5.6. Lineare Gleichungssysteme

Definition

Für $a_{ij} \in K$ und $b_i \in K$

wobei $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$

nennt man das System

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} m \text{ Gleichungen}$$

ein <u>lineares Gleichungssystem</u> (LGS) mit <u>Koeffizienten</u> a_{ij} und den <u>Unbekannten</u> $x_1, \dots, x_n$.

<u>Bsp</u>. ① $x_1 + 2x_2 = 0$

② $3x_1 - x_2 = 4$

traditionell. ① $\Rightarrow x_1 = -2x_2$

in ② $3 \cdot (-2x_2) - x_2 = 4$

$-6x_2 - x_2 = 4$

$-7x_2 = 4$

$x_2 = -\frac{4}{7} \Rightarrow x_1 = \frac{8}{7}$

Mithilfe der Matrixmultiplikation lässt sich das System schreiben als $A\vec{x} = \vec{b}$

<u>Bsp</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$A \cdot \vec{x}$

$A \cdot (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A \cdot \vec{x} + \beta A \cdot \vec{y}$

A Koeffizientenmatrix

<u>Äquivalenzumformungen</u>

Das LGS ist immernoch vollständig und „beinhaltet die gleiche Information" wenn man Vielfache von Gleichungen addiert.

d.h. LGS

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \vdots \\ (m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vdots$$

$$(m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Bsp. Ersetze Gleichung (1) durch $\alpha \cdot (1) + \beta (m) \rightarrow$ neues LGS $\hat{=}$ LGS'

LGS'

$$(1) \quad (\alpha a_{11} + \beta a_{m1}) x_1 + \dots + (\alpha a_{1n} + \beta a_{mn}) x_n = \alpha b_1 + \beta b_m$$

$$(2) \quad a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$(m) \quad a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

LGS': $A' \vec{x} = \vec{b}'$

LGS' hat die gleichen Lösungen wie LGS

Lösungsmethoden zu LGSen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}}_{\vec{b}} \right. = (A \mid \vec{b})$$

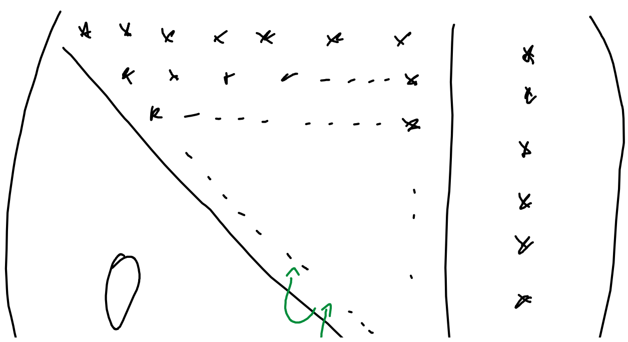
Idee: Level 1: Bringe die Matrix auf Dreiecksform $\rightarrow$ Wiederholtes Einsetzen
Level 2. —"— Diagonalform

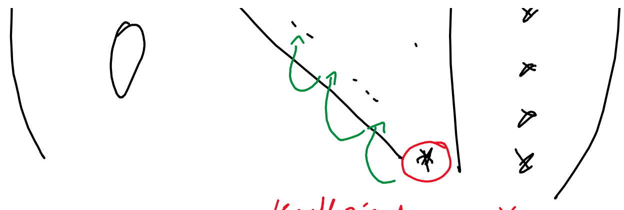
Schritt 1. subtrahiere von allen Zeilen die erste Zeile multipliziert mit (jeweils von der i-ten) $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, erste Zeile bleibt stehen

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n} & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \\ 0 & * & & * & * \\ 0 & * & & * & * \\ 0 & * & & * & * \\ 0 & * & & * & * \end{array}\right)$$

Nullen erzeugt — Untermatrix — Teilvektor

weitere Operationen: Schritte $2 - m$
gleiche Umformung auf Untermatrix und weitere Untermatrizen anwenden





Koeffizient von x_n

$\rightarrow$ erhalte x_n

<u>Beispiel</u>

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$(A|\vec{b}) = \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left[\text{erster Schritt (siehe oben)} \quad \sim \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} - \frac{\text{I}}{2} \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \text{I} \\ 2\text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Tauschen von Zeilen: (Achtung bei geometrischen Betrachtungen
↳ Tauschen von Achsen)

... ändert nicht den Gehalt des LGS!

$$\sim \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{III} \\ \text{II} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ 3\text{II} + \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Level 1 $\rightarrow$ Lösen einfach möglich

III: $5x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = 1$

II: $x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + 2 = 0$
$\Rightarrow x_2 = -2$

I: $2x_1 - 2 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spaltenvertauschungen: noch gefährlicher:
Achsen (Unbekannte) getauscht
im Urbild!

Level 2: Diagonalform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}/5 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \text{I} + \text{III} \\ \text{II} - \text{III} \cdot 2 \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \text{I} - \text{II} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \text{I}/2 \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\text{Einheitsmatrix } \mathbb{1}} & \begin{array}{c} 2 \\ -2 \\ 1 \end{array} \end{array}\right)$$

I: $x_1 = 2$
II: $x_2 = -2$
III: $x_3 = 1$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E_3 $\quad \mathbb{1}_3$ $\uparrow$ $\quad \mathbb{1}$

Einheitsmatrix: Identitätsabbildung

$$\mathbb{1}\,\vec{x} = \vec{x} \quad \hat{=} \quad f(x) = x$$

bei Funktionen

Vektoreinheiten: Einheitsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

$$\underbrace{\underset{\vec e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} \quad \underset{\vec e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} \quad \underset{\vec e_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}}_{\left(\vec e_1\ \vec e_2\ \vec e_3\right) = \mathbb{1}} \qquad \vec x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\vec e_1 + x_2\vec e_2 + x_3\vec e_3$$

$$A\vec x = \vec b \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Dreiecksform}}}{A'}\vec x = \vec b\,' \longrightarrow \mathbb{1}\vec x = \vec b\,''$$

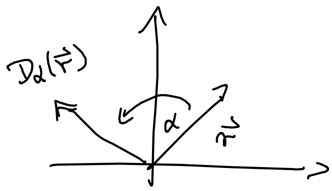
Inverse Matrizen

Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ quadratisch, so ist es möglich, dass A eine Inverse A^{-1} besitzt. Ist dies der Fall so ist A <u>invertierbar</u>.

$$A A^{-1} = A^{-1} A = \mathbb{1}$$

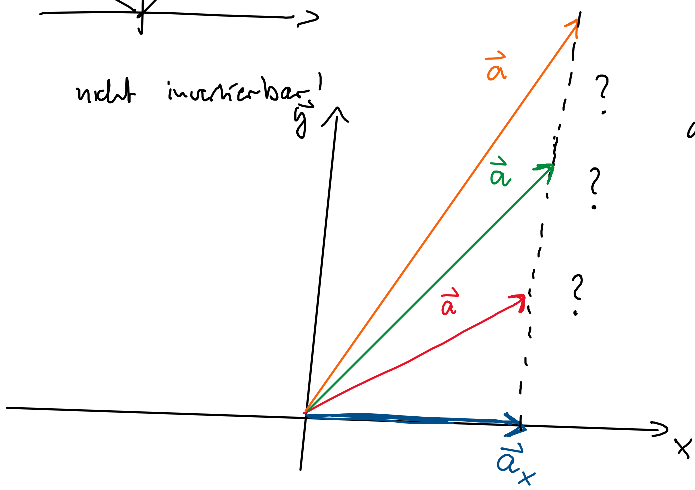
$$A\vec x = \vec y \Rightarrow A^{-1}\vec y = \vec x$$

Beispiel: invertierbar



$$D_\alpha^{-1} = D_{-\alpha} \qquad D_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

nicht invertierbar!



alle Vektoren führen zur gleichen Projektion, falls

$$\vec a = \begin{pmatrix}a_x\\ y\end{pmatrix}$$

Bestimmung der inversen Matrix

Löse das LGS $A^{-1}A = \mathbb{1}$ bzw. $A A^{-1} = \mathbb{1}$

$$\left(A \,\middle|\, \mathbb{1}\right) \quad \text{z.B.} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\mathbb{1} \,\middle|\, A^{-1}\right) \quad \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 3/5 & 2/5\\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & -4/5 & -1/5\\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{-4/5 \quad 2/5}_{} & & 3/5\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ -4/5 & 2/5 & 3/5 \end{matrix} \right)$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{A^{-1}}$

Nun: gegeben $A\vec{x} = \vec{b}$, bestimme A^{-1}

$\longrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Beweis: $A\vec{x} = \vec{b} \quad | \; A^{-1}$ von links

$\underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}}\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

6. Differenzialrechnung

6.0. Partialbruchzerlegung

gebrochen rationale Funktion mit Nennergrad > Zählergrad
$\rightarrow$ echt gebrochen

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} \overset{!}{=} \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_q}{(x-x_q)^{k_q}}$$

x_i: Nullstellen $i = 1 \dots q$ der Vielfachheit k_i

Vorgehen:

(1) kürzen mit $b_m \rightarrow c_i = \frac{a_i}{b_m}, \; d_i = \frac{b_i}{b_m}$

$$f(x) = \frac{c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0}{1 x^m + \dots + d_1 x + d_0}$$

(2) Nullstellen des Nenners bestimmen

$x_1, x_2, \dots, x_q, \; q \leq m$

(3) Zerlegung des Nennerpolynoms

In $\mathbb{R}$: es bleiben Polynome übrig (keine Linearfaktoren)

$\mathbb{R}$: $x^m + \dots + d_1 x + d_0 = (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}$

$\mathbb{C}$: $= (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-x_q)^{k_q}$

(4) Zerlegung von f in eine Summe von Brüchen

$f(x) =$

gilt für alle Terme in $\mathbb{C}$

(1. Nullstelle) $\frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \frac{A_{13}}{(x-x_1)^3} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}$

(2. Nullstelle) $+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}$

in $\mathbb{C}$ (2. Nullstelle) $+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}$

$\vdots$

übrige Terme in $\mathbb{R}$ $+ \frac{B_{11}+C_{11}x}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}+C_{12}x}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}+C_{1l_1}x}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}$

$+ \frac{B_{21}+C_{21}x}{x^2+p_2x+q_2} + \dots$

zunächst: Koeffizienten $A_{11}, A_{12}, \dots B_{11}, B_{12}, \dots C_{11}, C_{12}$ unbekannt

(5) Koeffizientenvergleich

Bsp. $f(x) = \frac{6x^2-4}{2x^3+4x^2+4x+2} = \frac{3x^2-2}{x^3+2x^2+2x+1}$

Nullstellen: $-1 \Rightarrow$ LF $x+1$

Polynomdivision $\longrightarrow$ $x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)^1 \underbrace{(x^2+x+1)}^1$

$\int \frac{A}{x+1}dx = A \log(x+1)$

$x^2+x+1=0 \rightarrow$ komplexe Lsg.

$$\frac{3x^2-2}{x^3+2x^2+2x+1} \overset{!}{=} \underbrace{\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}}$$

$$\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$\Rightarrow$ Zählergleichheit: $3x^2-2 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$

$$x\cdot 0 + 3x^2 - 2 = \underbrace{(A+B)}_{3}x^2 + \underbrace{(A+B+C)}_{0}x + \underbrace{A+C}_{-2}$$

$\hookrightarrow$

$A+B=3$

$A+B+C=0$

$A+C=-2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Vorrechnen

2 i c) $\frac{3x^2+5x-2}{(x^2+1)(3x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{3x+1}$

$= \frac{Cx^2+C+3Ax^2+Ax+3Bx+B}{(x^2+1)(3x+1)}$

$$3x^2+5x-2 = x^2(C+3A)+x(A+3B)+B+C$$

$$3A+C=3$$

$$A+3B=5$$

$$B+C=-2$$

$$A=2 \qquad B=1 \qquad C=-3$$

$$\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1}$$

1 ii) g) $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+x-2}, & x \neq -2 \\ \dfrac{1}{3}, & x = -2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{2x+1} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \neq -\frac{1}{3} \to \text{unstetig}$$

p_1, p_2 diff'bar $\quad \lim_{x\to a} \frac{p_1}{p_2} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{d}{dx}p_1}{\frac{d}{dx}p_2}$

Freakstunde Ana

Aussagenlogik

A, B seien Aussagen $\qquad$ A - es regnet

Negation

$\neg A$ ("nicht A")

z.B. $\quad A$ = es regnet

$\neg A$ = es regnet nicht

Konjunktion $A \land B$ ("A und B")

z.B. $A :=$ Es regnet

$B :=$ Die Straße ist nass

$A \land B =$ Es regnet und die Straße ist nass

$B := \neg A =$ Es regnet nicht

$A \land B \hat{=}$ Es regnet und es regnet nicht (falsch)

$A \land \neg A$ immer falsch

Disjunktion

$A \lor B$ ("A oder B")

$A \lor \neg A$ immer wahr

Implikation $A \Rightarrow B$ ("A impliziert B") (wenn A wahr ist B auch wahr)

⚠ wenn A falsch ist, ist $A \Rightarrow B$ immer wahr

Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$) ("A ist äquivalent zu B")

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$

Wahrheitstafeln

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$A \wedge \neg A$ immer falsch

$A \vee \neg A$ immer wahr

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Sei x Zahl, M Menge, $A(x)$ Aussage

$\exists$ Existenzquantor

$\forall$ Allquantor

$\exists x \in M : A(x)$ es existiert (mindestens) ein $x \in M$ sodass $A(x)$ gilt

$\forall x \in M : A(x)$ für alle $x \in M$ gilt $A(x)$

z.B. $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4$ wahr

$\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4$ falsch

$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : x < y$ wahr

$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N} : x < y$ falsch

Beweisprinzipien

1 direkte Beweis

wollen beweisen dass $A \Rightarrow B$ mit A wahre Aussage

füge zwischenschritte um zu vereinfachen

wollen beweisen

$n \in \mathbb{N}$ gerade, so auch n^2

n gerade

$\Rightarrow \quad n = 2k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{\in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \quad n^2$ ist gerade

2. Beweisprinzip: Induktion

Vorgehensweise

sei $A(n)$ $n \in \mathbb{N}$ Aussage

Zeige dass $A(1)$ wahr ist (Induktionsbeginn IB)

gehe nun davon aus dass $A(n)$ wahr ist und zeigt

dass $A(n+1)$ wahr ist

$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow .. \Rightarrow A(n+1)$

ist wahr $\quad$ $n+1$, $n=1$

Bsp:

Aussage: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad 1+2+3+.\ +n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bew per Induktion

IB : $A(1)$: $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$

IS : $\cancel{A}$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Betrachte $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$n = 4$ $\quad \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5}_{\sum_{k=1}^{4+1} k \,=\, \sum_{k=1}^{4} k + 5}$

Ziel : $\mathbb{R}$ axiomatisch einführen

Axiom 1: $\mathbb{R}$ ist ein Körper

Definiere Körper

ist Menge $K \neq \emptyset$ mit Verknüpfungen

Addition

Multiplikation

So dass gilt

$(a+b)+c = a+(b+c)$

$(ab)c = a(bc)$

Assoziativ

Kommutativ

$\exists\, 0 \in K \ \forall a \in K: a + 0 = a$

$\exists\, 1 \in K \ \forall a \in K: a \cdot 1 = a$

$\forall a \in K \ \exists (-a) \in K: a + (-a) = 0$

inverses Element, neutrales Elemen

$\forall a \in K \ \exists (a^{-1}) \in K: a \cdot a^{-1} = 1$

Des weiteren gilt
Distributivität

Inverses Element ist eindeutig

seien $a \in K$ und $b, \tilde{b} \in K$ inverse Elemente der Addition zu a

$b = b + 0 = b + (a + \tilde{b}) = (b + a) + \tilde{b} = 0 + \tilde{b} = \tilde{b}$

damit ist $b = \tilde{b}$, das Inverse Element der Addition eindeutig

z.B

$-(-a) = -(-a) + 0 = -(-a) + (-a) + a = \underbrace{(-(-a) + (-a))}_{=0} + a = a$

$-(a+b) = -(a+b) + a + (-a) + b + (-b) = \underbrace{-(a+b) + (a+b)}_{=0} - a - b = -a - b$

$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$$0 = a\cdot 0 + (-(a\cdot 0)) = a\cdot 0 + \underbrace{a\cdot 0 + (-(a\cdot 0))}_{=0} = a\cdot 0$$

Folgen

a_n sei Folge index $n \in \mathbb{N}$

z.B. konstante Folge

$a_n \equiv 2$ th $(2, 2, 2, 2 \, ..)$

$a_n = n$ $(1, 2, 3, 4 \quad)$

$a_n = \frac{1}{n}$ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \, ...)$

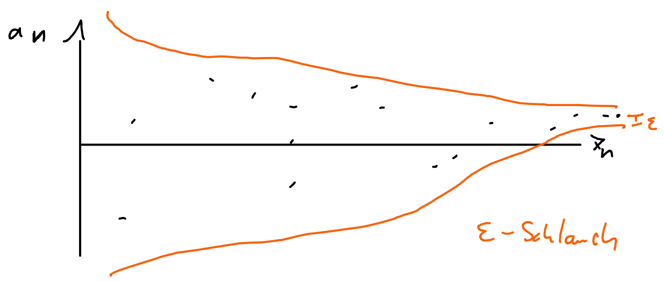
$a_n := (3 \quad 4 \quad 8 \quad 7 \quad 0 \quad -\sqrt{\tfrac{3}{2}} \; ...)$

wichtigste Frage: Konvergenz

Definition Folge a_n heißt konvergent mit Grenzwert (GW) $a \in \mathbb{R}$

falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$

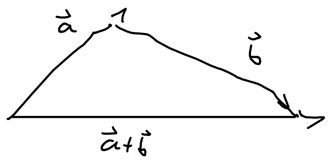
(für alle $\varepsilon > 0$ $\overbrace{\text{existiert ein}}^{\text{mindestens}}$ $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq N$ gilt: der Abstand von a_n zu a ist $< \varepsilon$)



Werkzeug: Dreiecks-Ungleichung

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

anschaulich $\vec{a}, \vec{b}$



Eindeutigkeit der Grenzwerte

$a, a' \in \mathbb{R}$ $\quad a_n \to a \quad n \to \infty$

$a_n \to a' \quad n \to \infty$

sei $\varepsilon > 0$, setze $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$

Damit gilt: $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_2 : |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$

setze $N := \max(N_1, N_2)$

Es gilt:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \underbrace{|a - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_n - a'|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow |a - a'| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow |a - a'| = 0$

$\Rightarrow a = a'$