Differentialrechnung I

Thursday, 2 October 2025 09:08

6.1. Folgen

Folgen sind Zahlen einer Menge, die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind.

$$(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Es existieren

a) monotone Folgen   Bsp: $4 + 3(n-1) = (4, 7, 10, 13, \ldots)$

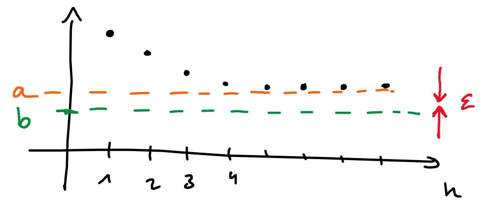
- wachsend, falls $a_k \geq a_{k-1}$
- streng wachsend $a_k > a_{k-1}$
- fallend, falls $a_k \leq a_{k-1}$
- streng fallend, $a_k < a_{k-1}$

b) alternierende Folgen $a_n = (-1)^{n+1} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

c) beschränkte Folgen $a_n = \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) > 0$

Grenzwert einer Folge

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \qquad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$$



Satz: Die Folge a_n besitzt den Grenzwert a, wenn nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

Dann sagt man, die Folge konvergiert / konvergiert gegen a.

Bsp. Fibonacci-Folge:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3 \quad \text{und} \quad f_1 = f_2 = 1$$

divergiert = konvergiert nicht

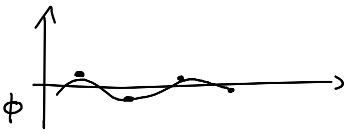
aber: Folge der Quotienten $\frac{f_{n+1}}{f_n} \equiv b_n$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = 1{,}61803\ldots \rightarrow \text{Goldener Schnitt}$$

$$\frac{f_7}{f_6} = \frac{13}{8} = 1{,}6250 \qquad \frac{f_8}{f_7} = \frac{21}{13} = 1{,}6154$$

$\frac{f_7}{f_6} = \frac{13}{8} = 1{,}6250$ $\qquad$ $\frac{f_8}{f_7} = \frac{21}{13} = 1{,}6154$

$\frac{f_9}{f_8} = \frac{34}{21} = 1{,}619$

alternierende Abweichung / Annäherung 

$\phi = 1{,}61803$

Reihen

Eine Reihe ist die Summe der Glieder einer Folge

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad s_j = \sum_{k=1}^{j} a_k \rightarrow \text{wieder eine Folge}$$

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$

Partialsummen

$s_1 = a_1, \dots$

Wenn a_n unendlich ist, dann ist $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die unendliche Reihe.

Die unendliche Reihe konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert. Andernfalls divergiert die Reihe

Bsp. $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{1{,}5} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{1{,}8\overline{3}} + \dots$$

$a_n = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \longrightarrow 2$

6.2. Grenzwerte von Funktionen

Grenzwert von $y = f(x)$ an der Stelle a

$\lim_{x\to a} f(x) = A$; $f(x) \to A$ für $x \to a$; $\quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$

Einseitige Grenzwerte

von oben/unten

Rechtsseitig: $\lim \dots f(x) = \lim \dots f(x) = A^{\pm}$

von oben/unten

Einseitige Grenzwerte

linksseitig $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A^{\pm}$

rechtsseitig $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A^{\pm}$

Die Funktion f besitzt an der Stelle a den Grenzwert A, wenn sowohl linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert gleich A sind.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = A \quad \wedge \quad \lim_{x\to a+} f(x) = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = A$$

Grenzwerte im Unendlichen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = A$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Sei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$

dann gilt

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = F + G$
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = F\cdot G$
- $\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{F}{G}$ falls $G \neq 0$, ansonsten nicht endlich

unbestimmte Ausdrücke

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0 \quad \not\Rightarrow$$

Bsp $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x^3} \neq \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x^2-2}{\lim\limits_{x\to\infty} x^3}$ „=" $\frac{\infty}{\infty}$

wenn $x\to\infty$

betrachte $x>0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}} - \overset{\nearrow 0}{\frac{2}{x^3}}}{1} = 0$$

6.3. Stetigkeit von Funktionen

Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig an Stelle a, wenn $f(a)$ existiert und $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig an Stelle a, wenn $f(a)$ existiert und
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Sind $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen, so auch
$$f(x) + g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$ auf dem Definitionsbereich

6.4. Ableitung einer Funktion

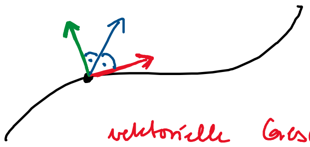
Wie ändert sich der Wert einer Funktion $f(x)$ bei kleinster Änderung des Argumentes?
infinitesimal

geometrisch: Steigung der Tangenten an den Graphen

Beispiele aus höheren Dimensionen

räumliche Änderung der Temperatur $T(x, y, z, t)$

Änderung des Ortes eines Teilchens über die Zeit



vektorielle Geschwindigkeit

Krümmung

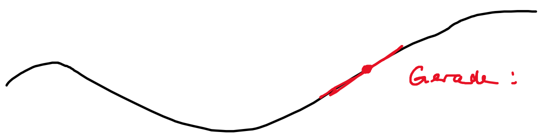
Torsion

Extremwertuntersuchungen

Wie muss ein Parameter eines Systems gewählt werden, um eine Größe zu maximieren / minimieren → Optimierung (Energieaufwand, Zeitaufwand, Kosten minimieren)

Linearisierung

lineare Annäherung einer Funktion in Umgebung von Punkt



→ Vereinfachung von Problemen

Ableitung

Existiert für eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D der Grenzwert des Differenzenquotienten

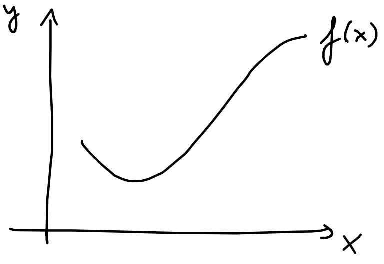
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad x_0 \in D \quad ,$$

dann nennt man $f'(x_0)$ die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0.

Dann ist $f(x)$ an der Stelle x_0 <u>differenzierbar</u>.

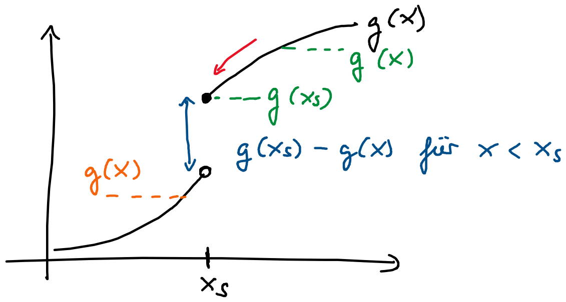
$f(x)$ ist differenzierbar, falls $f(x)$ auf ganz D diff'bar.

$f(x)$ ist stetig diff'bar, falls $f'(x)$ stetig.



stetig und diff'bar

und stetig diff'bar

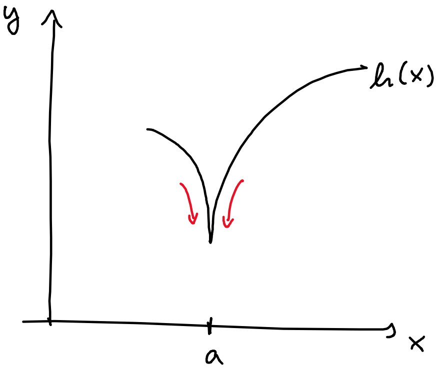


$D = \mathbb{R}$

$g(x)$ unstetig und nicht diff'bar

$$\lim_{x \to x_s^+} \frac{g(x)-g(x_s)\ \}\to 0}{x-x_s\ \}\to 0} = g'^{+}$$

$$\lim_{\underbrace{x \to x_s^-}_{x < x_s}} \frac{g(x)-g(x_s)\ \}\ \text{endlich}}{x-x_s\ \}\to 0} \to +\infty$$



h ist stetig

$\lim\limits_{x \to a^+} h'(x) \to \infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} h'(x) \to -\infty$

$\Rightarrow$ h ist an a nicht diff'bar

Andere nützliche Formen des Differenzenquotienten

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon \equiv h$$

ergeben sich aus $\varepsilon := x - x_0 \Rightarrow x_0 = x - \varepsilon$

6.5. Differenziationsregeln

1) konstante Funktion $y = f(x) = c$

$$y' = 0 \qquad DQ \cdot \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

2) Faktorregel $y = c \cdot f(x) \Rightarrow y' = c \cdot f'(x)$

3) Summen / Differenzen $y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$

Achtung: Grenzwerte nur

Achtung: Grenzwerte nur verrechnen, falls existent

4) Produktregel: $y = f(x) \cdot g(x)$

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$y = \underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{} \cdot h(x) = (f(x)\, g(x))' \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x))\ h'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x)\, g(x) \cdot h'(x)$$

$\rightarrow$ Potenzfunktion: $y = x^n \quad (n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y' = n\, x^{n-1}$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \; \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}$$

$$(x^n)' = \underbrace{\underbrace{(x)'}_{=1} \cdot \overbrace{x \cdot \ldots \cdot x}^{(n-1)\text{-mal}}}_{n\text{-mal}} + x \cdot \overset{"1"}{(x)'}\, x \cdot \ldots \cdot x + \ldots + x \cdot x \cdot \overset{"1"}{(x)'}$$

n-mal

$$= n \cdot x^{n-1}$$

$\Rightarrow$ Polynome $y = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \Rightarrow y' = \sum_{k=0}^{n} c_k\, k\, x^{k-1}$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k\, k\, x^{k-1}$$

5) Quotientenregel

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$$

6) Kettenregel $\quad y = F(x) = f(h(x))$ und $z = h(x)$

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto z \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto f(z) = y$$

$F(x)$ diff'bar, falls $y = f(z)$ und $z = h(x)$ diff'bar sind, und es gilt

„eingesetzt"

$$y' = F'(x) = \left.\frac{df}{dz}\right|_{h(x)} \cdot \left.\frac{dh}{dx}\right|_{x} = \underbrace{f'(h(x))}_{\substack{\text{äußere Ableitung} \\ \text{an der Stelle} \\ \text{der inneren Fkt}}} \cdot \overbrace{h'(x)}^{\text{Ableit. innere Fkt.}}$$

7) Ableitung Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1) i) a) $f(x) = x^2 + 1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x+\varepsilon)^2 \cancel{+1} - x^2 \cancel{-1}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2x + \underset{\downarrow \atop 0}{\varepsilon} = 2x$$

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 2$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big[\underbrace{(x+\varepsilon)^3}_{= x^3 + 3x^2\varepsilon + 3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3} - 5(x+\varepsilon)^2 + 6(x+\varepsilon) + 2 - x^3 + 5x^2 - 6x - 2\Big]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big[\cancel{x^3} + 3x^2\varepsilon + 3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \cancel{-5x^2} - 10x\varepsilon - 5\varepsilon^2 + \cancel{6x} + 6\varepsilon \cancel{+2} \cancel{-x^3} + \cancel{5x^2} - \cancel{6x} \cancel{-2}\Big]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[3x^2\varepsilon + 3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - 10x\varepsilon^2 + 6\varepsilon\right]\frac{1}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[3x^2 + \underset{\downarrow \atop 0}{3x\varepsilon} + \underset{\downarrow \atop 0}{\varepsilon^2} - \underset{\downarrow \atop 0}{10x\varepsilon} + 6\Big]$$

$$= 3x^2 - 10x + 6$$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left[\frac{1}{x+\varepsilon} - \frac{1}{x}\right]}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} - \frac{1}{x^2 + \underset{\downarrow \atop 0}{\varepsilon x}} = -\frac{1}{x^2}$$

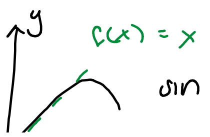
d) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

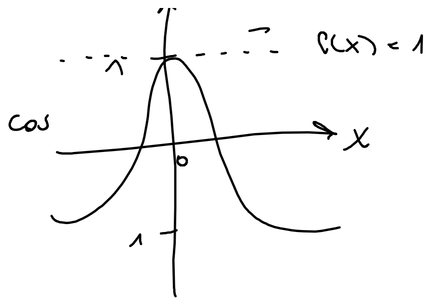
$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{x+\varepsilon}{x+\varepsilon-1} - \frac{x}{x-1}\right)\frac{1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0}\Big(-\frac{1}{x^2 - 2x + 1 + \underbrace{\varepsilon(x-1)}_{\downarrow \atop 0}}\Big)$$

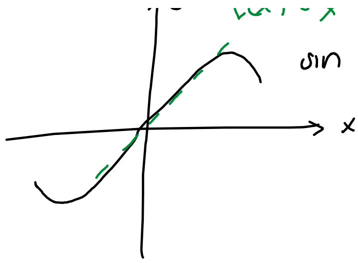
$$= -\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

e) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(x+\varepsilon) - \sin x}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big(\sin x \underbrace{\cos\varepsilon}_{\downarrow \atop 1} + \underbrace{\sin\varepsilon}_{\downarrow \atop \varepsilon} \cos x - \sin x\Big)$$







$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\cancel{\sin x} + \varepsilon \cos x - \cancel{\sin x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \cos x = \cos x$$

f) $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\cos(x+\varepsilon) - \cos x \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\cos x \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\cos \varepsilon} - \sin x \underset{\substack{\downarrow \\ \varepsilon}}{\sin \varepsilon} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} (-\sin x) = -\sin x$$

(ii) a) $f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 7$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+4} = (x+4)^{1/3}$

$$f'(x) \overset{KR}{=} \frac{1}{3} (x+4)^{-2/3} \cdot 1 = \frac{1}{3 \sqrt[3]{(x+4)^2}}$$

d) $f(x) = \sqrt{x+1}\,(x^2+1) = (x+1)^{1/2} (x^2+1)$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} \cdot 2x + (x^2+1) \frac{1}{2} (x+1)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$= 2x \sqrt{x+1} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 2x$$

e) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

f) $f(x) = x^5 - \frac{2}{x^2} = x^5 - 2x^{-2}$

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^{-3} = 5x^4 + 4 \frac{1}{x^3}$$

g) $f(x) = \frac{x}{x^2+5} = x \, (x^2+5)^{-1}$

$$f'(x) = \frac{-x^2+5}{(x^2+5)^2}$$

h) $f(x) = (4x + 3\cos^2 x)^5$

$$f'(x) = 5 \, (4x + 3\cos^2 x)^4 \cdot (4 - 6 \sin x \cos x)$$

i) $f(x) = 6^x x^6 \sin x$

$$f'(x) = 6^x \ln(6) \, x^6 \sin x + 6^x \, 6x^5 \sin x + 6^x x^6 \cos x$$

$$6^x = \underbrace{e^{\ln(6^x)}} = e^{x \cdot \ln(6)}$$

$$\underbrace{e^{x \ln(6)}} \cdot \ln(6)$$

j) $\ln(\sqrt{e^x + x^4}) = \ln (e^x + x^4)^{1/2}$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^x + x^4)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^x + x^4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{e^x + x^4} \cdot (e^x + 4x^3) = \frac{e^x + 4x^3}{2e^x + 2x^4}$$

k) $$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2x-3}{4x^2+5}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x-3}{4x^2+5}\right)^{-1/2} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{4x^2+5}\right)}_{\frac{2(4x^2+5) - 8x(2x-3)}{(4x^2+5)^2}}$$

$$= \frac{-8x^2 + 24x + 10}{(4x^2+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4x^2+5)^{-3/2}}{2\sqrt{2x-3}} \cdot (-8x^2 + 24x + 10)$$

l) $$\frac{d}{dx} (e^{2x+3} + 4x + 5)^6 \overset{KR}{=} 6 (e^{2x+3} + 4x + 5)^5 \cdot (e^{2x+3}\, 2 + 4)$$

m) $$f'(r) \overset{PR}{=} 2\sin x \cos x (\ln x + 2) + \frac{\sin^2 x + 1}{x}$$

n) $$\exp\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)$$

$$f'(x) \overset{KR}{=} e^{\cdot\cdot} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)}_{QR}$$

$$= -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

o) $$\ln\sqrt{x^3 e^{2x} \ln x} = \frac{1}{2} \ln(x^3 e^{2x} \ln x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^3 e^{2x} \ln(x)} \left(3x^2 e^{2x} \ln x + x^3 2e^{2x} \ln x + x^2 e^{2x}\right)$$

p) $$f'(x) = \cos((3-x^2)^2) \cdot [2(3-x^2)(-2x)]$$

$$- \sin((3-x^2)^2) \; [2(3-x^2)(-2x)]$$

$$= -4x(3-x^2) [\cos((3-x^2)^2) - \sin((3-x^2)^2)]$$

q) $$f'(x) = \frac{\sin(ax+b) + ax\cos(ax+b))(x^2+3) - 2x^2 \sin(ax+b)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{\sin(ax+b)(3-x^2) + \cos(ax+b)(ax^3 + 3ax)}{(x^2+3)^2}$$

r) $$f(x) = e^{\ln\left[\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin(2x)}\right]} = e^{\sin(2x) \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)}$$

$$\overset{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}{=} e^{\sin(2x) \ln(x^2+1) - \sin(2x) \ln(x^2+3)}$$

$$f'(x) = \underbrace{\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin(2x)}}_{g(x)} \cdot \left[2\cancel{\cos}(2x) \ln(x^2+1) + \sin(2x) \frac{2x}{x^2+1} - 2\cancel{\cos}(2x) \ln(x^2+3) - \sin(2x) \frac{2x}{x^2+3} \right]$$

$$= g(x) \cdot \left[2\cos(2x) \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right) + \sin(2x) \cdot \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} \right]$$

2 I) a)

$f(x) = 8-7x \qquad f'(x) = -7 < 0 \quad \forall x$

$\rightarrow$ streng monoton fallend

$\omega = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = 2x+3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

$x < -\frac{3}{2} \rightarrow f'(x) < 0$ streng monoton fallend

$x > -\frac{3}{2} \rightarrow f'(x) > 0$ " " steigend

$x = -\frac{3}{2}$

$f''(x) = 2 \quad \forall x \quad > 0 \rightarrow$ links $\rightarrow$ Minimum

$f(-3/2) = -\frac{121}{4}$

$\omega = [-\frac{121}{4}, \infty)$

c) $f'(x) = 3x^2 > 0 \rightarrow$ streng monoton steigend für $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) = 6x \quad \begin{cases} 0, & x = 0 \\ <0, & x<0 \rightarrow \text{rechts} \\ >0, & x>0 \rightarrow \text{links} \end{cases}$

$\omega = \mathbb{R}$

d) $f'(x) = 3x^2 - 27$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$f''(x) = 6x$

$f'(x) \quad \begin{cases} <0, & x \in (-3,3) \rightarrow \text{smf} \\ >0, & x \in (-\infty,-3),\ x \in (3,+\infty) \rightarrow \text{sms} \end{cases}$

$f''(x) < 0, \quad x \in (-\infty, 0) \rightarrow$ rechts

$f''(x) > 0, \quad x \in (0, \infty) \rightarrow$ links

II) $f'(x) = 4x^3 - 16x \overset{!}{=} 0 \rightarrow x = \pm 2, \ x = 0$

	$f'(x)$	
$x < -2$	<0	s.m.f
$-2 < x < 0$	>0	s
$0 < x < 2$	<0	f
$2 < x$	>0	s

$(-2, -7)$
$(2, -7)$
$(0, 9)$

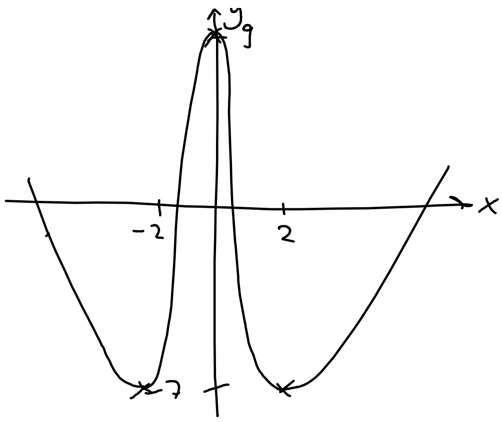
$f''(x) = 12x^2 - 16 \overset{!}{=} 0 \rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

	f''	
$x < -\sqrt{\frac{4}{3}}$	>0	links
$-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$	<0	rechts
$\frac{2}{\sqrt{3}} < x$	>0	links

$f''(0) < 0 \rightarrow$ Minimum

$f''(2) > 0 \rightarrow$ Max

$f''(-2) > 0$



(iii) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 18x$

$f''(x) = 6x - 18 \overset{!}{=} 0 \iff x = 3$

	$f''(x)$	
$x > 3$	>0	$\rightarrow$ links
$x < 3$	<0	$\rightarrow$ rechts

b) $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$

	$f''(x)$
$x > 0$	>0
$x < 0$	<0

c) $f'(x) = -2x e^{-x^2}$

$f''(x) = \underbrace{(-2 + 4x^2)}_{x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}} \underbrace{e^{-x^2}}_{>0}$

	$f''(x)$
$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	>0
$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	<0
$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$	>0

d) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$

$f''(x) = \underbrace{(x-2)}_{x=2} \underbrace{e^{-x}}_{>0}$

	$f''(x)$
$x < 2$	<0
$x > 2$	>0

e) $f'(x) = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x}$

$x > 0$	$f''(x) > 0$
$x < 0$	nicht definiert

f) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ $\qquad f''(x) = \sinh(x)$

	$f''(x)$
$x > 0$	>0
$x < 0$	<0

3) $X = \pi \cdot r^2 h \iff h = \frac{X}{\pi \cdot r^2}$

$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2\pi r X}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2X}{r}$

nach r ableiten $\rightarrow$ $4\pi r - \frac{2X}{r^2} \overset{!}{=} 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{X}{2\pi}}$

$h = \frac{X}{\pi \cdot r^2} = \frac{X}{\pi \left(\frac{X}{2\pi}\right)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{X}{2\pi}} = 2r$

$\underline{\underline{h = 2r}}$

4) $n! = (2\pi n)^{1/2} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\lg(n!) = \lg(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2} \cdot \lg n + n \lg\left(\frac{n}{e}\right)$

$\lg(1000!) = 2567{,}6049001602908$

$1000! = 10^{2567} \cdot 10^{0{,}604} = 10^{2567} \; 4{,}0262446457 8$

$\frac{1000}{5} + \frac{1000}{5^2} + \frac{1000}{5^3} + \frac{1000}{5^4} = 200 + 40 + 8 + 1$

$= 249$

6) I $e + s + m = 27$

II $e = 2m$

III $2m + 4e = 70$

II in III $\rightarrow$ $2m + 8m = 70 \Rightarrow m = 7$

in II $\rightarrow$ $e = 2 \cdot 7 = 14$

I $14 + s + 7 = 27 \Rightarrow s = 6$