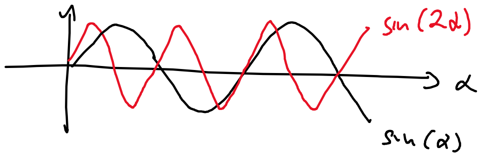
Vorlesung 6 - Vektoralgebra

Monday, 29 September 2025 09:07

3.3 Additionstheoreme



Winkelvielfache

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\vdots$$

Satz des Pythagoras: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$$\cos(2\alpha) = \underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha} - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Summen- / Differenzen von Winkeln

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

Produkte trigonometrischer Funktionen

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

Potenzen

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\alpha)\right)$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\alpha) - 1\right)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}\left(3\sin\alpha - \sin(3\alpha)\right)$$

→ Produkte und Potenzen lassen sich auf lineare Terme (Summen) von trigonometrischen Funktionen zurückführen $(e^x)^4 = e^{4x}$

Beweis Additionstheoreme: geometrisch, durch Reihendarstellung oder komplexe Exponentialfunktion

4. Lineare Algebra

4.1. Vektoren

Definition: Vektor

Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.
In einem zu einem K-Vektorraum K^n gehörigen n-dimensionalen Koordinatensystem kann ein Vektor durch n Komponenten dargestellt werden, die in einer Spalte oder Zeile aufgelistet werden.

K: Körper z.B. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = (b_1 \; b_2 \; \dots \; b_n)$$

Spaltenvektor Zeilenvektor

$a_i \in K$, $b_i \in K$, $\vec{a} \in K^n$, $\vec{b} \in K^n$

Jedem Vektor kann ein Punkt im Raum eindeutig zugeordnet werden.
(ein-eindeutig)
Zu diesem Punkt ist der Vektor der Ortsvektor.

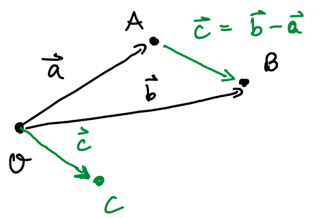
$$\vec{a} \longrightarrow A = \underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{\text{Koordinaten von } A}$$

Unterscheidung: Ortsvektor $\Leftrightarrow$ Relativvektor / Richtungsvektor

Ortsvektor: Führt vom Ursprung zum Punkt

Relativvektor / Richtungsvektor: Verbindet Punkte im Raum

Jeder Relativvektor ist Ortsvektor zu einem dritten Punkt



Definition: Der zu $\vec{a}$ transponierte Vektor $\vec{a}^T$ ist gegeben durch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{a}^T = (a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n)$$

$$(\vec{a}^T)^T = \vec{a}$$

Vektorrechenregeln

$$\underbrace{(\vec{a}+\vec{b})_i}_{\text{in } K^n} = \underbrace{a_i + b_i}_{\text{in } K}$$

insgesamt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ mit $c_i = a_i + b_i$
erneut ein Vektor!

Multiplikation mit einem Skalar (= Zahl)

Multiplikation mit einem Skalar (= Zahl)

$$\underset{\text{in } K^n}{(\alpha \vec{a})_i} = \underset{\text{in } K}{\alpha a_i} \quad , \quad \alpha \in K \qquad \alpha \vec{a} = \vec{b} \text{ wieder ein Vektor!}$$

Im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{C}^3$ definiert man

Kreuzprodukt : $\vec{a} \times \vec{b}$
Spatprodukt : $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$
Skalarprodukt : $\vec{a} \cdot \vec{b}$

4.2. Spezielle Produkte von Vektoren

$\boxed{A}$ Das Skalarprodukt

Definition für $\vec{a} \in K^n$, $\vec{b} \in K^n$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \in K$

als Element von K ein Skalar und das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

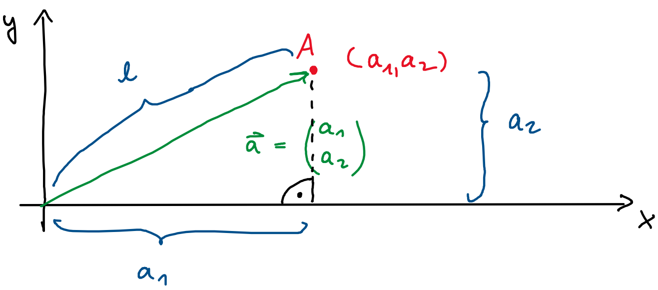
<u>Spezialfall</u>: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \overbrace{\sum_i a_i a_i}^{a^i \, a_i} = \sum_i a_i^2 = |\vec{a}|^2$

über das S-Produkt mit sich selbst definieren wir eine Norm

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_i a_i^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \geq 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^n$$

↳ euklidische Norm

$\mathbb{R}^2$:



Satz des Pythagoras:
$l^2 = a_1^2 + a_2^2$

$\Rightarrow l = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Euklidische Norm entspricht Länge des Vektors

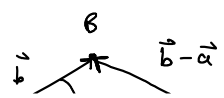
$\mathbb{R}^4$: $|\vec{a}| = \underbrace{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}_{m}$

Physik $(\underbrace{x}_{m}, \underbrace{y}_{m}, \underbrace{z}_{m}, \underbrace{c \cdot t}_{\underbrace{\frac{m}{s} \cdot s}_{m}})$

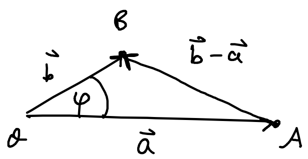
$\mathbb{R}^3$ $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Geometrische Bedeutung des allgemeinen Skalarprodukts

$\vec{a} \cdot \vec{b}$



$\vec{a} \cdot \vec{b}$



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}-\vec{a}$ bilden ein beliebiges Dreieck

In diesem Dreieck gilt der Kosinussatz

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\varphi)$$

Berechne $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a}) \cdot (\vec{b}-\vec{a})$

Distributivgesetz des Skalarproduktes

$$\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \\ b_3+c_3 \end{pmatrix}$$

im Körper K $\rightarrow$ $= a_1 \cdot (b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3)$

$$= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3$$

$$= \underbrace{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}_{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \underbrace{a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3}_{\vec{a}\cdot\vec{c}}$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2$$

Kosinussatz: $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$

einsetzen

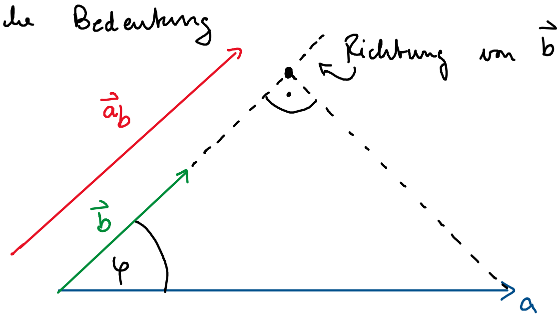
$$\Rightarrow \underbrace{\vec{b}^2}_{|\vec{b}|^2} - 2\vec{a}\vec{b} + \underbrace{\vec{a}^2}_{|\vec{a}|^2} = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \cancel{|\vec{b}|^2} - 2\vec{a}\vec{b} + \cancel{|\vec{a}|^2} = \cancel{|\vec{b}|^2} + \cancel{|\vec{a}|^2} - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$ Winkelformel

geometrische Bedeutung



a_b: Komponente von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$

$\vec{a}_b$: Projektion von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$

Richtung $\vec b$

$|\vec a_b| = a_b$

(1) rechtwinkeliges Dreieck: $\frac{a_b}{|\vec a|} = \cos\varphi$

(2) Winkelformel $\cos\varphi = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a||\vec b|}$

(1) ∧ (2) $\frac{a_b}{\cancel{|\vec a|}} = \frac{\vec a \cdot \vec b}{\cancel{|\vec a|}\,|\vec b|}$

$\Rightarrow a_b = \vec a \cdot \left(\frac{\vec b}{|\vec b|}\right)$

Das Skalarprodukt ist eine Projektion des Vektors $\vec a$ auf den Vektor (Richtung) $\vec b$. Wegen Kommutativität auch umgekehrt!

Der Vektor $\frac{\vec b}{|\vec b|}$ ist normiert, also hat er die Länge 1.

Projektion in Richtung eines Vektors

$$\vec a_b = \underbrace{\frac{\vec b}{|\vec b|}}_{\text{Richtung in } \vec b} \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec b|}\right)}_{\text{Komponente } a_b}$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

- $\vec a \parallel \vec b \wedge \varphi = 0° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b|$
- $\vec a \parallel \vec b \wedge \varphi = 180° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b = -|\vec a||\vec b|$
- $\vec a \perp \vec b \Rightarrow \vec a \cdot \vec b = 0$
- $\sphericalangle(\vec a, \vec b) < 90° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b > 0$
- $\sphericalangle(\vec a, \vec b) > 90° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b < 0$
- $\vec a \cdot \vec a = \vec a^2 = |\vec a|^2$ Norm / Länge $|\vec a|$
- $\vec a \cdot (\vec b + \vec c) = \vec a \cdot \vec b + \vec a \cdot \vec c$
- $\vec a \cdot \vec b = \vec b \cdot \vec a$

kein Skalarprodukt

Frage: Gilt das Assoziativgesetz? $\vec a \cdot \overbrace{(\vec b \cdot \vec c)}^{\text{Skalar}} \overset{?}{=} \overbrace{(\vec a \cdot \vec b)}^{\text{Skalar}} \cdot \vec c$

B Kreuzprodukt / Vektorprodukt

Definition: das KP zweier Vektoren $\vec a, \vec b \in \mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{C}^3$) ist gegeben durch

Definition: das KP zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{C}^3$) ist gegeben durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

geometrische Bedeutung:

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, \vec{b}$ Beweis: Übung durch Skalarprodukt
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem
3. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

$$V_Z = \pi R^2 h \qquad D = 2R = 4h \Leftrightarrow R = 2h$$

$$= \pi\, 4 h^3$$

$$\Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{V_Z}{4\pi}}$$

$$1\,fL = 10^{-15}\,L = 10^{-18}\,m^3 \Rightarrow V = 9 \cdot 10^{-17}\,m^3$$

$$\Rightarrow h = 2\,\mu m \qquad D = 8\,\mu m$$

b) $x \frac{km}{h} = x \frac{1000\,m}{3600\,s} = x \frac{1}{3{,}6} \frac{m}{s} \Rightarrow y \frac{m}{s} \hat{=} x \frac{km}{h} \cdot \frac{1}{3{,}6}$

c) $1 \frac{g}{cm^3}$

$$\Rightarrow 1 \frac{g}{cm^3} = 1 \frac{10^{-3}\,kg}{(10^{-2}\,m)^3} = 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

$453{,}6\,g = 1\,lb \quad | : 453{,}6$

$30{,}48\,cm \hat{=} 1\,ft \quad | : 30{,}48$

$$1 \frac{g}{cm^3} = 1 \frac{\frac{1}{453{,}6}\,lb}{\left(\frac{1}{30{,}48}\,ft\right)^3} = \frac{30{,}48^3\,ft^3}{453{,}6\,lb} = 62{,}43 \frac{lb}{ft^3}$$

d) $P_{PS} = 735{,}5\,W$ $\quad L_{Handy} = 3400\,mAh \quad U_{Handy} = 4{,}4\,V$

$P = U \cdot I \qquad E = P \cdot t$

$$E = U\,I\,t = 3\,400\,mAh \cdot 4{,}4\,V = 53{,}86\,kWs = 73\,PS\,s$$

$$3\,400 \cdot 10^{-3}\,A\,3600 \cdot 4{,}4\,V$$

Aufgabe 2

a) $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$\vec{CB} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

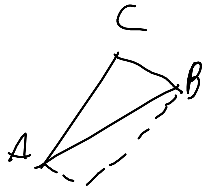
$\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{DG} = \vec{g} - \vec{d} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

$\vec{GF} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

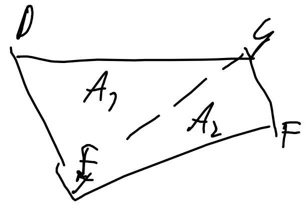
$\vec{FE} = \begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{ED} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$



$$\frac{1}{2}\,|\vec{AC} \times \vec{AB}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-7\end{pmatrix}\right|$$

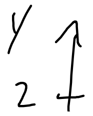
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2} = \frac{1}{2}\,7 = \frac{7}{2}$$

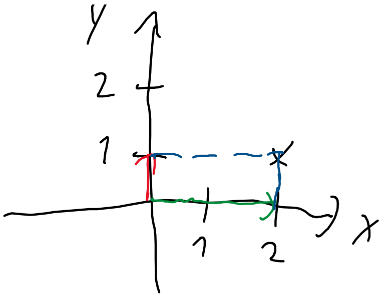


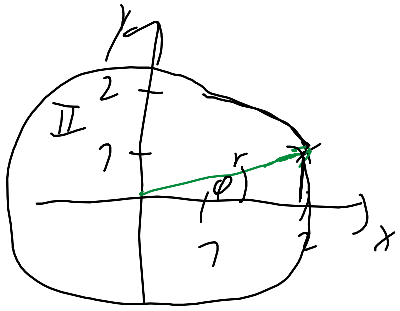
$A_1 = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$

$A_2 = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-9\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,9 = \frac{9}{2}$

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 6 + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$







$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$r=\sqrt{5}$

$\sin(\varphi)=\frac{y}{r}$

$\cos(\varphi)=\frac{x}{r}$

$\tan(\varphi)=\frac{y}{x}$

3 i) $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad r=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

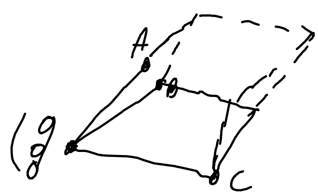
$\cos(\varphi)=\frac{x}{r} \iff \varphi=\arccos\left(\frac{x}{r}\right)=116°$

ii) $\vec{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\12\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-10\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{AC}=\vec{c}-\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\-10\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\70\end{pmatrix}\right|=35$

iii) $A=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$



Perfektes Spat bitte

$|(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}|=\left|\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right|=|6\cdot2+4\cdot2-2\cdot1|$

$=18$

iv) a) $y=3x-1$ and $y=7x-3$ $\qquad$ b) analog

$\tan(\varphi_1)=\frac{3}{1}$ $\iff$ $\varphi_1=71{,}57°$

$\tan(\varphi_2)=\frac{7}{1}$ $\qquad\;\;$ $\varphi_2=81{,}869°$

$$\Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = 10{,}30$$

(V) g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\4\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}4\\-1\\4\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4+a\cdot 1\\-1-2a\\4+3a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3b\\b\\6-5b\end{pmatrix} \begin{matrix}I\\II\\III\end{matrix}$$

II: $-1-2a=b \overset{\text{in } I}{\Rightarrow}$

$$4+a = 3(-1-2a)$$
$$4+a = -3-6a \quad | +6a \quad | -4$$
$$7a = -7 \quad | :7$$
$$a = -1$$

in II: $-1+2=b \Rightarrow b=1$

SP: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\4\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}}}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}\right|} = \frac{3-2-15}{\sqrt{14}\,\sqrt{35}} = -\sqrt{\frac{14}{35}} = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right) \approx 50{,}768^\circ \quad (129{,}232^\circ)$$

VI) $\underbrace{\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix}}_{E_1}$ $\qquad \begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\bullet\vec{x} = 5$

E_1 in Normalform

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22\\-11\\11\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{\begin{pmatrix}-22\\-11\\11\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-22\\-11\\11\end{pmatrix}\right|} = \frac{\cancel{11}\,1}{\cancel{11}\,1}\,\frac{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \vec{n}$$

$E_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{x} = 0 \quad | \cdot\sqrt{6}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\bullet\vec{x} = 0 \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=0 \qquad \vec{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{=0}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=0$$

E_1: $2x_1+x_2-x_3=0$ (I)

E_2: $-4x_1+3x_2+2x_3=5$ (II)

aus I $\Rightarrow$ $x_3=2x_1+x_2$ *

$\Rightarrow -4x_1+3x_2+4x_1+2x_2=5 \Rightarrow 5x_2=5 \Rightarrow x_2=1$

$x_2=1$ in * : $x_3=2x_1+1$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\1\\2x_1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\xi\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

4c) $\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}+(\vec{a}\,\vec{b})(\vec{a}\,\vec{b})=(\vec{a}\,\vec{a})(\vec{b}\,\vec{b})$

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})=\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)(a_2b_3-a_3b_2)+(a_3b_1-a_1b_3)\cdot(a_3b_1-a_1b_3)+(a_1b_2-a_2b_1)\cdot(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$=a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_3b_2+a_3^2b_2^2$$
$$+a_3^2b_1^2-2a_3a_1b_1b_3+a_1^2b_3^2$$
$$+a_1^2b_2^2-2a_2b_1a_1b_2+a_2^3b_1^2$$

Jetzt Betrachte $(\vec{a}\,\vec{b})(\vec{a}\,\vec{b})=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$

$$=a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3+2a_2b_2a_3b_3$$

$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\,\vec{b})(\vec{a}\,\vec{b})$

$$=a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2$$

$$= a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

$$= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2$$

$$= (\vec{a}\,\vec{a})(\vec{b}\,\vec{b})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \overset{!}{=} A$$

$A = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi \Leftarrow$ allgemein für Kreuzprodukt, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren ist.

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = A^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \underbrace{\sin^2(\varphi)}_{= 1 - \cos^2(\varphi)}$$ Additionstheorem

Winkelformel: $\cos^2(\varphi) = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2$

$$\Rightarrow A^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cdot \left(1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2}\right) = \underbrace{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |(\vec{a} \times \vec{b})|^2}_{\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$