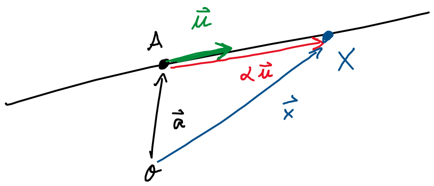
4.3 Geraden und Ebenen

[A] Geradengleichungen $\quad \vec{x} \in G \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} + \alpha\,\vec{u}$

Skalar: α — Aufpunkt: $\vec{a}$ — Richtungsvektor: $\vec{u}$



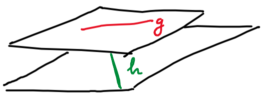
Schnitte von Geraden

g, h mit Schnittmenge S

$\mathbb{R}^2$:
1. $g \neq h,\ g \parallel h \Rightarrow S = \{\}$
2. $g = h,\ S = g = h$
3. eindeutige Lösung: $S = \{\vec{s}\}$

$\mathbb{R}^3$: 1, 2, 3 analog — 1 bedeutet Richtungsvektoren kolinear bzw parallel $\vec{u}_g \parallel \vec{u}_h$

4. wind schief g, h in parallelen Ebenen

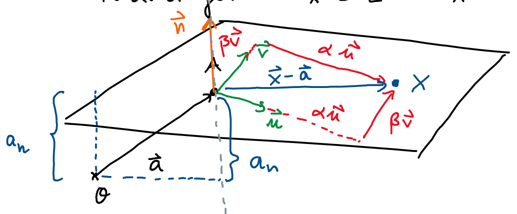


$\rightarrow$ auch kein Schnitt

[B] Ebenengleichungen

Parameterform: $\vec{x} \in E \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ und $\neg(\vec{u} \parallel \vec{v})$

nicht $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$ — λ existiert nicht



Normalenform: $\quad \vec{n} = \dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$ Normierung $\quad |\vec{n}| = 1$

$\vec{x} \in E \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \underbrace{(\vec{x} - \vec{a})}\perp \vec{n}$

$\hookrightarrow$ Hessesche Normalenform

$(\vec{x} - \vec{a})\,\vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{n} = \vec{a}\cdot\vec{n}$ $\quad$ wenn $\vec{n}$ normiert ist, dann ist $\vec{a}\cdot\vec{n}$ die Komponente a_n der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{n}$

$= d$ = Abstand Ebene zum Ursprung

$\hookrightarrow$ Koordinatenform

$\vec{x}\cdot\vec{n} = d \Rightarrow x_1 \cdot n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d$

Hessesche Normalenform in Parameterform ?

Parameterform in Hessesche Normalenform einfach: $\vec{u}, \vec{v}$ gegeben $\rightarrow$ berechne $\vec{n}$

__Vorgehen__

1. Finde einen Punkt, der $\vec{x}\cdot\vec{n} = d$ erfüllt

bzw.: [illegible]

Vorgehen

1. Finde einen Punkt, der $\vec{x}\cdot\vec{n} = d$ erfüllt

bspw: $x_i = 0$ außer für ein i $\qquad x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d$

$x_2 = x_3 = 0, \; x_1 \neq 0$

erster Punkt: $\begin{pmatrix} d/n_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_1 \qquad x_1 n_1 = d$

2. Finde einen zweiten Punkt (bspw $\begin{pmatrix} 0 \\ d/n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow$ Differenz zwischen Punkten liefert Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$

3. Richtungsvektor $\vec{v}$

$\swarrow$ dritter Punkt $\qquad \searrow$ $\vec{u} \times \vec{n}$

Bsp: $y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\uparrow$ $d = 0$

$y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_1$

zweiter Punkt: $y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = -2y_2 \qquad y_1 = -2, \; y_2 = 1$

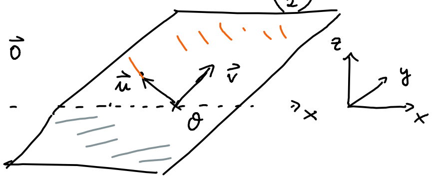
$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \vec{u} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 0-6 \\ -4-2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \vec{0}$



5.4. Lineare Abbildungen

Definition: Eine Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ zwischen K-Vektorräumen V, V' heißt lineare Abbildung, falls gilt

(i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ für $a, b \in V$

(ii) $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ für $a \in V, \; \alpha \in K$ $\quad (V = K^n)$

(i) und (ii) lassen sich zusammenfassen zu

$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) \qquad \alpha, \beta \in K, \; a, b \in V$

Folgerung: Ist f lineare Abbildung, so gilt $f(0) = 0$

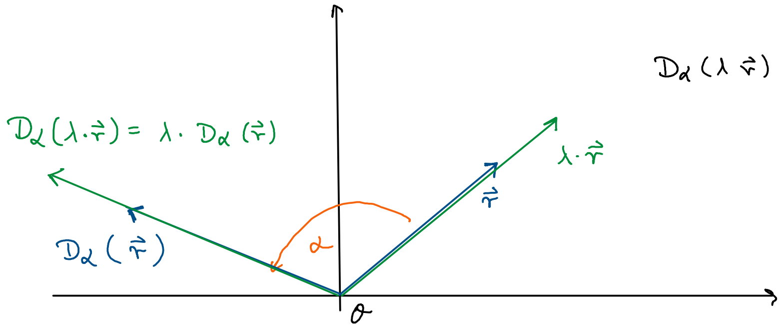
Beweis: $f(\vec{0}) = f(a-a) = \underbrace{f(a) - f(a)}_{0' \text{ in } V'} = 0$

Beispiele linearer Abbildungen:

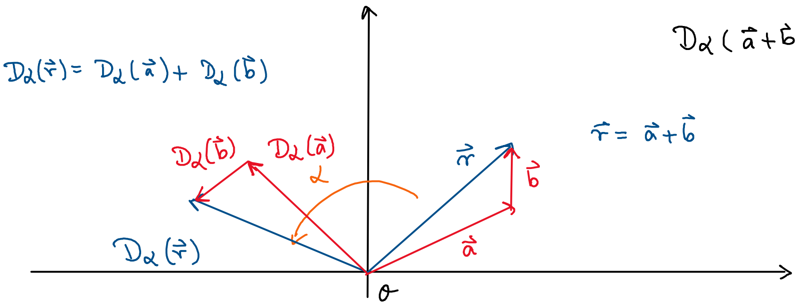
- $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x, \quad f(x) = \alpha x \quad$ aber lineare Fkt $\neq$ lineare Abb.
  $f(x) = \alpha x + \beta$ keine lin. Abb
  denn $f(0) = \beta \neq 0 \qquad \alpha, \beta \in K$
  $x \in V = K^1 = K$
- $\mathbb{R}^2$: Drehung um Ursprung $D_\alpha(\vec{r})$ um Winkel α

$\uparrow$

Drehung um Ursprung $D_\alpha(\vec r)$ ...



$D_\alpha(\lambda\vec r) = \lambda D_\alpha(\vec r)$



$D_\alpha(\vec a + \vec b) = D_\alpha(\vec a) + D_\alpha(\vec b)$

$\Rightarrow$ Die Drehung um den Ursprung ist eine lineare Abbildung.

5.5. Matrizen

Es sei K ein Körper. Zu $m,n \in \mathbb{N}$ ist das System

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad (K^{m\times n})$$

eine Matrix

a_{ij} sind Elemente der Matrix, auch Matrixelemente

Vektoren sind Matrizen aus $\underbrace{\mathbb{R}^{1\times n}}_{\text{Zeilenvektoren}}$ oder $\underbrace{\mathbb{R}^{n\times 1}}_{\text{Spaltenvektoren}}$

Rechenregeln für Matrizen

1. $A+B=C$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für alle i,j

   Bedingung: Dimensionen gleich m,n gleich $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

   elementweise Addition

2. $\alpha A = B$ mit $b_{ij} = \alpha a_{ij}$

   elementweise Multiplikation mit einem Skalar

3. Matrixmultiplikation (sozusagen Erweiterung des Skalarprodukts)

   $A\cdot B = C \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj}$

   m, n, m, ℓ, ℓ, n

   nur möglich, falls

   $A \in \mathbb{R}^{m\times\ell}, \quad B \in \mathbb{R}^{\ell\times n} \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

   Assoziativgesetz: $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C = A\cdot B\cdot C$

   $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

   k $\quad j$ $\quad 1 \quad 2 \quad 3$

   $(\quad) \; (b_{11} \; b_{12} \; b_{13}) \quad (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \quad \ldots \quad)$

Assoziativgesetz: $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C = A\cdot B\cdot C$

$A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\qquad B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\begin{array}{c|c} & k \\ \hline \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} j=1 & j=2 & j=3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{c_{11}}{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{pmatrix}$$

j $\quad 1 \qquad \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

Fasst man die Elemente der Matrizen zu Zeilen- und Spaltenvektoren zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \end{pmatrix} \qquad B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \text{ usw}$$

so stehen im Matrixprodukt die Skalarprodukte

$$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1\cdot\vec{b}_1 & \vec{a}_1\vec{b}_2 & \vec{a}_1\vec{b}_3 \\ \vec{a}_2\vec{b}_1 & \vec{a}_2\vec{b}_2 & \vec{a}_2\vec{b}_3 \end{pmatrix}$$

Umkehr: Das Skalarprodukt von Vektoren ist das Matrixprodukt von Zeilen- und Spaltenvektor

Satz: a) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiert mit $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ eine lineare Abbildung $A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y}$

$A\vec{x}$ gegeben durch Matrixprodukt

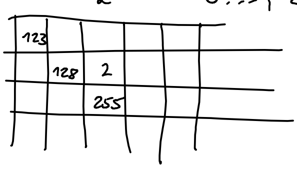
$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1\times n}$

b) Jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kann als Matrix dargestellt werden !!!

$\sin(x) = x \qquad \sin(a+b) \neq \sin(a) + \sin(b)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cdot\underbrace{\cos(b)}_{\approx 1} + \sin(b)\underbrace{\cos(a)}_{\approx 1}$

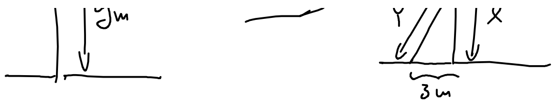
$2^8 \Rightarrow 0,\dots,255$



Vorrechnen Blatt 7:

Aufgabe 1:

x gesucht



$$x+y = 9\,m \Leftrightarrow x = 9m - y \Leftrightarrow y = 9m - x$$

$$x^2 + 3^2\,m = y^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + 9 = 81 - 18x + \cancel{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 18x = 72 \Rightarrow x = 4$$ ⟹ Stange bei 4m abgeknickt

Aufgabe 2:

$M = 2\cdot(T_a + T_j)$ (I) $\qquad$ II in I $\Rightarrow M = 6\cdot T_j$ IV

$T_a = 2\cdot T_j$ (II) $\qquad$ IV in III $\quad 6\cdot T_j + 9 = 3\cdot(T_j+9) \Rightarrow T_j = 6$

$M + 9 = (T_j + 9)\cdot 3$ (III)

$$M = 6\cdot 6 = 36\,,\quad T_a = 2\cdot 6 = 12$$

Aufgabe 3.

i) a) $\begin{matrix} 2x+3y=8 \\ x-y=-1 \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b}$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad 5y = 10 \Rightarrow y = 2$

$x - 2 = -1 \;|+2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

b) $\begin{matrix} x-2y=-7 \\ 2x+3y=0 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 7 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = 2$

$x - 2\cdot 2 = -7 \;|+4 \Rightarrow x = -3$

c) $\begin{matrix} 5x+y+2z=3 \\ -2x+z=-1 \\ x+y+z=0 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+2\cdot\text{I}]{\text{II}-5\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{III}+\frac{1}{2}\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \frac{3}{2}z = \frac{1}{2} \;|\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{1}{3} \qquad x - 1 + \frac{1}{3} = 0$

$-4y - 1 = 3 \Rightarrow y = -1 \qquad \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

ii) a) $\begin{matrix} 2x+3y=b \\ x+ay=4 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b \\ 1 & a & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3-2a & b-8 \\ 1 & a & 4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3-2a & b-8 \\ 2 & 2a & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3-2a & b-8 \\ 2 & 3 & b \end{array}\right) \xrightarrow[(3-2a)\text{II}-3\cdot\text{I}]{\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3-2a & b-8 \\ (3-2a)2 & 0 & (3-2a)b-3\cdot(b-8) \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\frac{\text{II}}{2}]{\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3-2a & b-8 \\ 3-2a & 0 & -ab+12 \end{array}\right)$ $\quad$ 1 Fall: $a = \frac{3}{2} \Rightarrow 3-2a = 0$

$\hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b-8 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}b+12 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} b-8=0 \\ -\frac{3}{2}b+12=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow a = \frac{3}{2}\,,\; b = 8 \quad \mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\}$

2. Fall $\quad a \neq \frac{3}{2} \Rightarrow 3-2a \neq 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3-2a & b-8 \\ 3-2a & 0 & -ab+12 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3-2a}\cdot\text{II}]{\frac{1}{3-2a}\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{b-8}{3-2a} \\ 1 & 0 & \frac{12-ab}{3-2a} \end{array}\right) \qquad \mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ \frac{b-8}{12-ab}\cdot x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b-8}{12-ab} \end{pmatrix}$$

$x = \frac{12-ab}{3-2a}\,,\quad y = \frac{b-8}{3-2a} \qquad \frac{y}{x} = \frac{b-8}{3-2a}\cdot\frac{3-2a}{12-ab} = \frac{b-8}{12-ab} \Rightarrow y = \frac{b-8}{12-ab}\cdot x$

b) $\begin{matrix} x+2y-z=s \\ x+y=1 \\ y-z=2 \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & s \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & s-1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & s-3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$s - 3 = 0 \Rightarrow s = 3$

$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

$y - z = 2 \Rightarrow z = y - 2 = 1 - x - 2 = -1 - x$

$\rightsquigarrow \mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 1-x \\ -1-x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.

(1) $a + e = b - e = c\cdot e = \frac{d}{\;}$ (II) $a + b + c + d = 2000 \quad a < 100$

Aufgabe 5.

$(I)\ a+e = b-e = c\cdot e = \frac{d}{e}$, $(II)\ a+b+c+d = 2000$, $a < 100$

$\Rightarrow a = c\cdot e - e,\ b = c\cdot e + e,\ d = c\cdot e\cdot e$

$2000 = (c\cdot e - e) + (c\cdot e + e) + c + (c\cdot e\cdot e)$

$= c\cdot e - \cancel{e} + c\cdot e + \cancel{e} + c + c\cdot e^2$

$= c\cdot(\underbrace{2e+1+e^2}_{=e^2+2e+1}) = c\cdot(e+1)^2$

$c\cdot e - e = e\cdot(c-1) < 100\ (III)$

Fälle: 1. $1 \le e+1 \le 4$

$c = \frac{2000}{(e+1)^2} \ge \frac{2000}{16} = 125$ ← widerspricht III

2. $5 \le e+1 \le 8$

$c \ge \frac{2000}{64} > 30$ ← widerspricht III

3. $9 \le e+1 \le 10$

$c \ge \frac{2000}{100} = 20$ ← " "

4. $e+1 \ge 11$, $(e+1)^2$ Teiler v. 2000

$e+1 = 20,\ c = 5,\ a = e\cdot(c-1) = 19\cdot 4 = 76$

Aufgabe 4: BWL-Kram

B

$B\vec{x} = \vec{b}$ ← Anzahl benötigter Edukte

↑ Anzahl benötigter Produkte

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{Teile} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} x & y & z \end{matrix}}^{\text{Modelle}} \\ \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 12 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162 \\ 372 \\ 81 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} = I_3 = E_3$$

ii) a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 4 & -2 & -1 \\ 8 & -6 & -4 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3+2 & -10+6+4 & 4-9+5 \\ -3+1+2 & 5+2+4 & -2-3+5 \\ -2+2 & -4+4 & 6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$= 11\cdot\mathbb{1}$

ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & A^{-1} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} I \\ II-2I \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 3I+II \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{matrix} \frac{1}{6}\cdot I \\ -\frac{1}{9}\cdot II \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

$$\boxed{A A^{-1} = \mathbb{1} = A^{-1} A}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{matrix} I \\ II-2I \\ III-3I \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} I+III \\ II \\ III-3II \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{matrix} I+III \\ -II \\ -III \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{matrix} I \\ II-2I \\ III+I \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{matrix} 2\cdot I+II-III \\ \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow 2I\ (4\ 0\ 0 \mid -2\ 2\ -2) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$-1 \quad 2 \quad 1 \mid 0 \quad 0 \quad 1 \qquad III + I \quad 0 \quad 0 \quad 2 \mid 1 \quad 0 \quad 1 \qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 2 \mid 1 \quad 0 \quad 1$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} 2I \\ II \\ 2\cdot III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \underbrace{2 \quad 0 \quad 2}_{4\cdot A^{-1}} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - I + II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow$ nicht invertierbar ! (wegen Nullzeile)

iv)

$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \mid A^{-1}(\;)$

$\Rightarrow \cancel{A^{-1}}(\cancel{A} \cdot \vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$