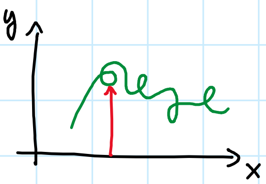
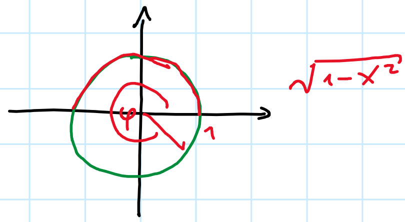
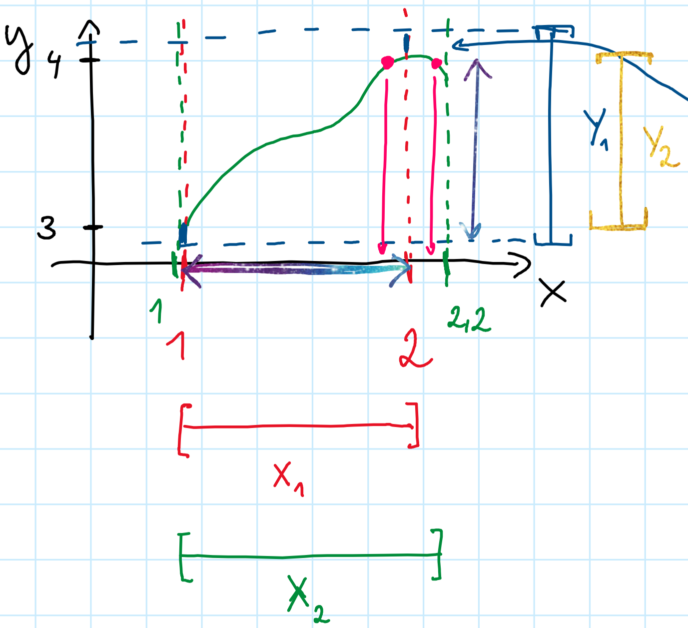
Vorlesung 4 - Funktionen II

Thursday, 25 September 2025 09:03





injektiv: für jedes $y = f(x)$ gibt es höchstens x



1) für jedes $y \in Y_1$ gibt es höchstens ein $x \in X_1$

→ es kann auch kein x geben

→ injektiv

$(X_2 \to Y_1)$

2) es gibt y-Werte, die zwei Urbilder x besitzen

→ nicht injektiv

in Bezug zu Y_1: nicht alle Werte von Y_1 werden angenommen

→ nicht surjektiv

3) $(X_2 \to Y_2)$

es gibt wieder y-Werte mit zwei Urbildern → nicht injektiv

alle y-Werte in Y_2 werden getroffen

→ surjektiv

4) $X_1 \to Y_2$

alle y-Werte werden angenommen und zu jedem y nur ein x.

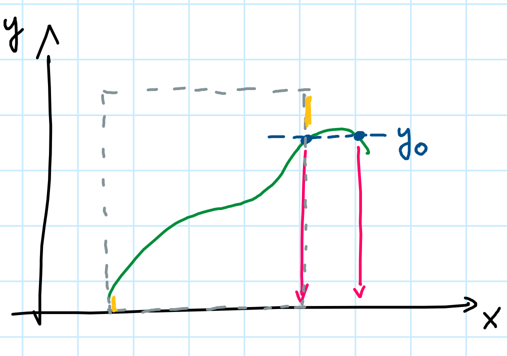
→ injektiv und surjektiv

→ bijektiv

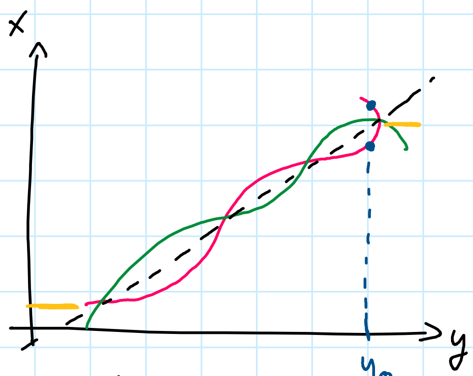
$f(x)$ ist bijektiv als $f: X_1 \to Y_2$

$f: [1,2] \to [3,4]$

$$f: X_1 \to Y_2, \quad x \mapsto f(x)$$

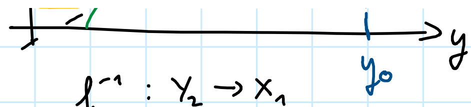


$f: X_1 \to Y_2$



$f^{-1}: Y_2 \to X_1$

$f: X_1 \to Y_2$



$f^{-1}: Y_2 \to X_1$

Umkehrfunktion

durch Vertauschen von x und y einer bijektiven Funktion erhält man die Umkehrfunktion (meist implizit → Auflösen nach y)

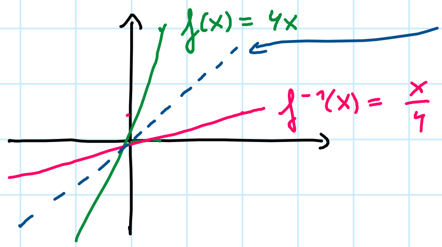
Bedingung Funktion: für jedes x genau ein y → $\underbrace{\text{für jedes } y}_{\text{surjektiv}}$ $\underbrace{\text{genau ein } x}_{\text{Injektivität}}$

Die Umkehrfunktion zu $f: X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ ist $f^{-1}: Y \to X$, $y \mapsto f^{-1}(y)$

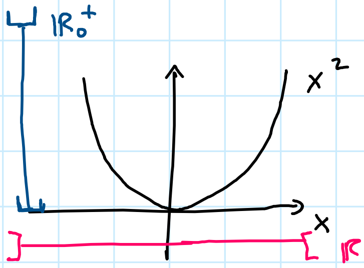
es gilt $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$

Beispiele:

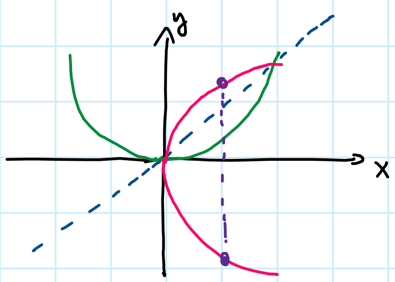
$f(x) = 4x \to y = 4x$, Tauschen: $x = 4y$, Auflösen: $y = \frac{x}{4}$



Umkehrfunktion ist Spiegelung an Winkelhalbierenden



$f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto f(x) = x^2$



auf $x \in [0, \infty[= \mathbb{R}_0^+$ ist x^2 umkehrbar mit Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

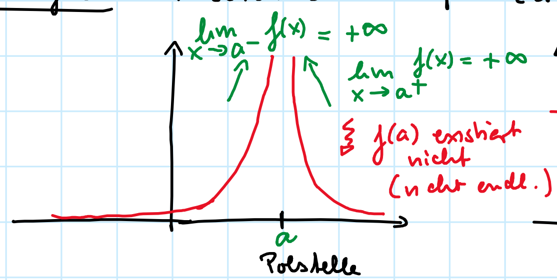
$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$

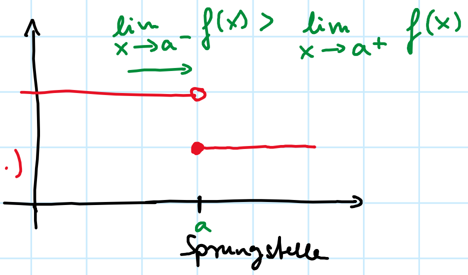
auf $x \in]-\infty, 0] = \mathbb{R}_0^-$ —— " ——

—— " —— $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$f^{-1}: \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^-$, $x \mapsto -\sqrt{x}$

Stetigkeit: Anschaulich: Graph zeichnen, ohne abzusetzen





Polstelle

Sprungstelle

↳ Unstetigkeiten

Genauere Definition: Grenzwerte

f ist an Stelle $x = a$ genau dann <u>stetig</u>, wenn

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{existiert und endlich ist}$$

von links   von rechts

<u>Verknüpfungen von Funktionen</u>

$f+g \;:\; x \mapsto f(x)+g(x)$

$f-g \;:\; x \mapsto f(x)-g(x)$

$f\cdot g \;:\; x \mapsto f(x)\cdot g(x)$

$f/g \;:\; x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Achtung: Definitionsmenge ändert sich bspw bei $\frac{f(x)}{g(x)}$ sind Nullstellen von $g(x)$ nicht enthalten. Es kann auch zur Erweiterung kommen bspw $g(x)$ hat Polstelle, welche durch $f(x)$ gehoben wird ($g(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(x) = x^2-1$, $f(x)\cdot g(x) = x+1$

Beachte allerdings bei Erweiterung:

$\frac{x^2-1}{x-1}$ ist strenggenommen an Stelle 1 nicht definiert

↳ $x+1$ allerdings schon

Verkettung von Funktionen

$f \circ g \;:\; x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$

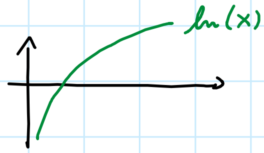
Ausgangspunkt :

$$\underbrace{\begin{array}{ll} g: X \to Y & \quad f: Y \to Z \\ \quad x \mapsto g(x) & \quad\quad y \mapsto f(y) \end{array}}$$

$$(f \circ g): X \to Z$$
$$x \mapsto (f \circ g)(x)$$

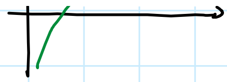
Reihenfolge der Verkettung

<u>Bsp.</u> $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$



$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

Bsp.: $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$



$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$
$y \longmapsto e^{3y}$

$$g(f(x)) = e^{3\ln(x)} = e^{\ln(x^3)} = x^3 \qquad f(g(x)) = \ln(e^{3y}) = 3y$$

$W(f) = D(g) = \mathbb{R}$

$D(g(f(x))) = \mathbb{R}$

$W(g(f(x))) = \mathbb{R}$

$W(g) = D(f) = (0,\infty)$

$f(g(x)) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

2.1.2 Elementare Funktionen

algebraische Funktionen — transzendente Funktionen

algebraische Funktionen → rationale Funktionen, irrationale Funktionen

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \equiv e^x$ ← Definition , $\sin(x)$, $\cos(x)$

rationale Funktionen → ganz rationale Funktionen, gebrochen rationale Funktionen

ganz rationale Funktionen: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$ ← es reicht ein endliches n

gebrochen rationale Funktionen: $\frac{x}{x+1}$

→ echt $\frac{x}{x-1}$

→ unecht $\frac{x^2-1}{x-1}$

rationale Zahlen : $q \in \mathbb{Q}$ $\quad q = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ $\quad 3{,}1415\dots$

reelle Zahlen : $r \in \mathbb{R}$ $\quad r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ → $= \frac{3}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \frac{4}{10^2} \dots$

ganz rationale Funktionen : konstant $f(x) = a_0$

lineare $f(x) = a_0 + a_1 x$

quadratische $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

2.1.3. Polynome

Ein Polynom ist eine rationale Funktion, die sich schreiben lässt als

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0$$

n endlich

diese Funktion ist ein Polynom vom Grad n

Außerdem sollen hier $\{a_i\}_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}$

2.1.4 Gebrochen rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{p_m(x)} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{Zählergrad } n \\ \leftarrow \text{Nennergrad } m \end{matrix}$$

$n = m = 1$ gebrochene lineare Funktion

Je nach Grad n und m unterscheidet man

$n < m$: echt gebrochen rationale Funktionen

$n \geq m$: unecht gebrochen —— " ——

Analogie: $\mathbb{Q} \ni \frac{p}{q} = \underbrace{\frac{10}{3}}_{\text{unecht}} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \underbrace{3}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{echt}, \in \mathbb{Q}}$

Beispiel:

$$\frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 1} = \underbrace{g(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{h(x)}_{\text{echter Rest}}$$

$$(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1) : (x^2 - 3x + 1) = \underbrace{2x^2 + 9x + 30}_{g(x)} + \underbrace{\frac{77x - 29}{x^2 - 3x + 1}}_{h(x)}$$

$$\begin{array}{l}
-(2x^4 - 6x^3 + 2x^2) \\
\hline
0 + 9x^3 + 3x^2 - 4x \\
\quad -(9x^3 - 27x^2 + 9x) \\
\hline
\quad 0 + 30x^2 - 13x + 1 \\
\quad -(+30x^2 - 90x + 30) \\
\hline
\quad 0 \quad 77x^1 - 29
\end{array}$$

Lösungen

1 a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

b) $\left(\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2^{-3}}\right)^{-12} = \left(2^{\frac{2}{3}} \, 2^{-\frac{3}{4}}\right)^{12} = \left(2^{\frac{8}{12} - \frac{9}{12}}\right)^{12} = \frac{1}{2}$

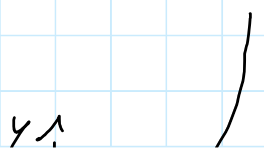
c) $\log_7 49 = 2$

d) $\lg \frac{1}{10} = \log_{10} \frac{1}{10} = -1$

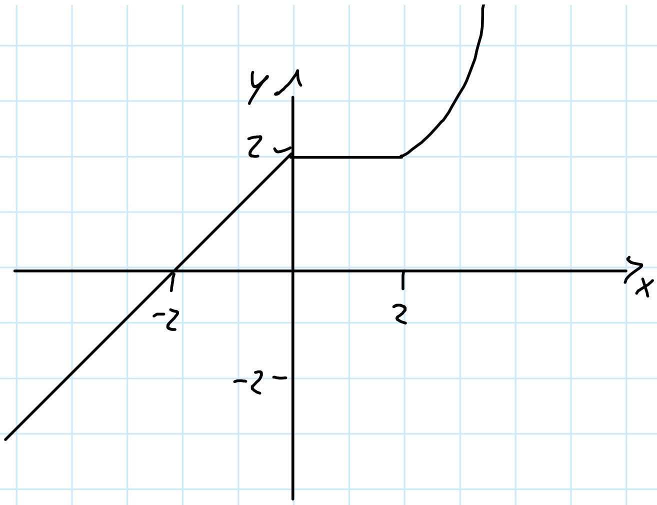
e) $\lg \sqrt[3]{1000} = \lg 1000^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \lg 1000 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$

f) $2^x = \frac{1}{8} \quad | \log_2$

$x = \log_2 \frac{1}{8} = -3$

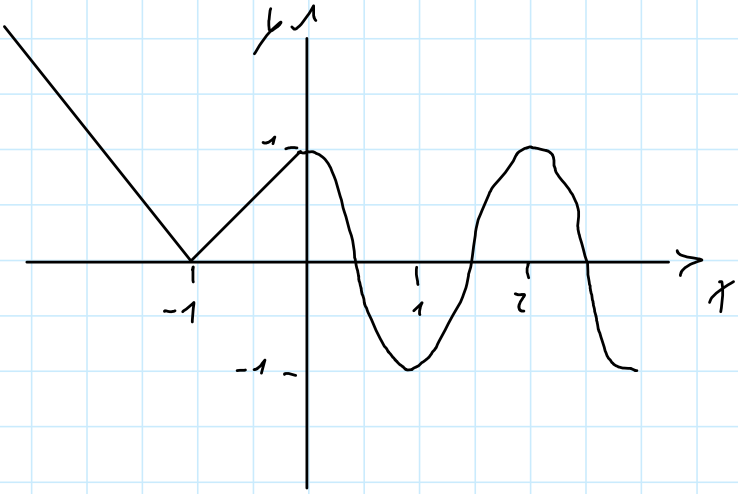


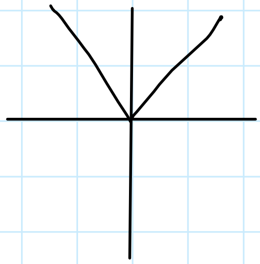
2 a)



$(-\infty; \infty)$

b)





$[-1; \infty)$

3 $\quad x+y = 12$

$y = x+2$

$x+x+2 = 12 \quad | -2$

$2x = 10$

$x = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 7$

4 $\quad$ i)a) $f+g = x-2+1-2x$

$= -x-1 \qquad D = \mathbb{R}$

$f - g = x - 2 - 1 + 2x$

$= 3x - 3 \qquad D = \mathbb{R}$

$f g = (x-2)(1-2x)$

$= x - 2 - 2x^2 + 4x$

$= -2x^2 + 5x - 2 \qquad D = \mathbb{R}$

$\frac{f}{g} = \frac{x-2}{1-2x} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

b) $\sin x + \cos x \qquad D = \mathbb{R}$

$\sin x - \cos x \qquad D = \mathbb{R}$

$\sin x \cos x \qquad D = \mathbb{R}$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$

ii) a) $g(x) = \ln x$

$f(x) = x + 1$

b) $g(x) = x^2$

$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

c) $g = x^2 \qquad h = g \circ f = g(f(x))$

$f = \cos x$

iii) a) $g \circ f = \sqrt{x^2} = |x| \qquad D = \mathbb{R}$

$f \circ g = \sqrt{x}^2 = x \qquad D = [0, \infty)$

$f \circ g = \sqrt{x}^{\,2} = x \qquad D = [0, \infty)$

b) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2$

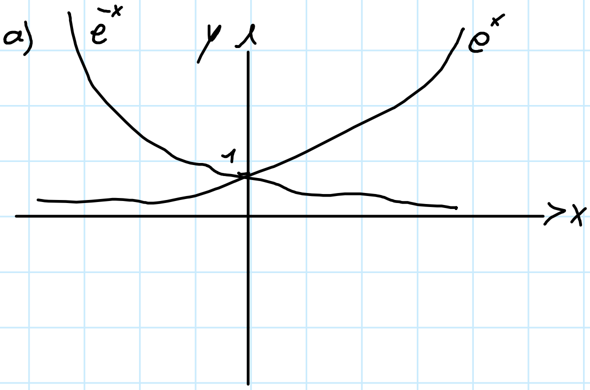
$= x + 2\,\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \qquad D = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} = (0, \infty)$

c) $\frac{1}{x^2 \sqrt{x}}$

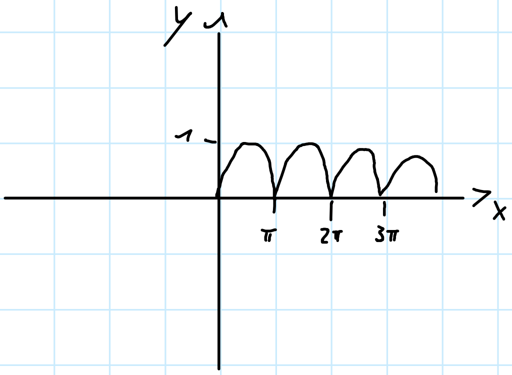
$= \frac{1}{\sqrt{x^5}} = x^{-\frac{5}{2}} \qquad D = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{x} = h \qquad D = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

5) a)

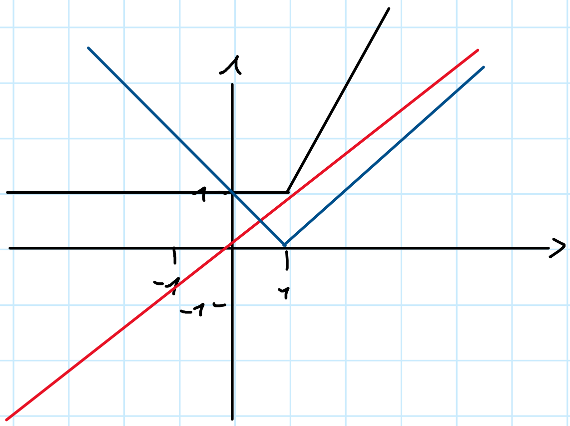


$(0; \infty)$

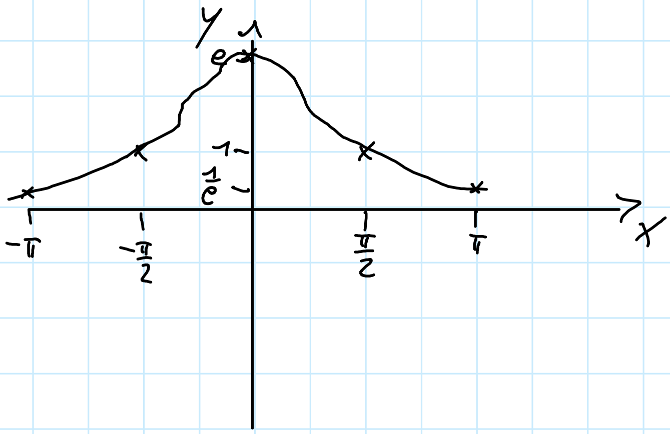


$[0, 1]$

c)



$[1; \infty)$



$[\frac{1}{e} ; e]$

ii) a) $\frac{5}{6} \sin(7x+8)$ $W = [-\frac{5}{6} ; \frac{5}{6}]$

Periodisch: $\frac{2\pi}{7}$

b) $\frac{1}{4+\sin x}$ $W = [\frac{1}{5} ; \frac{1}{3}]$ $\sin [-1; 1]$

Periodisch: 2π (sinus)

iii) $f(x) = x^3 - 39x - 70$ NS raten: -2

$$
\begin{aligned}
x^3 \quad & - 39x - 70 : x+2 = x^2 - 2x - 35 \\
x^3 + 2x^2 & \\
-2x^2 & - 4x \\
& - 35x
\end{aligned}
$$

$x^2 - 2x = 35 \quad | +1$

$(x-1)^2 = 36 \quad | \sqrt{\ }$

$x - 1 = \pm 6 \quad | + 1$

$x_1 = +7 \quad x_2 = -5$

$$f' = 3x^2 - 39$$

$$f'' = 6x$$

$$f''' = 6$$

Extrema $\quad 3x^2 - 39 = 0$

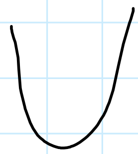
$$3x^2 = 39$$

$$x^2 = 13$$

$$x = \pm\sqrt{13}$$

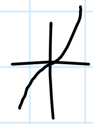
$x = -\sqrt{13}$ ist max

$x = \sqrt{13}$ ist min



x^2

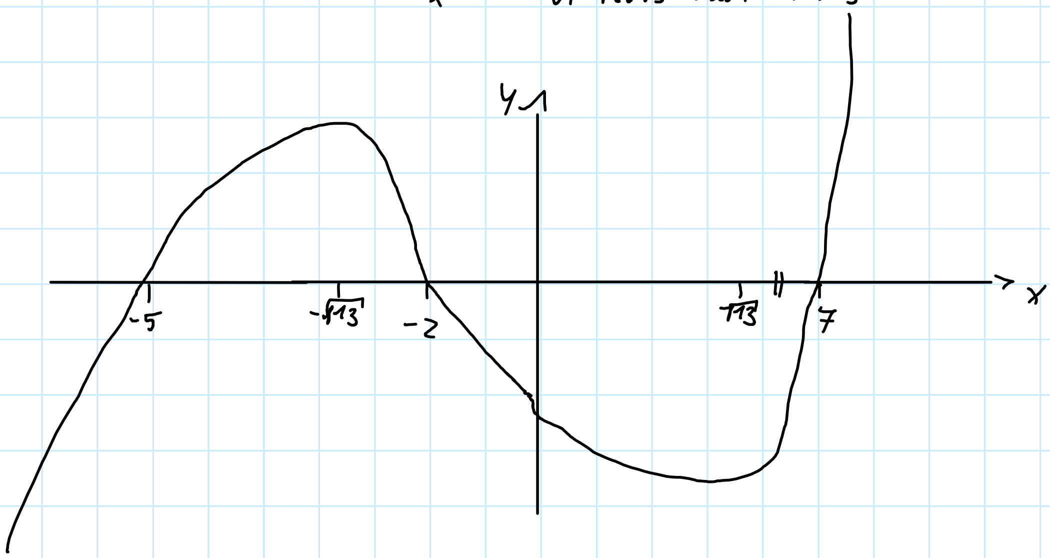
$f'' = 2$



x^3

$f''' = 6$

$6x = 0 \Rightarrow x = 0$ WP rechts nach links



6 $\quad \Delta T(t) = \Delta T_0 \, e^{-kt} = (T_0 - T_1)\, e^{-kt}$

$$\Delta T(t) = T(t) - T_1$$

$\Delta T_0 = T_0 - T_1$

geg: $T_1 = 20°C$; $T(t = \frac{1}{3}h) = 80°C$; $T(t=3h) = 30°C$

$\Delta T(\frac{1}{3}h) = 60°C = \Delta T_0 e^{-k\frac{1}{3}h}$

$\Delta T(3h) = 10°C = \Delta T_0 e^{-k3h}$

$\frac{\Delta T(3h)}{\Delta T(\frac{1}{3}h)} = \frac{10°C}{60°C} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{\Delta T_0 e^{-k3h}}{\Delta T_0 e^{-k\frac{1}{3}h}}$

$\frac{1}{6} = \frac{e^{-k3h}}{e^{-k\frac{1}{3}h}}$

$\frac{1}{6} = e^{k(\frac{1}{3}h - 3h)} \quad | \ln$

$-\frac{8}{3}kh = \ln\frac{1}{6} \quad | (-\frac{3}{8})$

$k = -\frac{3}{8}\ln\frac{1}{6}\ \frac{1}{h} \qquad [k] = \frac{1}{h} \qquad ($

$\Delta T_0 = \Delta T(3h) e^{k3h} = \Delta T(3h) e^{\ln(6^{\frac{3}{8}})3} = \Delta T(3h) e^{\ln(6^{\frac{9}{8}})}$

$= \Delta T(3h) \cdot 6^{\frac{9}{8}}$

$= 10 \cdot 6^{\frac{9}{8}}\ °C = 75{,}06°C$

$\Delta T_0 = T_0 - T_1$

$T_0 = \Delta T_0 + T_1 = 75{,}06°C + 20°C = 95{,}06°C$

$\Delta T(t) = 5°C \qquad 5°C = 75{,}06°C\ e^{-0{,}672\frac{t}{h}}$

$e^{-0{,}672\frac{t}{h}} = \frac{5}{75{,}06} \quad | \ln$

$$e^{-0{,}672\frac{t}{h}} = \frac{5}{75{,}06} \quad | \ln$$

$$-0{,}672\frac{t}{h} = \ln\frac{5}{75{,}06} \quad | :\left(-0{,}672\,\frac{1}{h}\right)$$

$$t \approx 4h$$