6.6. Elementare Ableitungsfunktionen

- algebraische Funktionen

↳ rationale (Polynome, gebrochene)

$$y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Beweis: Differenzenquotient, Produktregel

↳ irrationale $y = x^q \rightarrow q \cdot y^{q-1}$

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

↳ transzendente Funktionen

- trigonometrische $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$

$$y = \sin(x) \Rightarrow y' = \cos(x)$$
$$y = \cos(x) \Rightarrow y' = -\sin(x)$$
$$y = \tan(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$y = \cot(x) \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Quotientenregel aus $\sin(x)$, $\cos(x)$

- Exponentialfunktion:

(1) $y = e^x \rightarrow y' = e^x$

Beweis: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \frac{d}{dx} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!}$

$$= \underbrace{\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}}_{\text{Term } n=0 \text{ fällt weg}}$$

$$= \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \frac{\cancel{n}}{\underbrace{\cancel{n} \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)!}}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{\underbrace{(n-1)!}_{k = n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

allgemein:

(1) $y = a^x \rightarrow y' = a^x \cdot \ln(a)$

Beweis: $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln(a)} = e^x \Big|_{x \cdot \ln(a)} \cdot \frac{d}{dx}(x \cdot \ln(a))$$
$$= e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a)$$
$$= a^x \cdot \ln(a)$$

- Logarithmusfunktion

$y = \ln(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

$$= a^x \cdot \ln(a)$$

- Logarithmusfunktion

$$y = \ln(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$y = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow y' = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$$

$f^{-1}(x)$ dann ist $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\underset{e^x}{f'}(\underbrace{f^{-1}(x)}_{\ln(x)})}$

$f^{-1}(x) = \ln(x)$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}}$$

$$= \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

6.7. Eigenschaften von Funktionen

- Extremwerte von Funktionen

<u>notwendige Bedingung</u>: $\underline{f'(a) = 0}$

dass bei $x = a$

Maximum oder Minimum

vorliegt

$$C$$
$$\Downarrow$$
$$A \Rightarrow B$$

$\uparrow$ hinreichende Bedingung für B

$\uparrow$ notwendige Bedingung für A

<u>hinreichende Bedingung</u>

ist die zweite Ableitung von $f(x)$, $f''(x)$ an Stelle a verschieden von 0,

d.h. $f''(a) \neq 0$, oder $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{n-1}(a) = 0 \wedge f^{(n)}(a) \neq 0$,

so befindet sich an der Stelle a ein lokales Extremum.

Falls es sich schwer prüfen lässt $\rightarrow$ VZW untersuchen von $f'(x)$

Vorzeichenwechsel

- Krümmungsverhalten

$f''(x) > 0 \rightarrow$ linksgekrümmt

$f''(x) < 0 \rightarrow$ rechtsgekrümmt

$f''(x) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt / <u>ungekrümmt</u> $(f(x) = c,\ f(x) = ax + b)$

7. Integralrechnung I

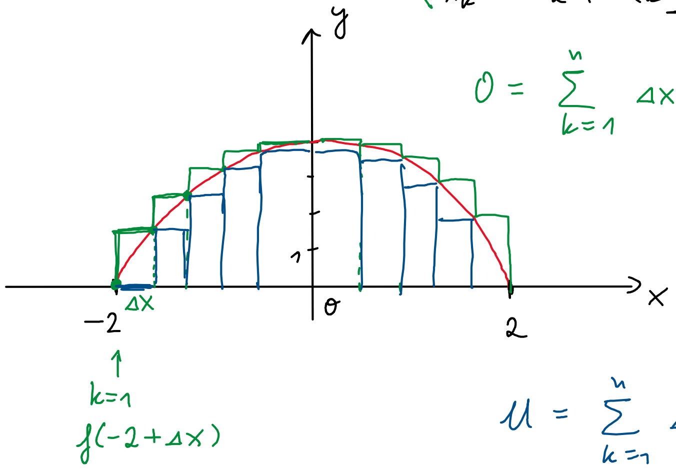
7.1. Ober- / Untersummen

Betrachte Funktion f auf Intervall $[a, b]$, ges Flächeninhalt zw. f und x-Achse

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Bsp $f(x) = 4 - x^2$, Fläche zwischen Nullstellen ± 2

für Obersumme
$$\begin{pmatrix} x_k = -2 + (k+1)\,\Delta x\,; & k = 1, 2, \dots \frac{n}{2} - 1 \\ x_k = -2 + (k-1)\cdot \Delta x\,; & k = \frac{n}{2} + 1, \dots, n \end{pmatrix}$$



$$O = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_k)$$

Untersumme:
$$\begin{pmatrix} x_k = -2 + (k-1)\,\Delta x & k \leq \frac{n}{2} - 1 \\ x_k = -2 + (k+1)\,\Delta x & \frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n \end{pmatrix}$$

$$U = \sum_{k=1}^{n} \Delta x\, f(x_k)$$

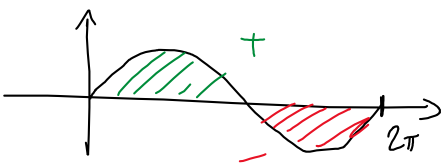
$\rightarrow$ wird durch Steigung bestimmt

O, U Folgen von Partialsummen
$$O_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x\, f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_k)$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{b-a}{n} f(-2 + (k+1)\,\Delta x) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{b-a}{n} f(-2 + (k-1)\underbrace{\Delta x}_{\frac{b-a}{n}}) \right)$$

Die Fläche unter dem Graphen ergibt sich durch den Grenzübergang ($\rightarrow$ Reihe)
$$\lim_{n\to\infty} O_n = A = \lim_{n\to\infty} U_n$$

Anmerkung: Wenn $f(x) < 0 \rightarrow A < 0$

$\Rightarrow$ orientierter Flächeninhalt mit Vorzeichen

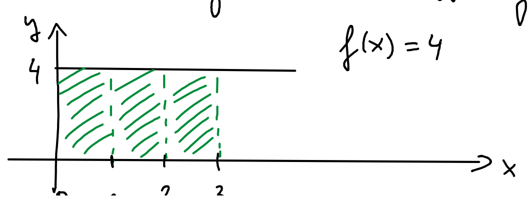


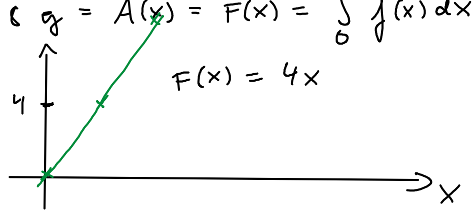
$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = 0$$

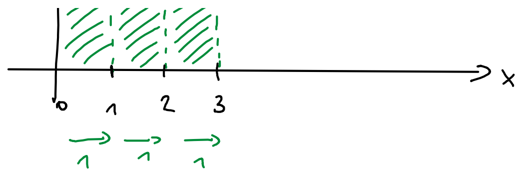
7.2. Integral und Integrierbarkeit

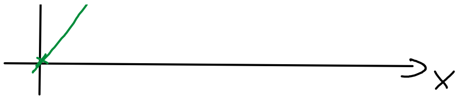
Def Eine Funktion ist auf $[a,b]$ integrierbar, wenn Grenzwerte von Obersumme und Untersumme gleich sind und existieren (Konvergenzkriterium).
Der Grenzwert ist der orientierte Flächeninhalt.
$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \int : \text{Integral}$$
$$\sum : \text{Summe}$$

Zusammenhang mit Ableitung: $g = A(x) = F(x) = \int_0^x f(x)\, dx$



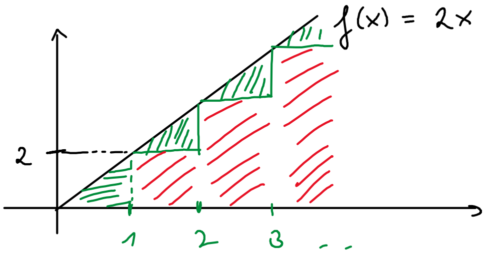


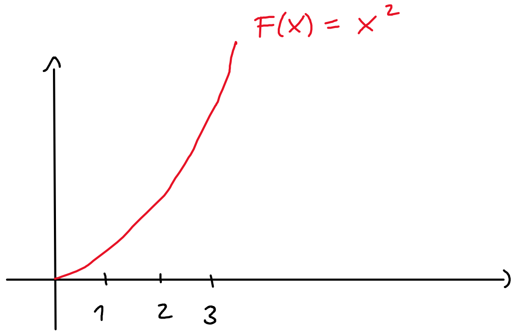




ΔA : 4 4 4 ...

A_{ges} : 4 8 12 ...





$\Delta A_1 = 1$ $\Delta A_1 = 1$ $\Delta A_1 = 1$

$\Delta A_2 = 0$ $\Delta A_2 = 2$ $\Delta A_2 = 4$ $\Delta A_2 = 6$

A_{ges} 1 3 5 7

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) \to n^2$$

Integrieren $\hat{=}$ Differenzieren rückwärts $\qquad f'(x) = \frac{df}{dx} = g(x)$

$$\frac{df}{dx} = g(x) \quad \Big| \cdot dx$$

$$df = g(x) \cdot dx \quad \Big| \int$$

$$\left.\begin{aligned} \int df &= \int g(x)\, dx \\ \int 1\, df &= f \end{aligned}\right\} \quad f(x) = \int g(x)\, dx + C$$

Invertierbarkeit : Beim Ableiten geht etwas Information verloren : konstante Faktoren

Bis auf diese konstante Verschiebung sind Integral und Ableitung Umkehrungen voneinander

Definition: Stammfunktion

Eine Funktion F mit Eigenschaft $F' = f$ heißt Stammfunktion zu f

Ist F Stammfunktion, so auch $F + c$ mit jedem $c \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

Beweis : $(F+c)' = F' = f$

7.3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist F Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

↳ durch Grenzen ist die Umkehrbarkeit vollständig gegeben mit
bspw.:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$b \mapsto F(b) - F(a)$$

7.4. Bestimmung der Stammfunktion und Rechenregeln

bestimmtes Integral: mit eingesetzten Grenzen → Flächeninhalt

⇕

unbestimmtes Integral: mit Grenze als freier Parameter / Grenzen weglassen
Ist F Stammfunktion von f, dann ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen als unbestimmtes Integral bezeichnet mit der Schreibweise

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Rechenregeln

a) Faktorregel: $\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx \quad a \in \mathbb{R}$

b) Summenregel: $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

} lineare Abbildung

c) → lineare Verkettung

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

d) Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

aus Hauptsatz
$F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$

e) Nullintegral: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

f) Addition von Integrationsintervallen f auf $[a,c]$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Wichtige Stammfunktionen

- Potenzfunktion: $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c, \quad r \neq -1$
- Hyperbelfunktion: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + c$
- Exponentialfunktion: $\int e^x\,dx = e^x + c$
- Logarithmusfunktion: $\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + c$

Rechenregeln:

Rechenregeln:

① partielle Integration

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,dx$$

Beweis: Produktregel rückwärts

$$(f(x)\cdot G(x))' = f'(x)\cdot G(x) + f(x)\cdot G'(x) = f'(x)\cdot G(x) + f(x)\,g(x)$$

Integrieren:

$$\underbrace{\int (f(x)\cdot G(x))'\,dx}_{f(x)\cdot G(x)} = \int f'(x)\cdot G(x)\,dx + \int f(x)\cdot g(x)\,dx$$

② Substitution:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(g(x))\,\frac{dg}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx} = \int f(g(x))\,dg$$

$$= \int f(g)\,dg = F(g)$$

$$= F(g(x))$$

↳ Kettenregel rückwärts:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$= f(g(x))\,g'(x)$$

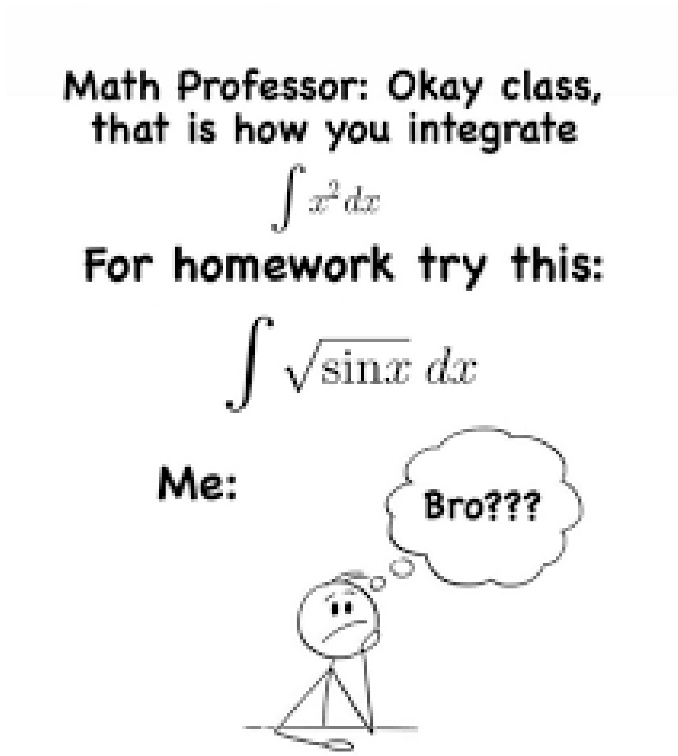
Bsp

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-1}\,\frac{d}{dx}(x^2-1)\,dx$$

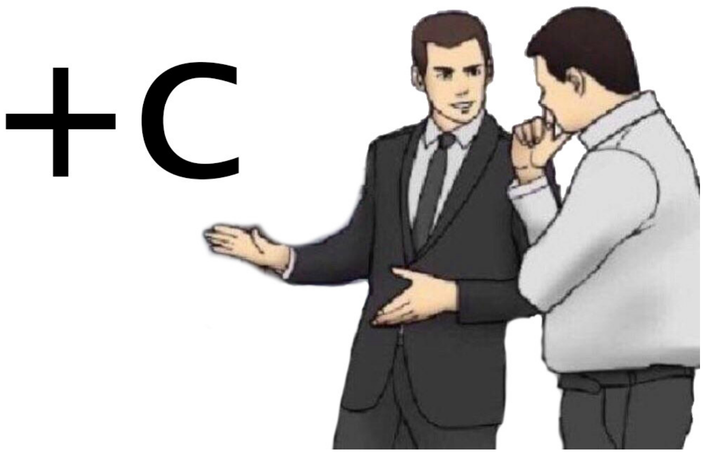
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{g}\,dg \qquad g = x^2-1$$

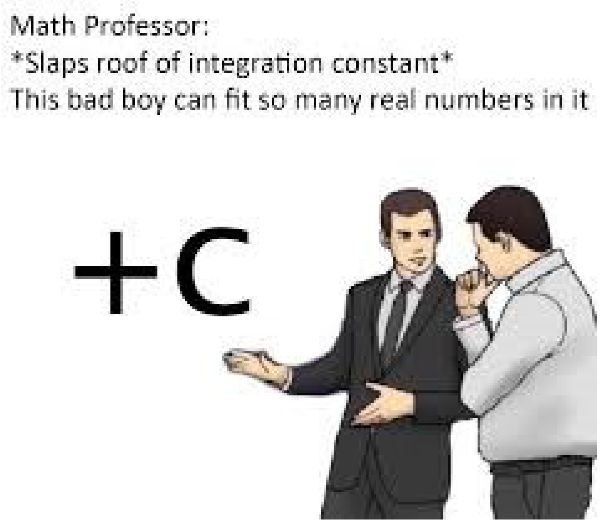
$$= \frac{1}{2}\ln(g) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + c$$



Math Professor:
Slaps roof of integration constant
This bad boy can fit so many real numbers in it





1.122 × 980

Aufgabe 1.

a) $$\left(\sqrt{a}-\sqrt{bx-c}\right)^2 = 2\left(\sqrt{a}-\sqrt{bx+c}\right)\cdot \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{bx+c}}\cdot b$$

b) $$\frac{(x+1)\sin(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x+1)\cdot\sin(x+1)\right]\cdot(x-1)^2 - \left[\frac{d}{dx}(x-1)^2\right]\cdot(x+1)\sin(x+1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{\left[\sin(x+1)+(x+1)\cdot\cos(x+1)\right]\cancel{(x-1)^2} - 2\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)\sin(x+1)}{(x-1)^{\cancel{4}}}$$

$$= \frac{\sin(x+1)+(x+1)\cdot\cos(x+1)}{(x-1)^2} - \frac{2(x+1)\sin(x+1)}{(x-1)^3}$$

d) $$x^x = e^{\ln(x)\cdot x} \Rightarrow \frac{d}{dx}e^{\ln(x)\cdot x} = e^{\ln(x)\cdot x}\left[\ln(x)+\underbrace{\frac{1}{x}\cdot x}_{1}\right]$$

$$= x^x\left(\ln(x)+1\right)$$

c) $$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+\sin^2(x)}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2(x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+\sin^2(x)}}\cdot\left(2x+2\sin(x)\cos(x)\right)$$

$$= \frac{1}{|x^2+\sin^2(x)|}\cdot x+\sin(x)\cos(x)$$

Aufgabe 2

a) $$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+c$$

b) $$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$$

c) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|)+c$$

d) $$\int \frac{1}{\underbrace{x+23}_{z}}\,\underbrace{dx}_{dz} = \ln(|z|)+c = \ln(|x+23|)+c$$

d) $\int \frac{\ldots}{\underbrace{x+23}_{z}} \; \frac{\ldots}{dz} \quad \ln(|z|)+c = \ln(|x+23|)+c$

e) $\int \frac{-5}{x^6}\,dx = \frac{\cancel{-5}}{\cancel{-5}}\, x^{-5} + c$

f) $\int e^{-5x}\,dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} + c$

Methode 1: Partielle Integration

g) $\underbrace{\int \underset{f(x)}{\sin(x)} \cdot \underset{g'(x)}{\cos(x)}\,dx}_{I} = \sin(x)\sin(x) - \overbrace{\int \cos(x)\sin(x)\,dx}^{I} \quad | + I$

$= f(x)g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

$\Rightarrow 2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \sin^2(x) \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$

Methode 2 Substitution

$\int \sin(x)\cos(x)\,dx \qquad y(x) = \sin(x) \qquad \frac{dy}{dx} = \cos(x) \quad | \cdot dx \;|\; : \cos(x)$

$\hookrightarrow dx = \frac{dy}{\cos(x)}$

$\Rightarrow \int y \, \cancel{\cos(x)} \frac{dy}{\cancel{\cos(x)}} = \frac{1}{2}y^2 + c$

$\overset{RS}{=} \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$

h) $I = \int (x\cos(x) + \sin(x))\,dx = \underbrace{\int x\cos(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \sin(x)\,dx}_{I_2}$

$I_1: \int \underset{f(x)}{x}\, \underset{g'(x)}{\cos(x)}\,dx = x\cdot\sin(x) - \underbrace{\int 1\cdot\sin(x)\,dx}_{-\cos(x)} = x\cdot\sin(x) + \cos(x) + c_1$

$I_2: \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c_2$

$I = I_1 + I_2 = x\cdot\sin(x) \cancel{+\cos(x) - \cos(x)} \underbrace{+c_1 + c_2}_{=c} = x\cdot\sin(x) + c$

i) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx \qquad u = 1+x^2;\; \frac{du}{dx} = 2x$

$\hookrightarrow dx = \frac{1}{2x}\,du$

$\int \frac{\cancel{x}}{u}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(|u|) + c \overset{RS}{=} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

j) $\int (6\sin(4-3x) + 3e^{-2x} + 5)\,dx$

$= 6\cdot\int \sin(4-3x)\,dx + 3\cdot\int e^{-2x}\,dx + \int 5\,dx$

$= 6\cdot\cos(4-3x)\,\frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right)e^{-2x} + 5x + c$

$$= 6 \cdot \cos(4-3x)\ \frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) e^{-2x} + 5x + C$$

k) $\int \frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2-x-2}\,dx$

NR
$$
\begin{aligned}
&(x^3+2x^2-5x-6) : (x^2-x-2) = x+3\\
&\underline{-(x^3-x^2-2x)}\\
&\qquad 3x^2-3x-6\\
&\quad \underline{-(3x^2-3x-6)}\\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \int x+3\,dx = \frac{1}{2}x^2+3x+C$$

l) $\int \frac{x+29}{x^2+3x-28}\,dx$

Linearfaktorzerlegung: $x^2+3x-28 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+28}$

$x_1 = 4 \lor x_2 = -7$

$\Downarrow\ (x+7)\cdot(x-4)$

PBZ $\frac{x+29}{(x+7)(x-4)} \overset{!}{=} \frac{A}{(x+7)} + \frac{B}{(x-4)} = \frac{A\cdot(x-4)+B(x+7)}{(x+7)\cdot(x-4)}$

$\Leftrightarrow\ x+29 = Ax-4A+Bx+7B$

$\Rightarrow 1 = A+B$

$\Rightarrow 29 = -4A+7B$

$B=3$

$A=-2$

$$\Rightarrow \int \frac{-2}{x+7} + \frac{3}{x-4}\,dx$$

$$= -2\int \frac{1}{x+7}\,dx + 3\int \frac{1}{x-4}\,dx = -2\ln(|x+7|) + 3\cdot\ln(|x-4|) + C$$

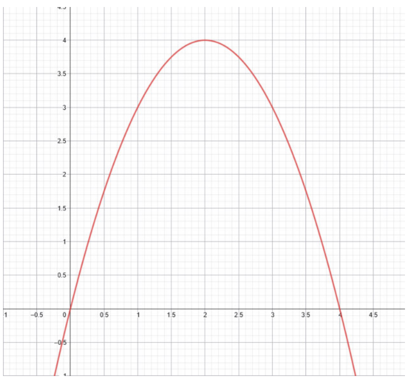
ii) a) $f(x) = 4x-x^2$

Nullstellen: $x(4-x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x=0 \lor 4-x=0$
$x=4$

$f'(x) = 4-2x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x=2$

$f(2) = 8-4 = 4$

$\int_0^4 f(x) = \frac{32}{3}$



b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

NS: $x=0$ und $x=2$ ← doppelte Nullstelle

$$x\cdot(x^2-4x+4) = 0 \Rightarrow x=0 \vee \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}=0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 \overset{!}{=} 0 \quad |\,!$$

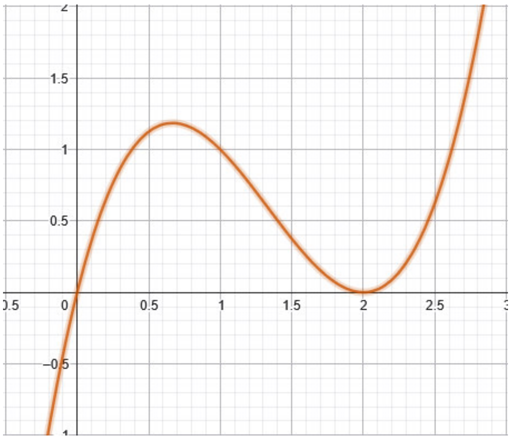
$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4}{3}}$$

$$x_1 = \frac{6}{3} = 2$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$



ii) a) $$\int \frac{\cos(x)}{\underbrace{\boxed{\sqrt{\sin(x)+3}}}_{u}}\,dx$$

$$u = \boxed{\sqrt{\sin(x)+3}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\sin(x)+3)^{\frac{1}{2}}}\cdot\cos(x) \quad |\cdot dx \quad |:(\text{Rechts})$$

$$dx = 2\cdot\frac{\overbrace{\boxed{\sqrt{\sin(x)+3}}}^{u}}{\cos(x)}\,du$$

$$= \int 2\,\frac{\cancel{u}}{\cancel{u}}\,\frac{\cancel{\cos(x)}}{\cancel{\cos(x)}}\,du$$

$$= \int 2\,du = 2u \overset{RS}{=} 2\sqrt{\sin(x)+3}$$

b) $$\int \frac{(\ln(x^3))^2}{x}\,dx = \int \frac{3^2\cdot\ln(x)^2}{x}\,dx = 9\int\frac{\ln^2(x)}{x}\,dx$$

$$y = \ln(x) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\cdot dy$$

$$\Rightarrow 9\cdot\int \frac{y^2}{\cancel{x}}\cancel{x}\,dy = 9\cdot\frac{1}{3}\cdot y^3 = 3\cdot y^3 \overset{RS}{=} 3\ln^3(x)$$

c) $$\int\frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}-e^x-2}\,dx \qquad x > \ln(2)$$

Substitution!

Substitution:

$u = e^x \qquad \frac{du}{dx} = e^x = u \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{u}\, du$

$$\hookrightarrow \int \frac{u^2+u}{u^2-u-2} \cdot \frac{1}{u}\, du = \int \frac{u+1}{u^2-u-2}\, du$$

$u^2 - u - 2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} \quad \Rightarrow u_1 = 2 \quad \vee\ u_2 = -1$

$$\int \frac{\cancel{u+1}}{(u-2)\cdot\cancel{(u+1)}}\, du = \int \frac{1}{u-2}\, du = \ln(u-2) + C$$

$$\stackrel{RS}{=} \ln(e^x - 2) + C$$

Bsp. $\int x^3 e^x \, dx$

	D	I
+	x^3	e^x
−	$3x^2$	e^x
+	$6x$	e^x
−	6	e^x
+	0	e^x

$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 e^x + 0 + C$

$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - \int 6 e^x$

$\int f \; g' \, dx$

$= f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx$

$f\, g - [f' \cdot g - \int f'' \cdot g\, d]$

(iv) a) $\int \underset{f}{x}\ \underset{g'}{\sin(x)}\, dx = -x \cos(x) + \int \cos(x)\, dx$

$= -x \cos(x) + \sin(x) + C$

b) $\int \sin^2(x)\, dx = \int \underset{f}{\sin(x)} \cdot \underset{g'}{\sin(x)}\, dx$

$= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int \underbrace{\cos(x) \cdot \cos(x)}_{= \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)}\, dx$

$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

$\underbrace{\int \sin^2(x)\, dx}_{I} = -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1\, dx - \underbrace{\int \sin^2(x)\, dx}_{I} \quad | + I$

$2 \int \sin^2(x)\, dx = -\sin(x) \cdot \cos(x) + x$

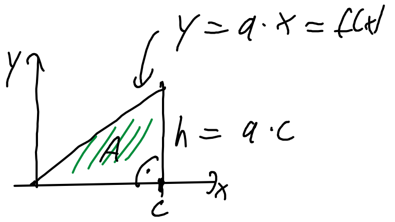
$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{-\sin(x) \cdot \cos(x) + x}{2} + C$

c) $\int \ln(x)\, dx = \int \underset{f}{\ln(x)} \cdot \underset{g}{1}\, dx$

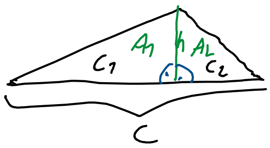
$= \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\, dx = \ln(x) \cdot x - \int dx$

$= \ln(x) \cdot x - x + C$

$$= \ln(x)\cdot x - \int \cancel{\frac{1}{x}}\cdot \cancel{x}\,dx = \ln(x)\cdot x - \int dx$$
$$= \ln(x)\cdot x - x + c$$



$$A = \int_0^c f(x)\,dx = \int_0^c a\cdot x\,dx = \left[\frac{a\cdot x^2}{2}\right]_0^c = \frac{a\cdot c^2}{2} = \frac{h\cdot c}{2}$$



$c_2 + c_1 = c$

$$A = A_2 + A_1 = \frac{c_2\cdot h}{2} + \frac{c_1\cdot h}{2} = \frac{(c_1+c_2)\cdot h}{2} = \frac{c\cdot h}{2}$$

Aufgabe 4

$$m'(t) = \frac{dm(t)}{dt} = a e^{-bt} - c$$

$$\int m'(t)\,dt = -\frac{a}{b} e^{-bt} - c\cdot t + K$$

$$m(0) = 10\,mg = -\frac{a}{b} e^{0} - c\cdot 0 + k = -\frac{a}{b} + k$$

$$\Rightarrow k = 10\,mg + 30\,mg = 40\,mg$$

$$\Rightarrow m(t) = 40\,mg - 30\,mg\; e^{-bt} - 0{,}1\,\frac{mg}{min}\cdot t$$