

1 Differenzialrechnung

- (i) Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen durch Berechnung der Grenzwerte der Differenzenquotienten.

a) $x^2 + 1$

c) $\frac{1}{x}$

e) $\sin(x)$

b) $x^3 - 5x^2 + 6x + 2$

d) $\frac{x}{x-1}$

f) $\cos(x)$

Hinweis: Für $\epsilon \rightarrow 0$ gilt $\sin(\epsilon) \rightarrow \epsilon$ und $\cos(\epsilon) \rightarrow 1$. Die Terme können im Grenzwert somit ersetzt werden.

- (ii) Differenzieren Sie nach x .

a) x^2

h) $(4x + 3 \cos^2 x)^5$

o) $\ln \sqrt{x^3 e^{2x} \ln x}$

b) $2x^4 - 3x^3 + 7x - 4$

i) $6^x x^6 \sin x$

p) $\sin((3 - x^2)^2) + \cos((3 - x^2)^2) + \sin^2(3 - x^2) + \cos^2(3 - x^2)$

c) $\sqrt[3]{x+4}$

j) $\ln \sqrt{e^x + x^4}$

d) $\sqrt{x+1}(x^2 + 1)$

k) $\sqrt{\frac{2x-3}{4x^2+5}}$

e) $x^3 + 2x^2 - 4x + 13$

l) $(e^{2x+3} + 4x + 5)^6$

q) $\frac{x \sin(ax + b)}{x^2 + 3}$

f) $x^5 - \frac{2}{x^2}$

m) $(\sin^2(x) + 1)(\ln(x) + 2)$

g) $\frac{x}{x^2 + 5}$

n) $e^{\frac{x^2+3}{x^2+1}}$

r) $\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin(2x)}$

2 Kurvendiskussion

- (i) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche, Extrema und Wertebereiche folgender Funktionen.

a) $8 - 7x$

c) $x^3 + 27$

b) $x^2 + 3x - 28$

d) $x^3 - 27x$

- (ii) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$. Bestimmen Sie Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Untersuchen Sie das Wachstums- und Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen und skizzieren Sie diesen.

- (iii) Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen jeweils rechnerisch, in welchen Bereichen ihre Graphen links- oder rechtsgekrümmt sind.

a) $x^3 - 9x^2 + 3$

c) e^{-x^2}

e) $x \ln(x)$

b) $2x + \frac{1}{x}$

d) xe^{-x}

f) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

3 Praktisch, um reich zu werden

Sie sind Besitzer einer Dosenfabrik. Es soll möglichst wenig Material verbraucht werden um ein Volumen X an Suppe in einer Dose unterzubringen. Klaro, das Optimum wäre eine kugelförmige Dose, dort ist das Verhältnis Oberfläche zu Volumen am Kleinsten, nur kann man solche Dosen nicht aus ebenen Blech bauen. Daher eine zylinderförmige Dose.

Wie muss diese Aussehen? Was ist eigentlich die Fragestellung? Begründen Sie ihre Antwort auch mathematisch.

Zu Hause: Wie ändert sich der Sachverhalt, wenn die Boden-/Deckplatte als quadratisches Muster ausgestanzt werden und der Überschuss ebenfalls in die Preiskalkulation eingeht. . . . Ein weiterer Hersteller optimiert dies und stanzt die Boden-/Deckplatte in einem hexagonalen Muster aus. Sicherlich besser, aber um wie viel %?



17.11.2022: In der australischen Nationalgalerie in Canberra haben Klimaaktivistinnen mit einer neuen Protestaktion für Aufsehen gesorgt.

4 Zum Knobeln

- a) Wir betrachten die Zahl $1000!$ (also $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 999 \times 1000$). Für große n gibt es die Stirling-Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.
- Wie viele Stellen hat diese $1000!$ und wie lauten die ersten 7 Stellen?
 - Auf wie viele Nullen endet diese Zahl?
- b) Im Reptilienhaus zählte ein man 27 Köpfe und 70 Beine. Anwesend waren ausschließlich gesunde Schlangen, Echsen und Menschen. Es gab doppelt so viele Echsen wie Menschen. Wie viele Schlangen gab es zu sehen?

Na dann mal los. ☺