x+5)$

c) siehe Geogebra

d) $f(-1) = -16$

$x \geq -1 \to$ mon. wachsend

$x \leq -1 \to$ mon. fallend

iii) a) $f(x) = 3\sin(x) + 4$ surjektiv

Maxima: $\frac{\pi}{2} + 2\pi z,\ z \in \mathbb{Z}$

Minima: $\frac{3\pi}{2} + 2\pi z,\ z \in \mathbb{Z}$

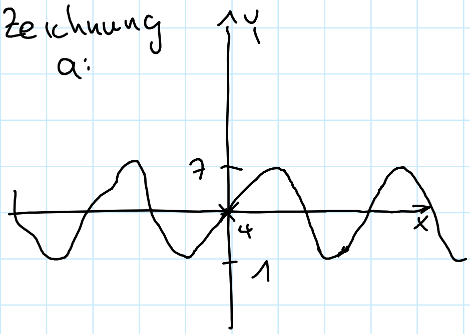
} Symmetrieachsen

b) $f(x) = \frac{1}{x+3}$, bijektiv

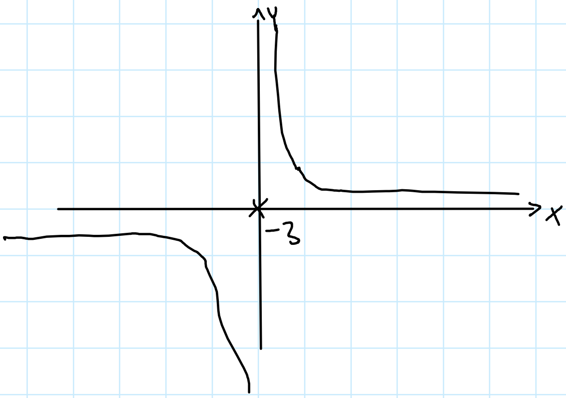
Achsen. $-x-3$, $x+3$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ x^2+1, & x \geq 1 \end{cases}$ bijektiv, keine Symmetrie

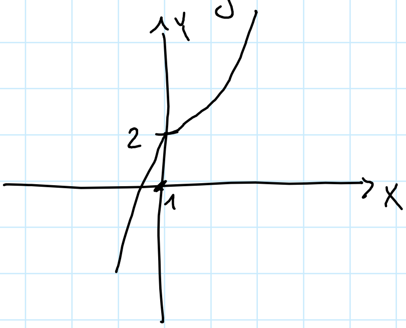
Zeichnung a:



Zeichnung b.



Zeichnung c.



iv) a) $f(x) = x\sin(x)$

$f(-x) = -x\sin(-x) \quad | \sin(-x) = -\sin(x)$

$= -x \cdot (-1) \cdot \sin(x) = x\sin(x) = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow AS$

b) $f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$f(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = f(x) \Rightarrow AS$

c) $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f(-x) = \dfrac{g(-x)}{h(-x)} = -\dfrac{g(x)}{h(x)} = -f(x) \Rightarrow PS$

$g(x) = (x^5+4x^3+2x)\sin^2(x)$

$g(-x) = -(x^5+4x^3+2x)\sin^2(x) \Rightarrow g(x)$ hat PS

$h(x) = |x|\cos(x) \qquad h(-x) = |x|\cos(-x) = |x|\cos(x)$

d) $f(x) = (x+8)^3-(x-8)^3 \Rightarrow AS$

e) $f(x) = (x+8)^2-(x-8)^2 \Rightarrow PS$

f) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) \Rightarrow PS$

Aufgabe 2.

$f(x) = 4x^2-4x+4, \quad g(x) = x-2$

$= 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3 \qquad f: \mathbb{R} \to [3;\infty)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(g(x)) = 4\cdot\left(x-2-\frac{1}{2}\right)^2+3$

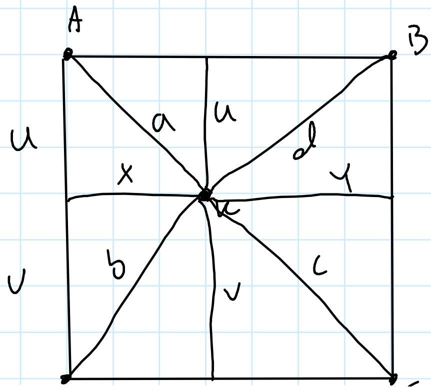
$= 4\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+3$

$= 4x^2-20x+25+3$

$f(g(x)) = 4x^2-20x+28 = 4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+1 \qquad f(g)\ \mathbb{R} \to [15,\infty)$

$g(f(x)) = 4x^2-4x+2 = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1 \qquad g(f).\ \mathbb{R} \to [1,\infty)$

Aufgabe 3:

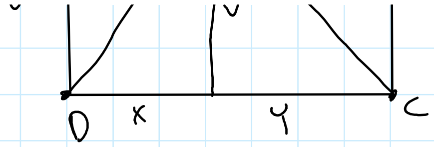


Wie lang ist d?

$a^2 = u^2+x^2 \Rightarrow x^2 = a^2-u^2 \quad (1)$

$v^2 = b^2-x^2 = c^2-y^2 \qquad (2)$

$(1) \to (2)$

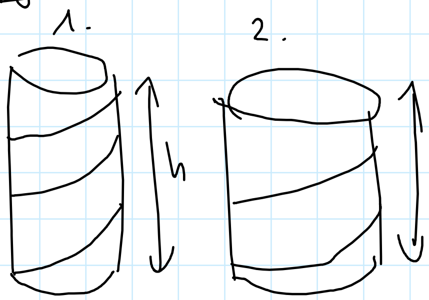


(1) → (2)

$$b^2 - a^2 + u^2 = c^2 - y^2 \to u^2 + y^2 = c^2 + a^2 - b^2$$

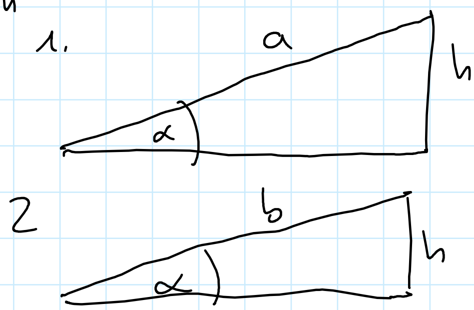
$$d^2 = u^2 + y^2 = c^2 + a^2 - b^2 \Rightarrow d = \sqrt{c^2 + a^2 - b^2}$$

Aufgabe 4:



Anstieg Treppen gleich

↳ welche Treppe ist länger?



$$a = \frac{h}{\sin(\alpha)}$$

$$b = \frac{h}{\sin(\alpha)}$$