

1 Grenzwerte und Stetigkeit

- (i) Bestimmen Sie das Verhalten der folgenden Funktionen f mit $f(x) =$

a) $\frac{3}{x-1}, x \rightarrow \infty$

c) $\frac{2(x-2)}{x^2-4}, x \rightarrow 2$

e) $\frac{(x-2)^3}{x^2+1}, x \rightarrow \infty$

b) $\frac{3}{(x-1)^2}, x \rightarrow 1$

d) $\frac{2(x-2)}{x^2-4}, x \rightarrow -2$

f) $\frac{x^2+1}{(x-2)^3}, x \rightarrow \infty$

- (ii) Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und geben Sie im Fall von Unstetigkeiten die Grenzwerte an.

a) $f(x) = 2|x|$

b) $f(x) = |(x-1)^2|$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases}$

f) $\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2+x-2}, & x \neq -2 \\ \frac{1}{3}, & x = -2 \end{cases}$

h) $f(x) = \frac{2x^2+4x-6}{x^2+x-2}$

- (iii) Skizzieren Sie mithilfe von Asymptoten und Grenzwerten.

a) $\frac{2-x^2}{1-x}$

b) $\frac{\frac{x^3}{2} - 2x + 1}{x-2}$

2 Partialbruchzerlegung

- (i) Vereinfachen Sie durch Partialbruchzerlegung.

a) $\frac{1}{x^2-25}$

b) $\frac{x+29}{x^2+3x-28}$

c) $\frac{3x^2+5x-2}{(x^2+1)(3x+1)}$

- (ii) Vereinfachen Sie durch Partialbruchzerlegung. Dividieren Sie dazu die Polynome, um „Grad des Nenners $\geq$ Grad des Zählers“ zu erhalten.

a) $\frac{2x^3-x^2-10x+19}{x^2+x-6}$

b) $\frac{x^4-5x^3+7x^2-13x-10}{x^3-5x^2}$

3 Reihen

a) Schreiben Sie als Reihe mit Summenzeichen.

$$a) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots = \sum$$

$$b) 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots = \sum$$

$$c) 3 + 7 + 11 + 15 + \dots = \sum$$

$$d) \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots = \sum$$

$$e) 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + \dots = \sum$$

$$f) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum$$

$$g) 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots = \zeta(z) = \sum$$

Bemerkung: Wer zeigen kann, dass für $\zeta(z)$, $z \in \mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) alle Nullstellen den Realteil $1/2$ haben bekommt 1 000 000 \$ (USD) vom Clay Mathematics Institute in Cambridge (Massachusetts).

b) Leiten Sie die Gaußsche Summenformel her.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Verwenden Sie dazu die ganz allgemeine Aussage (überlegen Sie, was dies bedeutet):

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \quad .$$

und berechnen Sie zum einen $(k+1)^2 - k^2 = \dots$ und überlegen Sie nun, was

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) = \dots$$

ergibt und verwenden Sie obiges um $\sum_{k=1}^n k$ auszurechnen.

Die Story dahinter ist, der kleine Gauß war in der Grundschule und weil der Lehrer seine Ruhe haben wollte, gab er den Schülern die Aufgabe, alle Zahlen bis 100 zusammenzuaddieren. Er hoffte etwas Pause zu haben, aber der kleine Gauß meldete sich kurze Zeit später mit dem Ergebnis 5050. Als der Lehrer fragte, wie er das so schnell gemacht hat, sagte der kleine Gauß: Na ja $1+100 = 101$, $2+99 = 101$ das ganze passt genau bis zur $50+51$, also $100/2 \cdot 101 = 10100/2 = 5050$. Nun ist obige Formel sogar logisch, oder?

Viel Spaß beim Lösen. ☺



Carl Friedrich Gauß



Gauß und Gauss sind Weiterleitungen auf diesen Artikel. Zu weiteren Personen und Bedeutungen siehe [Gauß \(Begriffsklärung\)](#).

Johann Carl Friedrich Gauß (latinisiert *Carolus Fridericus Gauss*; * 30. April 1777 in Braunschweig, Fürstentum Braunschweig-Wolfenbüttel; † 23. Februar 1855 in Göttingen, Königreich Hannover) war ein deutscher Mathematiker, Statistiker, Astronom, Geodät, Elektrotechniker und Physiker. Wegen seiner überragenden wissenschaftlichen Leistungen galt er bereits zu seinen Lebzeiten als *Princeps mathematicorum* (Fürst der Mathematiker). Seine Tätigkeit erstreckte sich neben der Reinen Mathematik auch auf angewandte Gebiete, zum Beispiel war er mit der Landesvermessung des Königreichs Hannover beauftragt, er erfind zusammen mit [Wilhelm Eduard Weber](#) als einer der Ersten elektromagnetische [Telegrafie](#) und beide wandten sie als Erste über längere Strecken an, er entwickelte [Magnetometer](#) und er initiierte ein weltweites Netz von Stationen zur Erforschung des [Erdmagnetismus](#).

Inhaltsverzeichnis [\[Verbergen\]](#)

1 Epochale Bedeutung

2 Leben

2.1 Eltern, Kindheit und Jugend



Carl Friedrich Gauß ([Gottlieb Biermann](#), 1887, Kopie nach dem