

1 Differenzialrechnung

Differenzieren Sie nach x .

a) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{bx+c}\right)^2$

c) $\ln \sqrt{x^2 + \sin^2(x)}$

b) $\frac{(x+1)\sin(x+1)}{(x-1)^2}$

d) x^x ; Tip: z.B. $7 = e^{\ln 7}$

2 Integralrechnung

(i) Integrieren Sie nach x . Finden Sie alle Stammfunktionen.

a) x^2

e) $\frac{-5}{x^6}$

j) $6\sin(4-3x) + 3e^{-2x} + 5$

b) $x^n, n \neq -1$

f) e^{-5x}

k) $\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2}$

c) $\frac{1}{x}$

g) $\sin(x)\cos(x)$

l) $\frac{x+29}{x^2+3x-28}$

d) $\frac{1}{x+23}$

i) $\frac{x}{1+x^2}$

Hinweis: Vereinfachen Sie in k) und l) durch Polynomdivision oder Partialbruchzerlegung.

(ii) Berechnen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie das Schaubild. Berechnen Sie anschließend die vom Graphen von f und der x -Achse eingeschlossene Fläche.

a) $f(x) = 4x - x^2$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

(iii) Bestimmen Sie die Stammfunktionen durch Substitution.

a) $\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+3}}$

b) $\frac{(\ln(x^3))^2}{x}$

c) $\frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} - e^x - 2}, x > \ln(2)$

(iv) Bestimmen Sie die Stammfunktionen durch partielle Integration.

a) $x \sin(x)$

b) $\sin^2(x)$

c) $\ln(x)$

3 Integralrechnung - Anwendung 1

Zeigen Sie mit Integralrechnung, dass die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks gerade die Hälfte des Produktes aus Grundseite und Höhe ist. Verallgemeinern Sie dies dann für beliebige Dreiecke.

4 Integralrechnung - Anwendung 2

Durch die Einnahme eines Medikaments zur Regulierung des Blutdrucks gelangen Wirkstoffe ins Blut. Die Wirkstoffmenge im Blut kann näherungsweise durch eine Funktion $m(t)$ beschrieben werden. Die Änderung von $m(t)$ mit der Zeit ist die Summe aus einer konstanten Abbaurrate und einer Exponentialfunktion.

$$m'(t) = \frac{dm(t)}{dt} = ae^{-b \cdot t} - c \quad ; \quad a = 1.2 \text{ mg/min}; b = 0.04 \text{ min}^{-1}; c = 0.1 \text{ mg/min}$$
$$t > 0; \quad t \text{ in min.}$$

Zu Beginn bei $t = 0$ sind 10 mg des Wirkstoffs im Blut.

- Erstellen Sie die Gleichung für $m(t)$ und stellen Sie diese in GeoGebra dar.
Beachte $m(t = 0) = 10 \text{ mg}$
- Wann ist der Wirkstoff vollständig abgebaut?
- Wie ändert sich die Abbauphase, wenn anfänglich die doppelte Menge Wirkstoff im Blut war?

Hinweis zu b) und c): Dies kann nur numerisch ermittelt werden, nutzen Sie GeoGebra.
Das Ergebnis bei c) ist überraschend.

Viel Spaß beim Lösen. ☺